Un costrutto teorico per guidare il docente nell'attività di riflessione a posteriori sulla propria pratica: analisi di un'esperienza di tirocinio

Annalisa Cusi[(*)]

1. Introduzione: il nostro approccio alla didattica dell'algebra

In questo articolo, che mira ad evidenziare le ricadute nella formazione insegnanti di una ricerca condotta con il prioritario obiettivo di favorire l'innovazione nelle classi, presenteremo un esempio del lavoro condotto con alcuni tirocinanti SSIS con l'obiettivo di fornire loro un efficace modello per la riflessione a posteriori sulle attività condotte durante il tirocinio. Tale modello si basa sull'uso di un costrutto teorico, frutto di precedenti ricerche (Cusi-Malara, 2009), elaborato per caratterizzare i diversi ruoli svolti da un docente che sa porsi come 'Modello di Comportamenti e Atteggiamenti Consapevoli ed Efficaci' (d'ora in poi ci serviremo dell'acronimo M-CA_{CE}), stimolando nei suoi allievi lo sviluppo di competenze e consapevolezze chiave nell'attivazione di processi di pensiero via linguaggio algebrico. Prima di presentare la nostra metodologia di lavoro con i futuri insegnanti ed un esempio di analisi di un'attività di tirocinio, inquadriamo le nostre ricerche soffermandoci sul nostro framework di approccio alla didattica dell'algebra. Alla presentazione del costrutto M-CA_{CE} sarà invece dedicato il prossimo paragrafo.

La ricerca che abbiamo condotto si situa nell'ampio quadro di studi di innovazione sulla didattica dell'algebra sviluppati a partire dagli anni '90 dal gruppo di ricerca coordinato da N.A. Malara (Malara, 1999) che hanno portato alla costituzione del progetto ArAl (Malara-Navarra, 2003). Tale è progetto finalizzato ad un approccio anticipato all'algebra, in un ottica di continuità tra i vari livelli scolari (scuola primaria, scuola secondaria inferiore, scuola secondaria superiore), e si pone anche come sistema integrato di formazione degli insegnanti (Malara, 2004, 2007).

[(*)] Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia – GREM (annalisa.cusi@unimo.it).

La nostra ricerca ha avuto sin dall'inizio il prioritario obiettivo di promuovere nella scuola attività mirate a favorire negli studenti lo sviluppo di quello che Arcavi (1994) definisce symbol sense, una più profonda visione dell'algebra associata a particolari attitudini, quali l'abilità di vedere i simboli come strumenti portatori di significato e la capacità di saper apprezzare l'eleganza, la concisione ed il potere dei simboli come strumenti per rappresentare e provare relazioni. In linea con le idee di Bell (1996), che sostiene l'importanza di stimolare gli allievi ad un uso del linguaggio algebrico come strumento per rappresentare ed esplorare relazioni, e di Wheeler (1996), che sottolinea la necessità di favorire, da parte loro, lo sviluppo della consapevolezza che il linguaggio algebrico possa rappresentare un importante strumento per la scoperta e talvolta anche la creazione di nuovi oggetti, abbiamo scelto di focalizzare l'attenzione su attività mirate a 'far toccare con mano' agli studenti la potenza del linguaggio algebrico: quelle di approccio alla dimostrazione in ambito aritmetico. Tali attività si situano tra le global/meta-level activities che, secondo Kieran (2004), consentono agli allievi sia di cogliere come l'algebra possa rappresentare un fondamentale strumento nella risoluzione di problemi, sia di sviluppare in maniera naturale abilità manipolative, visto che il significato guida le manipolazioni che essi si trovano ad operare (Brown, 2004).

Per realizzare questi obiettivi abbiamo progettato ed implementato, in classi del biennio della scuola secondaria superiore, un percorso di introduzione alla dimostrazione in ambito aritmetico, che si sviluppa sul lungo termine e che parte da semplici attività di modellizzazione ed interpretazione per arrivare a proporre agli allievi attività di formulazione di congetture e costruzione di dimostrazioni. Il percorso si sviluppa attraverso 6 principali fasi, caratterizzate dalle seguenti attività: (1) Traduzioni da linguaggio verbale a linguaggio algebrico e viceversa; (2) Studio delle relazioni che intercorrono tra proprietà di una data espressione algebrica e proprietà delle variabili in essa contenute; (3) Analisi della veridicità/falsità di enunciati in ambito aritmetico e giustificazione delle risposte fornite; (4) Esplorazione di situazioni numeriche, formulazione di congetture e relative dimostrazioni; (5) Analisi di strategie dimostrative; (6) Costruzione delle dimostrazioni di teoremi assegnati. Le diverse attività del percorso vengono proposte alle classi attraverso momenti di lavoro individuale, momenti di lavoro a piccoli gruppi e discussioni collettive, coordinate dai docenti, sui risultati di tali attività.

2. Il costrutto M-CA$_{CE}$ per l'analisi del ruolo dell'insegnante

Uno dei principali risultati del lavoro di ricerca presentato nel precedente paragrafo è il costrutto teorico M-CA$_{CE}$, da noi elaborato con l'obiettivo di analizzare le azioni dell'insegnante durante le attività di classe, caratterizzando in particolare i ruoli chiave che un docente dovrebbe svolgere con l'obiettivo di favorire, da parte degli allievi, lo sviluppo delle competenze che intervengono in un approccio efficace alla costruzione di ragionamenti via linguaggio algebrico.

Il quadro teorico all'interno del quale il costrutto si è delineato è costituito da due terne di componenti. La prima terna si riferisce alle componenti teoriche da noi individuate per l'analisi dello sviluppo di processi di pensiero via linguaggio algebrico: (a) il modello di didattica dell'algebra come strumento di pensiero proposto da Arzarello, Bazzini e Chiappini (2001), che, in particolare, hanno messo in luce come l'attivazione di frames concettuali ed il passaggio da un frame ad un altro costituiscano un elemento essenziale per una corretta interpretazione delle scritture algebriche via, via prodotte; (b) il concetto di pensiero anticipatorio introdotto da Boero (2001) e da lui presentato come un elemento chiave nella produzione di pensiero attraverso processi di trasformazione; (c) l'analisi teorica proposta da Duval (2006), che ha individuato nel coordinamento tra diversi registri di rappresentazione un aspetto chiave nell'apprendimento in matematica. La seconda terna di componenti teoriche si riferisce al quadro all'interno del quale ci collochiamo per l'analisi dei processi di insegnamento-apprendimento e del ruolo del docente. La prima di queste componenti è Vygotskiana: ci ispiriamo, in particolare, all'idea di Vygotsky (1978) circa l'importanza di un'istruzione mirata ad estendere la zona di sviluppo prossimale dell'allievo in modo da stimolarlo ad attivare processi interni di apprendimento, operati attraverso l'interazione con l'adulto o con compagni più bravi (anche attraverso processi di imitazione), che si concretizzano nel raggiungimento di un più elevato livello di sviluppo. La seconda componente trae ispirazione dal lavoro di Leont'ev (1977), che ha messo in luce le interrelazioni tra attività che si realizzano in un contesto sociale e sviluppo del senso dell'apprendimento che tali attività hanno l'obiettivo di promuovere, suggerendo di non tralasciare l'obiettivo fondamentale di favorire la realizzazione di una effettiva consapevolezza, da parte degli allievi, del senso delle azioni che vengono realizzate in classe. La terza componente, che a nostro parere costituisce un idoneo riferimento nello studio (di progettazione-attuazione ed analisi) dei processi di insegnamento-apprendimento finalizzati a favorire un uso efficace del linguaggio algebrico come strumento di pensiero, è il paradigma del *cognitive apprenticeship*. Tale idea è stata introdotta da Collins, Brown e Newman (1989), i quali propongono un modello di i-struzione che si rifà all'idea di apprendistato ed incorpora contemporaneamente elementi dell'istruzione tradizionale. Tale modello si pone l'obiettivo di rendere il pensiero visibile, attraverso metodi di insegnamento, che, secondo gli autori, andrebbero progettati per dare agli studenti l'opportunità di osservare, scoprire o inventare le strategie degli e-sperti nel contesto stesso in cui vengono attivate. Alcuni metodi sono mirati ad aiutare gli studenti ad acquisire solide abilità attraverso processi di osservazione e pratica guidata: il *modeling* (che richiede che un esperto esegua un compito esternalizzando i processi e le attività interne in modo che gli studenti possano osservarlo e costruire così un modello concettuale dei processi richiesti per portare a termine quel compito); il *coaching* (che consiste nell'osservazione, da parte dell'esperto, degli studenti mentre conducono un'attività, per fornire loro stimoli, supporti, feedback); lo *scaffolding* (che si riferisce sia ai supporti che l'insegnante fornisce per aiutare lo studente a portare un'attività a compimento, sia alla rimozione graduale degli stessi, indicata come *fading*, in modo che gli allievi possano arrivare a completare autonomamente il compito). Un secondo gruppo di methods è costituito da quelle metodologie progettate con l'obiettivo di aiutare gli studenti a focalizzare le loro osservazioni sugli approcci e-sperti al problem-solving e ad imparare a controllare in maniera consapevole le proprie strategie: l'*articulation* (il saper condurre gli studenti ad articolare le loro conoscenze, i loro modi di ragionare ed i loro processi di problem solving); la *reflection* (il mettere a confronto i processi di problem-solving attivati dagli studenti con quelli di un esperto o di un altro studente fino ad arrivare a confrontarli con un modello cognitivo interno della pratica esperta).

Questo quadro ci ha consentito di dare fondamento alla nostra ipotesi che i processi chiave nella produzione di pensiero via linguaggio algebrico, che si attivano in modo automatico per un esperto, devono essere e-splicitati e resi visibili al novizio in modo che quest'ultimo possa focalizzare la propria attenzione non soltanto sugli aspetti sintattici, ma anche su strategie adottate e riflessioni meta sulle azioni, appropriandosi delle prime e sviluppando, grazie alle seconde, una reale consapevolezza del senso delle attività svolte. E' in quest'ottica che abbiamo elaborato il costrutto teorico di M-CA_{CE}, delineando i caratteri essenziali dell'approccio adottato da un docente che sa porsi, durante le attività di classe, in modo da «rendere il pensiero visibile», favorendo, da parte dei suoi studenti, attraverso un processo di cognitive apprenticeship, l'acquisizione di quegli atteggiamenti e quei comportamenti che consente loro la progressiva costruzione delle competenze e delle consapevolezze necessarie per poter affrontare, in maniera efficace, le attività di costruzione di ragionamento via linguaggio algebrico. Un docente che adotta questa tipologia di approccio: (a) si pone come «soggetto che indaga», stimolando un atteggiamento di ricerca nei confronti del problema in esame, e come elemento costituente del gruppo classe nel lavoro di ricerca che viene attivato; (b) si pone come guida operativa/strategica, mediante un atteggiamento di condivisione (anziché di trasmissione) delle strategie adottate e delle conoscenze da attivare localmente; (c) cerca di stimolare e provocare la costruzione delle competenze chiave nella produzione di pensiero via linguaggio algebrico (saper generalizzare, tradurre, anticipare, manipolare, interpretare), ponendosi come «attivatore di processi interpretativi» ed «attivatore di pensieri anticipatori»; (d) si pone come guida al controllo dei significati delle scritture a cui si perviene, sia sul piano sintattico che semantico, con l'obiettivo di realizzare un armonico equilibrio tra i due aspetti; (e) si pone come guida riflessiva nell'individuazione di modelli operativi/strategici efficaci durante le attività di classe (suo compito è anche quello di esplicitare e stimolare riflessioni sugli approcci efficaci adottati dagli studenti della classe affinché questi approcci vengano individuati come modelli ai quali ispirarsi); (f) si pone, con l'obiettivo di stimolare e provocare atteggiamenti di tipo meta, come «attivatore di atteggiamenti riflessivi» ed «attivatore di atti metacognitivi», con particolare riferimento al controllo del senso globale dei processi.

3. Il nostro lavoro con insegnanti in formazione

Quanto messo in luce nel precedente paragrafo mette in evidenza che, affinché un docente sappia porsi come M-CA_{CE}, egli deve essere pienamente consapevole del senso del processo che gli è richiesto di attuare e di controllare nel suo sviluppo. L'analisi delle sperimentazioni da noi condotte ha però messo in evidenza come docenti che avevano condiviso con noi sia la progettazione del percorso didattico, sia la pianificazione della metodologia da adottare, non siano riusciti a svolgere, durante l'azione di classe, i ruoli caratterizzanti un docente che si pone come M-CA_{CE}. Per cercare di individuare le motivazioni alla base delle difficoltà incontrate da alcuni docenti è necessario porsi nel quadro elaborato da Mason (1998), che presenta l'insegnamento come «educazione alla consapevolezza». L'autore distingue tre diversi livelli di consapevolezza: (1)

awareness-in-action, che viene definita come «il potere di costruire ed agire sul piano materiale»; (2) awareness-in-discipline, che è descritta come una forma di «spostamento dell'attenzione» che si realizza attraverso l'esplicitazione della propria awareness-in-action; (3) awareness-in-counsel, che rappresenta l'auto-consapevolezza richiesta agli educatori affinché essi possano essere realmente sensibili a ciò di cui chi apprende ha bisogno affinché quest'ultimo possa costruire una propria awareness-in-action ed in-discipline.

Mason (2008) si serve del framework sui tre livelli di consapevolezza anche per descrivere le dinamiche sottese ai processi di sviluppo professionale dei docenti. Pianificare efficaci percorsi per la formazione degli insegnanti richiede di indirizzare l'attenzione dei docenti verso costrutti, teorie e pratiche che possano guidare efficacemente le loro future scelte. Condurre un insegnante attraverso un processo di formazione che possa renderlo un «buon insegnante» (Mason, 1998) richiede di fargli acquisire consapevolezze non solo sulle differenti modalità di interventi che si possono attivare in classe, ma anche sulle «sensibilità sottili» che guidano la sua azione, consentendogli di scegliere le modalità di intervento che possono rivelarsi più efficaci.

Una strada da percorrere per favorire lo sviluppo di queste consapevolezze è quella di attuare nella formazione insegnanti processi di riflessione critica, più volte indicati dalla ricerca come attività essenziali per consentire la costruzione, da parte dei docenti, di una adeguata professionalità. Mason (2002) sostiene che un insegnante che voglia imparare ad agire in modo diverso in classe, come ogni altro professionista, deve cercare di sviluppare una conoscenza attiva, pratica, che permette di reagire a stimoli in modo creativo anziché attraverso comportamenti 'meccanici', ovvero di saper agire al momento. La discipline of noticing (Mason, 2002) fa sì che il docente sia sensibilizzato ad individuare situazioni nelle quali è possibile realizzare azioni alternative per poi modificare le proprie pratiche scegliendo consapevolmente di agire in modo differente in altre simili situazioni. La valenza della riflessione critica degli insegnanti sulla pratica e soprattutto delle pratiche di condivisione di tali riflessioni tra insegnanti ed ancor più tra ricercatori ed insegnanti è sottolineata anche da Jaworski (1998, 2003, 2004, 2006), che sostiene l'importanza di adottare un approccio di inquiry (2004) allo studio dei processi di insegnamento per favorire lo sviluppo della ricerca come vero e proprio modo di essere, specialmente se praticato all'interno di una comunità nella quale i diversi membri collaborano, in quanto learners, per lo sviluppo della propria pratica.

Il modello da noi attuato per la formazione degli insegnanti è in sintonia con queste posizioni. La nostra ipotesi è infatti che l'osservazione e lo studio critico-riflessivo di processi di classe di tipo socio-costruttivo, attuato sia individualmente che all'interno di gruppi di ricerca, sia condizione necessaria perché l'insegnante acquisisca consapevolezza del nuovo ruolo che deve svolgere nella classe, delle dinamiche che si sviluppano nella costruzione matematica collettiva e delle variabili che intervengono (Malara, 2003). Per realizzare questi obiettivi, coinvolgiamo gli insegnanti in una articolata attività di analisi critica delle trascrizioni dei processi di classe e di riflessione su di essi, attraverso la metodologia delle 'Trascrizioni multicommentate' (per approfondimenti rimandiamo a Cusi-Malara-Navarra, 2011).

In questo lavoro mostreremo come queste idee siano state da noi applicate anche nell'ambito del lavoro condotto con insegnanti in formazione durante il periodo in cui erano attive le Scuole di Specializzazione per l'insegnamento secondario, mettendo in evidenza come l'approccio adottato possa ben prestarsi per le attività di Tirocinio Formativo Attivo.

In linea con le idee proposte da Mason, riteniamo che perseguire l'obiettivo di provocare nei docenti degli 'spostamenti di attenzione' che favoriscano lo sviluppo di quelle consapevolezze che determinano o meno una efficace azione di classe richieda di guidarli in attività di riflessione sulla propria pratica attraverso processi di scaffolding e di graduale fading, fornendo loro inizialmente stimoli costanti e proponendo successivamente stimoli meno diretti e meta-domande mirati a favorire la loro internalizzazione degli stimoli ricevuti in modo da potersi servire degli stessi per analizzare autonomamente la propria pratica. La nostra ipotesi è che tali stimoli possano essere forniti se le attività di riflessione sui processi di classe vengono attuate in riferimento a specifici indicatori per l'osservazione, che consentano di analizzare ed interpretare le azioni di classe attraverso precise lenti teoriche.

Per questo motivo i nostri più recenti interventi di formazione insegnanti sono così articolati: (1) momenti di studio di risultati di ricerca in educazione matematica utili alla pratica, mirati a fornire ai docenti strumenti teorici e metodologici per imparare ad interpretare mediante nuove lenti le loro azioni in classe; (2) attività di analisi di estratti di discussioni di classe, tratti da precedenti sperimentazioni da noi condotte, mirati a mettere in luce come l'uso dei costrutti teorici precedentemente introdotti consente di evidenziare aspetti di problematicità o efficacia correlati alle azioni dell'insegnante; (3) momenti di progettazione di attività da proporre nelle classi e di pianificazione della metodologia di lavoro sulla base dei costrutti teorici introdotti; e (4) fase di analisi delle attività condotte nelle classi proponendo riflessioni prodotte da una osservazione dei processi sotto le lenti teoriche fornite.

La metodologia adottata per la progettazione e l'analisi degli interventi di tirocinio durante i corsi SSIS ricalca quella appena presentata. Per motivi di spazio, ci limitiamo a presentare un esempio di una attività, relativa alla quarta fase di lavoro, condotta con una tirocinante che ha proposto in una classe alcune attività del percorso didattico di introduzione alla dimostrazione in ambito aritmetico delineato nel paragrafo 2.

4. Analisi di una attività di tirocinio: il lavoro del mentore come guida nel processo di modellizzazione della riflessione

L'attività che presentiamo in questo paragrafo si riferisce alla fase centrale del percorso didattico di introduzione alla dimostrazione via linguaggio algebrico: quella di formulazione di congetture e costruzione delle relative dimostrazioni. Assieme alle altre attività del percorso, è stata proposta ad una classe seconda liceo classico (seconda ginnasio) da una tirocinante SSIS per la classe A049. La tirocinante (d'ora in poi sarà indicata con S) ha affrontato lo studio e la progettazione del percorso con grande entusiasmo, cogliendo la necessità di attivare una metodologia di lavoro in linea con quella da noi suggerita e svolgendo efficacemente l'azione nelle classi, riuscendo spesso a porsi come M-CA_{CE}. S ha però mostrato, nell'ultima fase di lavoro, difficoltà nel servirsi delle lenti teoriche da noi fornite per riflettere sulla propria pratica. Le era stato, in particolare, richiesto di analizzare le discussioni di classe da lei condotte evidenziando: i momenti nei quali era riuscita ad assumere il ruolo di docente che si pone come M-CA_{CE}; i momenti in cui il suo approccio si discosta da quello caratterizzante un docente che si pone come M-CA_{CE}; gli effetti (positivi e/o negativi) di questo lavoro sugli alunni, in termini di competenze e consapevolezze messe in luce durante le discussioni collettive.

La nostra ipotesi è che le difficoltà manifestate da S nel servirsi del costrutto teorico M-CA_{CE} per oggettivare i processi attivati siano ascrivibili al gap che intercorre tra un'esperienza di studio teorico ed osservazione di altri ad un'esperienza di osservazione di sé. Di fronte alla richiesta, da parte di S, di aiutarla a superare queste difficoltà, abbiamo deciso di far precedere, alla fase di analisi autonoma della propria pratica, una fase di confronto dialogico con il mentore, mirata, in sintonia con il quadro prima delineato, ad attivare un processo di scaffolding per fornire ad

S gli stimoli necessari per imparare ad esplicitare ed oggettivare efficacemente i momenti salienti dei processi di classe. Le riflessioni su alcune significative discussioni di classe sono state perciò condotte assieme al mentore con l'obiettivo costante di favorire, da parte di S, lo sviluppo di una reale consapevolezza della propria azione, attraverso una sua oggettivazione mediante l'uso del costrutto teorico M-CA_{CE}.

Di seguito presentiamo un esempio del lavoro che il mentore ha condotto con l'obiettivo di stimolare il processo di 'modellizzazione della riflessione'.

La discussione oggetto dell'analisi del mentore è stata condotta in riferimento al seguente problema:

> Prendi un numero di 3 cifre con cifre consecutive strettamente decrescenti (esempio: 543); considera il numero che si ottiene da questo invertendo le cifre (es: 345); considera la differenza tra questi due numeri. Considera altri esempi. Che regolarità osservi? Prova a dimostrare quanto affermi.

Affrontare efficacemente la costruzione della dimostrazione della congettura da formulare ('la differenza risulta sempre 198') richiede di: (1) saper attivare e coordinare i frame notazione polinomiale e 'successivo di un numero' per costruire la rappresentazione del numero iniziale $(100(x+2)+10(x+1)+x)$, cogliendo la necessità di introdurre una sola variabile per esplicitare il legame tra le tre cifre del numero di partenza ed introducendo le corrette limitazione alla variabile ($0 \leq x \leq 7$); (2) saper coordinare i frame notazione polinomiale e posizionale per costruire il numero che si ottiene invertendo le cifre di quello di partenza $(100x+10(x+1)+x+2)$; (3) saper operare corrette trasformazioni sintattiche sulla differenza così costruita attivando il corretto pensiero anticipatorio relativo all'obiettivo di tali manipolazioni:

$$100(x+2)+10(x+1)+x-(100x+10(x+1)+x+2)=2\cdot 100-2=198$$

Nella tabella qui sotto riportata la colonna di sinistra contiene gli interventi della tirocinante S e di alcuni studenti (indicati con diverse lettere dell'alfabeto), quella di destra riporta i commenti del mentore (numerati), fatti in modo da evidenziare gli elementi di aderenza/contrapposizione con i caratteri del costrutto M-CA_{CE}.

Trascrizione di una discussione di classe	**Commenti del mentore**
Fase 1: la classe si confronta sulla regolarità individuata	
(1) S: Ragazzi, che regolarità avete osservato? (2) A: 98 (3) Coro: NO! 198! (4) A: Aspettate: *543-345* ... sì, 198, scusate! (5) S: Bene, tutti i gruppi sono arrivati a trovare che qualsiasi numero consideriamo in partenza, si ottiene sempre 198? (6) Coro: Sì! (7) I: Noi abbiamo fatto anche la dimostrazione!	(1) *Qui S avrebbe potuto chiedere ‘cosa intendete per 198?’ per far loro formulare meglio la congettura prodotta. Infatti 198 non è la risposta corretta alla domanda ‘che regolarità avete osservato?’*
Fase 2: Analisi della prima proposta dimostrativa	
(8) S: Bene! Adesso mi dettate quello che avete fatto? Ricordiamo: vogliamo dimostrare che preso un numero di 3 cifre consecutive decrescenti se a questo sottraiamo il numero ottenuto invertendo le cifre il risultato è 198. (9) I: Si: Noi abbiamo messo …	
S scrive sulla lavagna ciò che detta l’alunno I $100x+10y+z-(100z+10y+x)=$	
(10) S: Quindi per questo gruppo $100x+10y+z$ è il numero di 3 cifre iniziale, poi avete sottratto il numero ottenuto invertendo le cifre …	(2) *S interpreta, nel frame ‘notazione polinomiale’, in coordinamento con il frame ‘notazione posizionale’, la scrittura che il gruppo di I ha prodotto per esplicitare al resto della classe l’approccio da loro attivato. In questo modo si pone come guida operativa strategica nel favorire la condivisione delle strategie adottate e delle conoscenze da attivare localmente.*

<table>
<tr><td>(11) I: Sì, come avevamo fatto stamattina[17] per i numeri a due cifre. Poi abbiamo tolto la parentesi e abbiamo scritto:
$=100x+10y+z-100z-10y-x$

(12) S: poi dove siete arrivati?
(13) I: Poi abbiamo fatto i calcoli e abbiamo ottenuto: $99x-99z=99(x-z)$</td><td>(3) *L'allievo I mostra di aver intuito il collegamento con l'attività del mattino: è importante che sia riuscito a riconoscere la necessità di attivare gli stessi frame concettuali.*</td></tr>
<tr><td colspan="2">*S inserisce alla lavagna l'approccio suggerito dal gruppo di I ed indicato come proposta (a)*:
$a)\ 100x+10y+z-(100z+10x+y)=$
$=100x+10y+z-100z-10x-y=$
$=99x-99z=$
$=99(x-z)$</td></tr>
<tr><td>(14) S: Poi cosa avete fatto?
(15) I: Poi era finito il tempo...
(16) S: Bene, questa è una strada. Qualche altro gruppo è arrivato alla stessa conclusione, o ha provato una dimostrazione partendo da un'altra strada?</td><td>(4) *Qui S avrebbe potuto chiedere al resto della classe se il risultato ottenuto era in sintonia con la congettura prodotta. Durante l'analisi di questa discussione, infatti, un dubbio nasce spontaneo: il gruppo di I è realmente consapevole di cosa significhi dimostrare una congettura? Ha operato cioè seguendo un obiettivo o per imitazione di quanto fatto durante il mattino?*
(5) *In questo senso non svolge al meglio il ruolo di guida al controllo dei significati delle scritture cui via, via si perviene.*</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Fase 3: Analisi della seconda proposta dimostrativa**</td></tr>
<tr><td colspan="2">(17) D: Noi abbiamo fatto in un modo diverso
S scrive sulla lavagna ciò che detta l'alunno D
$100(k+2)+10(k+1)+k$</td></tr>
</table>

[17] Durante la mattinata la classe aveva affrontato, in una discussione collettiva coordinata da S, il seguente problema: «Scrivi un numero naturale di due cifre ed il numero che ottieni da questo invertendo le cifre. Calcola la differenza tra il maggiore ed il minore. Ripeti il procedimento a partire da altri numeri di due cifre. Che regolarità puoi osservare? Sapresti dimostrare quanto affermi?».

(18) D: Dove questo qua rappresenta il numero di 3 cifre decrescenti. (19) **S**: Puoi spiegarci perché? (20) D: Il $100(k+2)$ sono le centinaia, che sono quelle con la cifra più grande: $k+2$, che deve essere il numero decrescente più grande. Abbiamo messo $k+2$ perché abbiamo iniziato con la cifra più piccola nelle unità, che abbiamo indicato con k.	(6) *Difficoltà espressive da parte di D – basti pensare al termine 'numero decrescente'! - ma l'allievo ha saputo cogliere la necessità di attivare anche il frame 'successivo di un numero' per costruire, a partire dalla cifra delle unità k, quelle delle decine e delle centinaia in modo da esplicitare la relazione tra le tre cifre.* (7) *S stimola efficacemente l'esplicitazione, da parte dell'allievo dei significati sottesi all'espressione costruita.*
(21) S: Esatto, come dice D, le centinaia sono quelle che hanno la cifra maggiore tra le tre, ed inoltre nella rappresentazione $(k+2),\ (k+1),\ k$ compare la decrescenza a passi di uno tra le cifre. Mi chiedo: perché avete scelto questa rappresentazione, anziché usare $k,\ (k-1),\ (k-2)$?	(8) *S esplicita al resto della classe quanto D ha cercato di spiegare: questo è in sintonia con le tipiche azioni di un docente che si pone come guida riflessiva nell'aiutare i suoi allievi a riconoscere modelli operativi-strategici efficaci nella classe.* (9) *Corretta è anche la scelta di S di far esplicitare a D le motivazioni alla base della conversione prodotta nel rappresentare tre cifre disposte in ordine decrescente.*
(22) D: Eh, perché altrimenti non sarebbe venuto naturale. Se $k=0$, non vengono cifre positive. (23) S: Esatto, con la rappresentazione che ti ho proposto avremmo dovuto specificare $k \geq 2$.	(10) *Qui forse era il caso comunque di far precisare all'allievo l'insieme di variabilità di k, che è una cifra. Anche nel caso precedente S non ha fatto fare questa osservazione.*
(24) D: Quindi, se questo che ho dettato rappresenta il primo numero di tre cifre, dobbiamo fare la sottrazione con il secondo numero che è quello che otteniamo invertendo le cifre quindi	(11) *Anche D mostra di aver ben interiorizzato la rappresentazione polinomiale dei numeri e di saper coordinare i frame notazione polinomiale e posizionale per rappresentare il numero che si ottiene invertendo le cifre.*
S scrive sulla lavagna ciò che detta l'alunno: $100(k+2)+10(k+1)+k-100k-10(k+1)-(k+2)$	

<table>
<tr><td>(25) D: Dove quella che prima era la cifra delle unità è diventata quella delle centinaia, il $\left(k+1\right)$ rimane alle decine, e il $\left(k+2\right)$ è rimasto per le unità.
(26) C: Anche noi abbiamo fatto così.
(27) E: uguale!
(28) F: Noi abbiamo fatto come il gruppo di prima, solo che abbiamo messo $100z+10y+x$.
(29) A: noi non siamo arrivati fino a quel punto lì, abbiamo solo visto che viene sempre 198.
(30) S: Quindi rimaniamo con queste due proposte. Nella prima abbiamo messo in evidenza un 99 ... adesso propongo a D di raccontarci i passaggi successivi, in modo da iniziare a sviluppare anche la seconda proposta.
(31) D: Dobbiamo fare i conti …</td><td>(12) Anche in questa discussione un allievo, D, comincia a fare interventi ‘simili a quelli dell’insegnante’, mirati cioè ad esplicitare al resto della classe il senso dell’espressione che ha costruito. Questo testimonia il fatto che S sia riuscita a svolgere bene il ruolo di attivatore di atteggiamenti riflessivi e di atti metacognitivi.</td></tr>
<tr><td colspan="2">T scrive sulla lavagna ciò che detta l’alunno, indicandola come proposta (b):
$b)\ 100\left(k+2\right)+10\left(k+1\right)+k-100k-10\left(k+1\right)-\left(k+2\right)=$
$=100k-200+10k+10-100k-10k-10-k-2=$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(32) E: I $10k$ vanno via.
(33) G: anche i $100k$
(34) A: I k vanno tutti via.
(35) E: anche il 10 e il -10 vanno via. Per cui ci rimane …</td></tr>
<tr><td colspan="2">S scrive sulla lavagna ciò che rimane al termine delle semplificazioni, per cui la proposta (b) risulta la seguente:
$b)\ 100\left(k+2\right)+10\left(k+1\right)+k-100k-10\left(k+1\right)-\left(k+2\right)=$
$=100k-200+10k+10-100k-10k-10-k-2=$
$=200-2=$
$=198$</td></tr>
<tr><td>(36) S: Quindi direi che in questo modo la congettura che avete fatto, cioè che, dato un numero di 3 cifre decrescenti, se ad esso si toglie il nu-</td><td>(13) Sarebbe stato meglio stimolare la classe in modo che gli allievi stessi potessero arrivare a questa conclusione.</td></tr>
</table>

mero che si ottiene invertendo le cifre il risultato è 198, è stata dimostrata! E lo avete dimostrato a partire da un generico numero di 3 cifre.	
Fase 4: Riflessioni sul primo approccio alla dimostrazione della congettura	
(37) S: posso farvi riflettere ancora sulla proposta (a)? Guardiamo il risultato ottenuto... cosa sono x e z? (38) I: Le cifre delle centinaia la x, e quelle delle unità la z. (39) S: Allora, in base al testo del problema sappiamo di quanto sono distanziate queste cifre? (40) E: di due! (41) D: infatti. (42) S: allora possiamo concludere qualcosa riguardo a quel $99(x-z)$, che non abbiamo analizzato mentre i vostri compagni dettavano la loro soluzione? (43) I: Cioè, anche questa è giusta... solo che dobbiamo inserire $x-z=2$ (44) S: Come dice I, anche la proposta (a) permette di arrivare alla dimostrazione di ciò che vogliamo dimostrare. Bastava accorgersi, leggendo il risultato ottenuto, che la 'distanza' tra x e z, essendo queste le cifre associate alle centinaia e alle unità è 2. Una volta sostituito il 2, cosa accade? (45) C: Dopo risulta $99 \cdot 2 = 198$.	(14) *Molto bene! S ritorna sulla prima 'dimostrazione' per evidenziare che anche dall'espressione ottenuta si poteva ottenere il risultato atteso. Forse era il caso di sottolineare meglio che questa formalizzazione è stata fatta senza tenere conto del fatto che le tre cifre sono strettamente decrescenti. Cmq è un importante momento di tipo meta, in cui si invita la classe a riflettere sui legami tra i diversi approcci allo stesso problema.* (15) *L'allievo I (uno degli elementi del gruppo che non è riuscito a completare la dimostrazione) riesce autonomamente a cogliere l'invito di G per esplicitare il legame tra le diverse espressioni ottenute facendo riferimento all'ipotesi che il gruppo non aveva considerato.*

4.1 Alcune riflessioni sul ruolo svolto dal mentore

La discussione è stata commentata linea per linea dal mentore facendo un costante riferimento sia ai termini caratterizzanti il costrutto di M-CA_{CE}, sia ai costrutti (che fanno parte della prima terna di componenti teoriche del nostro quadro) che consentono di esplicitare i processi attivati da S e dagli studenti che intervengono nel corso della discussione. Il mentore, in particolare, alterna osservazioni relative ai processi di pensiero sviluppati dagli allievi ad osservazioni relative alla conduzione della discussione (con riferimenti specifici al particolare contenuto in esame), con l'obiettivo di aiutare S a cogliere gli effetti del suo approccio in termini di competenze e consapevolezze sviluppate e manifestate dagli studenti.

I feedback del mentore, inseriti nella seconda colonna, possono essere interpretati come interventi mirati all'interno di un processo di *scaffolding* finalizzato alla modellizzazione della riflessione. Tali interventi hanno infatti l'obiettivo di provocare quelli che Mason indica come i necessari shifts nelle strutture di attenzione per favorire una piena awareness-in-discipline relativa sia alla capacità di agire in classe, sia alla capacità di riflettere a posteriori sulla propria pratica.

Analizzando sia questo estratto che, in particolare, le riflessioni che propone il mentore è possibile evidenziare diversi obiettivi associati ai commenti prodotti dal mentore stesso, che consentono di suddividere questi ultimi in tre principali gruppi, a seconda delle diverse consapevolezze che mirano a far sviluppare:

(1) Il primo gruppo riguarda i commenti che hanno l'obiettivo di far sviluppare consapevolezze relative ai processi attivati/da attivare-stimolare negli allievi (commenti 1, 4, 7, 9, 10, 13, 14);

(2) Il secondo gruppo contiene i commenti mirati a far sviluppare consapevolezze circa i diversi ruoli, associati al costrutto M-CA_{CE}, che il docente deve cercare di interpretare in classe (talvolta il mentore evidenzia anche ruoli che non sono stati interpretati al meglio): guida operativa-strategica (commento 2); guida al controllo dei significati (commento 5); guida riflessiva (commento 8); attivatore di atteggiamenti riflessivi e di atti metacognitivi (commenti 12 e 14);

(3) Il terzo gruppo di commenti è caratterizzato dall'obiettivo di far sviluppare consapevolezze relative agli effetti del lavoro del docente in termini di competenze/consapevolezze degli studenti (commenti 3, 6, 11, 12, 15).

5. Osservazioni conclusive

Questo approccio alle attività di riflessione è caratteristico dell'intero percorso affrontato da S, che durante le fasi successive a questa è intervenuta in prima persona, proponendo sia riflessioni sul ruolo da lei svolto durante le attività di classe, sia riflessioni associate ai commenti proposti dal mentore.

Al termine dell'attività di tirocinio S ha, in particolare, commentato il lavoro svolto, riflettendo sui cambiamenti che esso ha prodotto in lei. In particolare, riconosce di aver compreso la necessità di modificare la propria pratica, sia in termini di metodologia da attivare, sia in termini di attenzione maggiore verso i propri atteggiamenti e comportamenti, sottolineando di aver colto che l'attivazione di specifici atteggiamenti e comportamenti (quelli che caratterizzano un M-CA_{CE}) favorisce il reale sviluppo di competenze e consapevolezze da parte degli allievi, come testimonia questa sua dichiarazione:

> Ritengo che un insegnante che imposti la sua attività didattica mantenendo fissi questi riferimenti possa davvero formare degli studenti che siano in grado di pensare e non limitarsi all'addestramento di studenti abili nella riproduzione di algoritmi e contenuti che rimangono per loro privi di alcun significato.

Contemporaneamente S rivela di aver colto che il processo di formazione per un insegnante non deve mai arrivare a termine, suggerendo l'importanza di condurre studi teorici a livello di ricerca in didattica della matematica per imparare sia ad agire che a riflettere meglio:

> Per poter svolgere con serietà il lavoro di insegnante non è sufficiente limitarsi allo sbrogliamento della matassa delle implicazioni che soggiacciono ai contenuti, ma è anche necessario che l'insegnante si mantenga aggiornato sugli studi di didattica che vengono continuamente svolti riguardo all'argomento che di volta in volta ci si accinge ad affrontare. La continua formazione del docente, infatti, gli permette di rifarsi a dei quadri teorici di riferimento che lo guidino nell'identificazione delle strategie da adottare affinché il suo intervento risulti efficace. L'efficacia dell'intervento didattico, inoltre, non può prescindere dall'atteggiamento con cui il docente si pone di fronte agli allievi.

Le riflessioni proposte da S testimoniano come il lavoro di riflessione congiunta condotto assieme a lei abbia potuto favorire lo sviluppo, da un lato, di una *awareness-in-discipline* relativa ad aspetti contenutistici-metodologici, dall'altro di una *awareness-in-discipline* relativa alle modalità attraverso le quali cercare di favorire il proprio sviluppo professionale.

Visti gli effetti positivi di questo lavoro, convinti dell'importanza di consentire ai futuri insegnanti di lavorare all'interno di reali communities of inquiry in un confronto continuo non solo con il mentore, ma anche con altri colleghi ed altri ricercatori, stiamo progettando ed implementando un percorso più strutturato che caratterizzerà anche i nostri interventi nei futuri Tirocini Formativi Attivi e vedrà impegnati piccoli gruppi di tirocinanti coinvolti sulle stesse attività da proporre in classe e nelle successive attività di riflessione congiunta sul proprio lavoro.

Bibliografia

Arcavi, A. (1994), Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 14 (3), pp. 24-35.

Arzarello, F., Bazzini, L., Chiappini, G. (2001), A model for analyzing algebraic thinking, in R. Sutherland et Al. (a cura di), *Perspectives on School Algebra*, Netherlands: Kluwer Publishers, pp. 61-81.

Bell, A. (1996), Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language, in N. Bednarz et Al. (a cura di), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*, Netherlands: Kluwer Publishers, pp.151-154.

Boero, P. (2001), Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving, in R. Sutherland et Al. (a cura di), *Perspectives on School Algebra*, Netherlands: Kluwer Publishers, pp. 99-119.

Brown, L. (2004), Responses to 'The Core of Algebra', in K. Stecey et Al. (a cura di), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study*, Kluwer (The Netherlands), pp. 35-44.

Collins, A., Brown, J.S., Newman, S.E. (1989), Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing and Mathematics!, in L.B. Resnick (a cura di), *Knowing, Learning, and Instruction*: *Essays in Honor of Robert Glaser*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 453-494.

Cusi, A., Malara, N.A. (2009), The Role of the Teacher in developing Proof Activities by means of Algebraic Language, in M. Tzekaki et Al., *Proceedings of PME 33*, Thessaloniki (Greece), vol. 2, pp. 361-368.

Cusi, A., Malara, N.A., Navarra, G. (2011), Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it, in J. Cai e E. Knuth (a cura di), *Early Algebrailization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives*, pp. 483-510.

Duval, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp. 103–131.

Jaworski, B. (1998), Mathematics teacher research: process, practice and the development of teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, pp. 3-31.

Jaworski, B. (2003), Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships, *Educational Studies in Mathematics*, 54, pp. 249-282.

Jaworski, B. (2004), Grappling with Complexity: Co-learning in Inquiry

Communities in Mathematics Teaching Development, in M.J. Hoines e A.B. Fuglestad (a cura di), *Proceedings of the 28th*, Bergen (Norway), vol. 1, pp. 17-36.

Jaworski, B. (2006), Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, pp. 187–211.

Kieran, C. (2004), The core of algebra: reflections on its main activities, in K. Stecey et Al., The future of the teaching and learning of algebra, *The 12th ICMI study*, Kluwer (The Netherlands), pp. 21-34.

Leont'ev, A.N. (1977), *Attività, coscienza e personalità*, Firenze, Giunti Barbera.

Malara N.A. (1999), Un progetto di avvio al pensiero algebrico: esperienze, risultati, problemi, *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*, (6), 3*, pp. 153-181.

Malara, N.A. (2003), Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project, in N.A. Pateman, B.J. Dougherty e J.T. Zilliox (a cura di), *Proceedings of PME 27*, Honululu (USA), vol.1, pp. 33-48.

Malara N.A. (2004), Formazione degli insegnanti ed avvio al pensiero algebrico, in N.A. Malara et Al., *Percorsi di insegnamento in chiave pre-algebrica: rappresentazione di problemi e di processi, segni simboli e negoziazione dei loro significati*, Bologna: Pitagora, pp. 11-36.

Malara, N.A. (2007), Approccio all'early algebra e modalità di formazione degli insegnanti, XVIII Convegno Nazionale della unione Matematica italiana, *Notiziario UMI*, 35 (1.2), inserto speciale.

Malara, N.A., Navarra, G. (2003), *ArAl Project: Arithmetic Pathways Towards Pre-Algebraic Thinking*, Bologna: Pitagora.

Mason, J. (1998), Enabling Teachers to Be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, pp. 243-267.

Mason, J. (2002), *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, London: The Falmer Press.

Mason, J. (2008), Being Mathematical with and in front of learners, in B. Jaworski e T. Wood (a cura di), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, Sense Publishers, pp. 31-55.

Vygotsky, L.S. (1978), *Mind in society: The development of higher mental processes*, Cambridge: MA. Harvard University Press.

Wheeler, D. (1996), Backwards and Forwards: Reflections on different approaches to algebra, in N. Bednarz et Al. (a cura di), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*, Netherlands: Kluwer Publishers, pp. 317-325.