“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 14, n. 24/2022, pp. 195-207 – ISSN 2038-1034

Rettangoli grigliati.
Riflessioni tra isoperimetrie in diversi contesti di apprendimento

Antonella Castellini, Domenico Di Paolo, Alfia Lucia Fazzino, Gabriella Romano

Abstract – *The “grilled rectangles”, namely brectangles drawn in a grid, have a perfect coincidence with the rectangles obtained by moving a tight string between the thumb and forefinger of the two hands proposed by Emma Castelnuovo. From this movement, which has been reproduced on squared paper during the workshop, many questions arise: how many of them are there? Do the perimeter and area of these rectangles vary? What unit of measurement do we choose? For the perimeter it is unique. Instead, for the area we have more choices. What does this fact entail? The rectangles drawn in grids of different sizes are then analyzed. The various data are calculated, tabulated and compared. Why is the perimeter always an even number? Why is the area not always an even number? When does the square form? In conclusion we look for a regularity and we try to find a formula that generalizes it. The activity is exciting at any age and allows you to introduce, or consolidate, the concepts of isoperimetry and equivalence.*

Riassunto – *I “rettangoli grigliati” ovvero disegnati in una griglia, hanno una perfetta corrispondenza con i rettangoli proposti da Emma Castelnuovo ottenuti muovendo uno spago ben teso tra il pollice e l’indice delle due mani. Da questo movimento riprodotto su carta quadrettata, possono nascere molte domande durante un laboratorio di matematica: quanti rettangoli si sono ottenuti? Perimetro e area di questi rettangoli variano? Quale sarà l’unità di misura adatta? Perché il perimetro è sempre espresso da un numero pari? Perché l’area non sempre è un numero pari? Quando si forma il quadrato? Esiste una regolarità per griglie di lato n che si può esprimere tramite una formula matematica? L’attività appassiona a qualunque età e permette di introdurre o di consolidare i concetti di isoperimetria e di equivalenza.*

Keywords – laboratory activities, rectangles, perimeter, area, manipulative activities

Parole chiave – attività laboratoriali, rettangoli, perimetro, area, attività manipolative

Antonella Castellini è Docente di scuola secondaria di primo grado, attualmente in pensione. Ha conseguito una laurea in Matematica e due master per Formatore in Didattica della Matematica. Si occupa da anni di formazione dei docenti. Autrice di numerosi articoli, tutor in diversi progetti nazionali del MIUR, collabora con gruppi di ricerca anche a livello internazionale. Tra le sue pubblicazioni: *Against problem solving by segment method* (in “EDiMaST: Experiences of Teaching with Mathematics Sciences and Technology”, 2(2), 2016, pp. 287-302) e *Poligoni stellati... e oltre. Percorso per un curricolo verticale nel primo ciclo* (in coll. con A. L. Fazzino, in ”EDiMaST: Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology”, 3(3), 2017, pp. 527-538).

Domenico Di Paolo è Docente di scuola secondaria di primo grado. Si interessa di didattica della matematica, ha seguito numerosi corsi di formazione, rivestendo anche il ruolo di tutor dei corsisti.

Alfia Lucia Fazzino è Docente di scuola secondaria di primo grado, attualmente in pensione. Ha una laurea in Matematica e un master per Formatore in Didattica della Matematica. Autrice di diversi articoli e di un sussidiario per quarta e quinta primaria. Collabora con il gruppo di ricerca azione del RMt e da anni si occupa di formazione dei docenti. Tra le sue pubblicazioni: *Poligoni stellati... e oltre. Percorso per un curricolo verticale nel primo ciclo* (in coll. con A. Castellini, in ”EDiMaST: Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology”, 3(3), 2017, pp. 527-538).

Gabriella Romano è Docente di scuola primaria da diversi anni in ambito matematico. Cultrice della tecnica origami, la utilizza per proporre attività di visualizzazione e di problem solving sia nella didattica di classe che nelle proposte di corsi di formazione rivolte ai docenti del primo ciclo di istruzione. Tra le sue pubblicazioni: *Pentaureo: dai triangoli alle stelle con la Divina Proporzione* (in coll. con A. Castellini, in B. D'Amore, a cura di, *La didattica della matematica: riflessioni teoriche e proposte concrete*, Atti del Convegno "Incontri con la matematica", n. 35, Castel San Pietro Terme (Bo), 5-6-7 novembre 2021, Convegno in videoconferenza, Bologna, Pitagora, 2021, pp. 93-94) e *Ogni realizzazione insegna geometria allegramente manipolando insieme* (in B. D'Amore e S. Sbaragli, a cura di, *Didattica della matematica e professionalità docente*, Atti del Convegno "Incontri con la matematica", n. 33, 8-10 novembre 2019, Castel San Pietro Terme (Bo), Bologna, Pitagora, 2019, pp. 64-65).

1. Introduzione

Il percorso descritto in questo contributo prende spunto da un'attività di Emma Castelnuovo fra le più conosciute e significative tant'è che Repubblica nel 1989 le dedicò un articolo dal titolo "Lo spago e la fantasia". Emma girava sempre con uno spago in tasca e in più occasioni, dialogando con alunni e docenti, tenendo il pezzo di spago, chiuso ad anello con un nodo, ben teso tra l'indice e il pollice delle mani formava una sorta di rettangolo. Allontanando o avvicinando le mani, il rettangolo diventava più basso e poi più alto. Emma faceva notare che i rettangoli erano ovviamente isoperimetrici e poi chiedeva ai suoi interlocutori cosa pensassero dell'area (Castelnuovo, 1977). Ancora oggi, a tutti i livelli scolastici, molti studenti sono convinti – almeno a un primo approccio – che anche l'area rimanga la stessa "per compensazione" (ciò che si perde in altezza si recupera in larghezza). Queste convinzioni sono ampiamente studiate in letteratura (si veda, ad esempio, D'Amore & Fandiño Pinilla, 2005) e vengono ricondotte anche a pratiche didattiche diffuse in cui molto raramente vengono proposte situazioni dinamiche come queste dove sono coinvolti due concetti fondamentali quali area e perimetro che tradizionalmente sono proposti in momenti separati del percorso scolastico e pertanto non affrontati in contemporanea. Come leggiamo in D'Amore & Fandiño Pinilla (2005):

> [..] quasi mai si mettono esplicitamente in relazione area e perimetro della stessa figura; anzi, a volte si insiste solo sul fatto che il perimetro si misura in metri (m) mentre l'area in metri al quadrato (m^2), insistendo sulle differenze e mai sulle reciproche relazioni;
>
> quasi mai si operano trasformazioni sulle figure in modo da conservare o modificare area e perimetro, creando una misconcezione sul significato che ha il termine "trasformazione"; molti studenti interpretano infatti spontaneamente con "trasformazione" una modifica che deve consistere solo in un rimpicciolimento o in un ingrandimento; nel caso (p=, S=) molti studenti rifiutano di conseguenza come "trasformazione" l'identità o una isometria (p.186).

La maggior parte delle attività di geometria nelle pratiche didattiche italiane è legata a problemi standard dove spesso prevale l'aspetto aritmetico, in cui ci si limita ad applicare formule usando i numeri forniti come dati senza alcun collegamento con la realtà (Scali, 2020). Nella situazione geometrica proposta da Emma Castelnuovo non ci sono misure (non c'è esplicitazione della lunghezza dello spago) pertanto le considerazioni che possono emergere esulano dalla mera applicazione di calcoli o formule già note.

È necessario mettere in luce che, spesso, il cosiddetto “insight” si ha quasi sempre nell’osservazione dei casi limiti, visibili ovviamente solo se è presente un movimento. Ad esempio, si può creare la situazione in cui lo spago si “schiaccia” e appare come un segmento. Davanti a questa configurazione, sebbene risulti complicato “vedere” lo spago come un caso limite di un rettangolo, diventa palese che l’area si è annullata e che, quindi, è cambiata. Solitamente, nelle esperienze informali con studenti e con insegnanti in formazione condotte dalle autrici e dell’autore del presente contributo, nella maggior parte dei casi viene attribuito un valore numerico alla lunghezza dello spago e vengono fatte variare le due dimensioni una in funzione dell’altra per poi analizzarne le relazioni (ad esempio, se il perimetro è 20u e una dimensione è 8u, l’altra sarà necessariamente 2u e quindi l’area varrà 16u^2). Procedendo così sono spesso scaturite osservazioni, riflessioni che hanno consentito l’esplorazione di altri concetti matematici oltre alle relazioni tra area e perimetro, come l’identificazione del quadrato come rettangolo “speciale” con area massima e il fatto che la variazione dell’area si può rappresentare con una funzione parabolica. Ed è a partire proprio dall’analisi e dalla riflessione di queste esperienze non strutturate, che è nata la progettazione del percorso oggetto del contributo, incentrato su rettangoli inseriti in un piano quadrettato e collegato all’attività sopracitata degli spaghi di Emma Castelnuovo. Come vedremo in seguito, il percorso è stato anche proposto a studenti di scuola primaria e ad adulti (insegnanti e non) in formazione.

2. Il percorso presentato

Il percorso che presentiamo è stato oggetto del seminario condotto dagli autori all’interno del Convegno “Quale didattica per favorire l’apprendimento” svoltosi il 23 aprile 2022 a Bologna.

Il percorso è stato presentato in modalità interattiva con i convegnisti, per la maggior parte docenti del primo ciclo. Gli insegnanti hanno partecipato attivamente e, anche in base ai loro feedback, è stata modulata l’implementazione del percorso progettato. Seguendo una metodologia di tipo laboratoriale, gli insegnanti hanno affrontato diversi compiti condividendo lenti teoriche e materiali, confrontandosi tra pari e con esperti. La condivisione di conoscenze tra insegnanti e conduttori del seminario laboratoriale è stato l’elemento caratterizzante le attività; in linea con le più attuali ricerche sul campo della formazione degli insegnanti si è cercato di instaurare un clima di collaborazione e fiducia reciproca (Jaworski & Huang, 2014).

1ª FASE: esplorazione.

L’attività è stata introdotta mostrando in slide un quadrato 3x3 (Figura 1) su un piano quadrettato ed è stato chiesto ai partecipanti di individuare tutti i possibili rettangoli con i lati paralleli alle diagonali e con i vertici sui lati del quadrato. Ai partecipanti è stato consegnato un foglio con la figura e le indicazioni in modo tale che potessero esplorare la situazione individualmente.

Figura 1 – Indicazioni fornite ai convegnisti.

Dopo qualche minuto di lavoro individuale, i conduttori hanno avviato una discussione collettiva promuovendo riflessioni sia dal punto di vista cognitivo sia dal punto di vista meta-cognitivo. Si è discusso sia sul numero di rettangoli individuati sia sui processi attivati, su quali figure fosse necessario considerare nel conteggio, sul ruolo dei “rettangoli simmetrici” e sui casi limiti. Questo primo momento collettivo si è concluso con una raccolta di domande e riflessioni senza giungere a nessuna concettualizzazione e formalizzazione.

2ª FASE: perimetri.

In questa fase si è chiesto agli insegnanti di individuare il perimetro dei rettangoli ottenuti scegliendo un’opportuna unità di misura. Nella maggior parte dei casi è stata scelta come unità di misura (u) la diagonale di un quadretto della griglia. Dopo qualche minuto si è avviata una discussione collettiva in cui emersa in modo condiviso l’isoperimetria dei rettangoli (6u) che si erano formati, anche nei casi limiti.

Ci si è quindi ricondotti all’attività dello spago di Emma Castelnuovo (Castelnuovo et al., 1977) ed è stato mostrato un pannello precedentemente predisposto dai conduttori con la griglia disegnata e con lo spago inserito (Figura 2). In questo modo si è resa intuitiva la visualizzazione dei rettangoli, il fatto che essi siano isoperimetrici e il caso limite a conferma che le diagonali ottenute erano in realtà rettangoli degeneri (lo spago si sovrappone) e non segmenti. Durante la discussione collettiva è emersa la difficoltà nella visualizzazione del caso limite e si sono condivise riflessioni sulla mancanza di attività di geometria dinamica nelle prassi tradizionali.

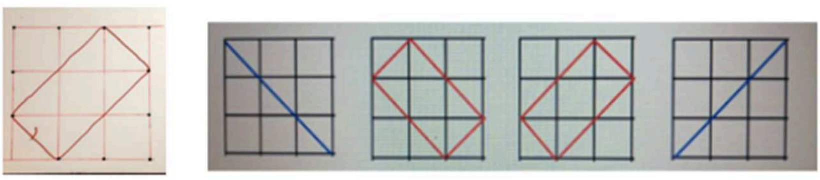


Figura 2 – Pannello con griglia e spago.

3ª FASE: aree.

Nella terza fase è stato chiesto di determinare l'area dei rettangoli rossi nel pannello mostrato (Figura 2) lasciando liberi gli insegnanti di individuare l'unità di misura ritenuta più opportuna. Dalla discussione collettiva sono emerse tre principali unità di misura, mostrate in Figura 3.

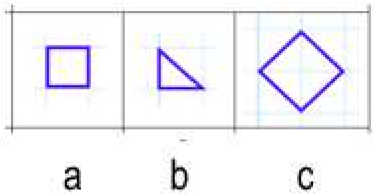


Figura 3 – Immagini delle unità di misura scelte dagli insegnanti.

Di conseguenza le misure ottenute per l'area dei due rettangoli rossi, sono rispettivamente 4a, 8b e 2c. Le riflessioni emerse durante la discussione si sono focalizzate non solo sulle relazioni tra le unità di misura e le aree ma anche sulle motivazioni che stanno alla base delle scelte e sul fatto che per il perimetro è stata scelta da tutti una stessa unità di misura.

4ª FASE: generalizzazione.

Nella quarta fase i conduttori hanno guidato gli insegnanti verso una generalizzazione in funzione del numero dei quadretti della griglia proponendo domande stimolo sul numero di rettangoli, aree, perimetri e relative relazioni prima a livello aritmetico e poi generalizzando al caso nxn.

I docenti hanno affrontato le questioni in modo consapevole, padroneggiando correttamente le relazioni emerse e mettendo in luce la presenza di quadrati nelle griglie con un numero pari di quadretti. La concettualizzazione è avvenuta discutendo sull'immagine proiettata ai docenti e riportata in Figura 4.

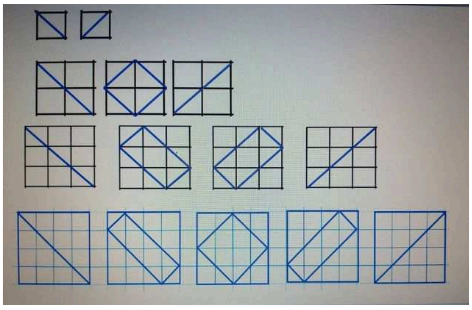


Figura 4 – Immagini proposte dal pubblico.

5ª FASE: formalizzazione

La tabella riassuntiva mostrata in Figura 5 è stata presentata solo al termine dell'intervento ed è stata discussa collettivamente focalizzando l'attenzione sulle regolarità presenti. Con tutti i presenti è stato condiviso un padlet con riportate tutte le fasi del percorso proposto e in cui i docenti potessero riportare le proprie congetture e riflessioni in riferimento a ogni fase anche nei giorni successivi.

GRIGLIA n * n		unità di misura perimetro	Quale unità di misura per l'area?		
Lato	Num. rett.				
1	0 + 2cl	2	0	0	0
2	1 + 2cl	4	4	1	2
3	2 + 2cl	6	8 8	2 2	4 4
4	3 + 2cl	8	12 16 12	3 4 3	6 8 6
5	4 + 2cl	10	16 24 24 16	4 6 6 4	8 12 12 8
6	5 + 2cl	12	20 32 36 32 20	5 8 9 8 5	10 16 18 16 10
7	6 + 2cl	14	24 40 48 48 40 24	6 10 12 12 10 6	12 20 24 24 20 12

quando si forma il quadrato?

il perimetro? varia? come?

riesci a ricavare una formula che generalizzi ?

quali regolarità osservi?

il padlet resta a vostra disposizione

Figura 5 – Griglia riassuntiva proposta al termine del seminario laboratoriale.

3. Sperimentazioni non strutturate

Il percorso descritto è stato proposto in modalità laboratoriale (Bolondi, 2006, Brunelli, Castellini, & Ferretti, 2021) in una classe quinta della scuola primaria, in un centro d'istruzione per gli adulti e in ambito di formazione per insegnanti neo-assunti del primo ciclo. La progettazione delle attività è stata comune e condivisa e ripercorre le fasi sopradescritte; l'implementazione di esse è stata adattata in base al contesto. Verranno di seguito illustrati alcuni dei momenti più rilevanti delle sperimentazioni.

In classe con i bambini

Il percorso descritto è stato proposto in una classe quinta primaria composta da 23 alunni, di cui uno con diagnosi e un Bes. L'attività è stata svolta in otto ore circa. In un primo momento è stata proposta agli studenti l'attività dello spago – rivisitata e adattata al contesto – di Emma Castelnuovo. Agli allievi è stato fornito un pezzetto di spago legato ad anello ed è stato chiesto loro di scrivere tutto ciò che si può vedere "di matematico" operando con questo artefatto.

Ogni bambino ha scritto su un foglietto tutto ciò che "vedeva"; l'attività ha da subito coinvolto in modo positivo anche da un punto di vista emotivo gli allievi che hanno partecipato motivati.

Alcune delle risposte ottenute fanno riferimento al modo in cui si possono costruire i poligoni e alle loro caratteristiche, come ad esempio:

– *posso fare poligoni muovendo le dita*
– *posso fare poligoni grandi e piccoli;*
– *posso fare un poligono con un massimo di dieci lati (come le dita);*
– *i vertici sono un po' arrotondati.*

Altri fanno riferimento ad area e perimetro, come ad esempio:

– *il perimetro e l'area non cambiano.*

E altri fanno riferimento a casi limite, come ad esempio:

– *se avessi infinite dita potrei fare un cerchio*.

Queste prime considerazioni sono state raccolte e discusse assieme agli alunni sotto la guida dell'insegnante; questo primo momento si è rivelato propedeutico per l'attività successiva.

Dopo aver realizzato le pieghe necessarie per formare una griglia 8x8 su un foglio quadrato (le griglie si sono creata tramite pieghe del foglio e non sono state disegnate) si è chiesto di disegnare tutti i possibili rettangoli, con i lati paralleli alle diagonali e con i vertici uno su ogni lato del foglio quadrato (Castelnuovo et al., 1977).

Le istruzioni sono state fornite oralmente. I dubbi e le domande si sono fin da subito concentrate sul caso limite. È stato quindi riproposto lo spago ed è stata riproposta l'attività precedente con lo spago lungo il doppio della diagonale del foglio quadrato "grigliato" con le pieghe. Grazie a questa attività gli studenti sono arrivati alla comprensione del caso limite, e, sotto la guida dell'insegnante, hanno poi trasferito quanto appreso anche nella situazione senza spago.

In linea con i principali risultati di ricerca in didattica della matematica sul tema (si veda, ad esempio, Boscolo, Crescenzi, & Scoppola, 2021, Faggiano, & Montone, 2017), anche in questo caso, l'apprendimento in ambito geometrico è stato veicolato da attività di tipo manipolativo.

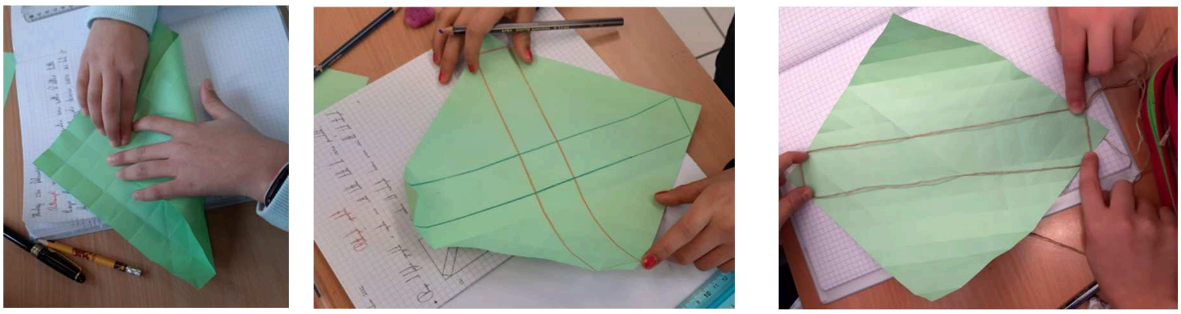


Figura 6 – Immagini delle attività manipolative dal laboratorio in classe V primaria.

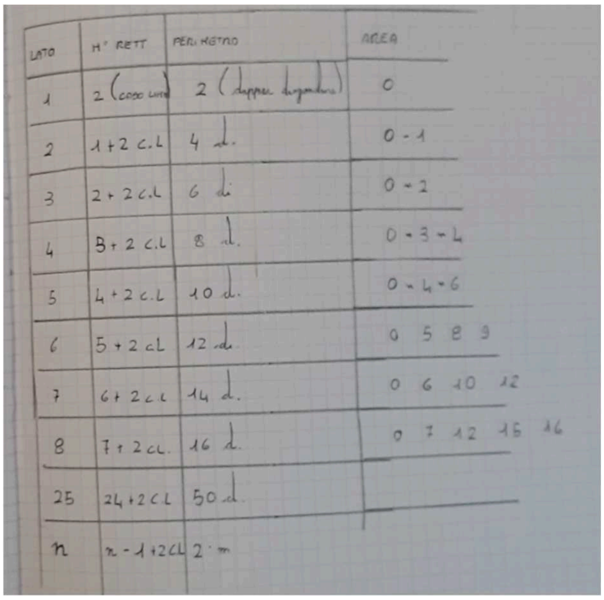
L'implementazione del percorso è progredita seguendo la progettazione; gli alunni hanno continuato a lavorare in gruppo registrando sul quaderno perimetro e aree dei rettangoli ottenuti, individuando unità di misura diverse. Poi è seguita una discussione guidata dall'insegnante, successivamente registrata sul quaderno personale attraverso la quale gli alunni sono stati guidati ad esplorare anche griglie di diverse dimensioni.

L'analisi di griglie di partenza di formato diverso ha portato alla ricerca di regolarità ed al sorgere di nuove domande del tipo:

- *Quanti rettangoli ci stanno in ogni griglia?*
- *Come generalizzare il perimetro?*
- *Si ottiene sempre il quadrato?*
- *Se no, quando si ottiene?*
- *Qual è il rettangolo con area più grande?*

Il primo fatto ad essere riconosciuto è stata la relazione tra perimetro e diagonale del quadrato della griglia.

La successiva generalizzazione emersa e la sequenza messa in luce ha riguardato la relazione tra il numero dei "quadretti del lato" della griglia (*n*) e il numero di rettangoli (*n-1* e i due casi limite). In Figura 7 è mostrata la tabella riassuntiva delle osservazioni sulle griglie di diverse dimensioni.



LATO	N° RETT	PERIMETRO	AREA
1	2 (caso lim[illegible])	2 ([illegible])	0
2	1 + 2 c.L	4 d.	0 - 1
3	2 + 2 c.L	6 d.	0 - 2
4	3 + 2 c.L	8 d.	0 - 3 - 4
5	4 + 2 c.L	10 d.	0 - 4 - 6
6	5 + 2 c.L	12 d.	0 5 8 9
7	6 + 2 c.L	14 d.	0 6 10 12
8	7 + 2 c.L.	16 d.	0 7 12 15 16
25	24 + 2 c.L	50 d.	
n	n - 1 + 2 c.L	2 · n	

Figura 7 – Griglia riassuntiva In classe con gli adulti.

Il percorso, con durata di 3 ore, è stato svolto anche presso il CPIA (Centro Provinciale per l'Istruzione degli Adulti) di Teramo con 12 alunni, di età molto varia, dai 16 anni fino a 70 anni. Per introdurre l'attività è stato utilizzato anche in questo contesto il problema dello spago di Emma Castelnuovo descritto nell'Introduzione (Castelnuovo et al., 1977). Ad ogni studente è stato dato uno spago chiuso a forma di anello e, tenendolo ben teso fra le due mani, hanno potuto osservare rettangoli che, avvicinando ed allontanando tra le mani, cambiavano dimensioni. Dopo pochi minuti di manipolazione, tutti gli studenti hanno affermato che la misura del perimetro degli infiniti rettangoli che si possono osservare non varia perché è rappresentata dalla lunghezza dello spago; molta incertezza invece è emersa sul valore dell'area. Allontanando le mani finché possibile, si sono accorti che il rettangolo diventava sempre più "stretto" fino a scomparire trasformandosi in un segmento "doppio". Ecco che si è palesato il "caso limite" che ha permesso agli studenti di rivedere le loro ipotesi, facendo comprendere e condividere che l'area varia. A questo punto, l'attività è stata implementata tramite una animazione realizzata con il software di geometria dinamica GeoGebra mediante il comando slider. Gli studenti hanno successivamente disegnato sul proprio quaderno i vari rettangoli, realizzando una tabella con quattro colonne corrispondenti alle voci lato 1, lato 2, perimetro ed area. Dai lavori con carta e penna, con GeoGebra e grazie alla tabella riassuntiva che hanno costruito, gli studenti hanno concettualizzato la variazione dell'area: dal valore "zero", quando l'altezza "non esiste" nel caso limite, va ad aumentare fino al "caso centrale", ovvero al quadrato, per poi diminuire fino all'altro caso limite di area zero. Gli studenti avevano già intuito che fra tutti i possibili rettangoli che si possono formare, il quadrato massimizzava l'area, ma il maneggiare i concetti in gioco con diversi artefatti ha concretizzato l'intuizione: fra tutti i rettangoli isoperimetrici è il quadrato che ha la massima area.

L'attività dello spago si è rivelata fondamentale per il passaggio all'attività con i rettangoli "grigliati". Dopo aver "grigliato un foglio" con griglia 3x3, si è chiesto agli studenti di individuare tutti i possibili rettangoli, con i lati paralleli alle diagonali e con i vertici uno su ogni lato del quadrato.

La consegna, data sia oralmente che tramite l'utilizzo di GeoGebra, è stata precisata al sorgere di nuovi quesiti ed ha permesso agli studenti di poter eseguire al meglio la richiesta data sul loro quaderno.

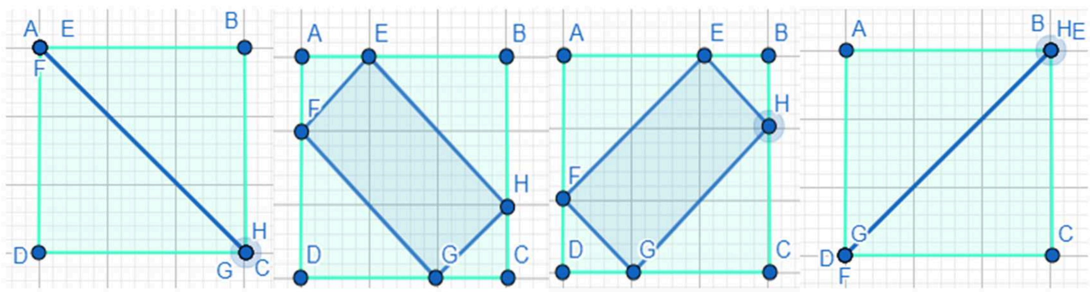


Figura 8 – Costruzioni con GeoGebra.

Lo spago ha permesso di far "vedere" i 2 casi limiti presenti all'interno della griglia che sarebbero stati difficili da individuare con il solo utilizzo del software GeoGebra. Dalla discussione in classe, gli studenti hanno constatato che mentre il perimetro ha un'unica unità di misura rappresentata dalla “diagonalina” (così hanno definito la misura della diagonale di un quadrato della griglia), per l’area potevano scegliere unità di misure diverse.

Dalla griglia 3x3 hanno generalizzato cercando di arrivare alla griglia nxn con n un qualsiasi numero naturale. Il tutto è stato riportato in un’apposita tabella con le seguenti voci: tipo di griglia, numero dei rettangoli e casi limite, perimetro e area con diverse unità di misura.

Continuando la discussione di classe, si è arrivati alla conseguente realizzazione, esplorazione e tabulazione anche di griglie di dimensioni 1x1, 2x2 e 4x4.

Dalla verbalizzazione di classe, dall’osservazione delle griglie e dall’analisi della tabella ottenuta, indicando con n il lato della griglia, si è arrivati alla scoperta di diverse regolarità quali:

- il numero dei rettangoli è pari a n-1;

- i casi limite sono sempre due, indipendentemente dal valore di n;

- la lunghezza del perimetro dei rettangoli è sempre pari a 2n, ovvero al doppio della lunghezza del lato della griglia;

- il quadrato è presente soltanto nelle griglie con n pari;

- dove vi è il quadrato, esso ha il valore dell’area maggiore tra i rettangoli presenti, confermando quello già visto con lo spago.

Nella seguente figura (Figura 9) sono rappresentati alcuni protocolli degli studenti.

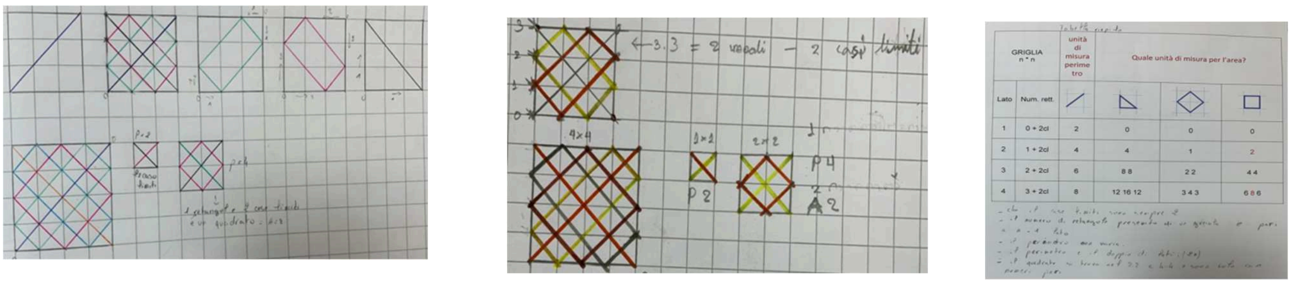


Figura 9 – Protocolli raccolti durante l’attività con gli adulti.

In classe con i docenti neo assunti

La medesima attività è stata proposta durante un percorso di formazione con due gruppi di docenti neo immessi in ruolo alla scuola primaria e dell’infanzia in provincia di Varese nell’anno scolastico 2021/22. I docenti erano 20 per gruppo e questa proposta è stata svolta in due ore. Le attività di formazione hanno avuto l'obiettivo di sviluppare la professionalità degli insegnanti per quanto riguarda le STEM; si sono condotte riflessioni su prassi didattiche con focus su attività laboratoriali e di problem solving.

L'attività dei "rettangoli grigliati" si prestava bene allo scopo di far emergere le caratteristiche di una attività laboratoriale così come previsto dalle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (MIUR, 2012). Il percorso è stata presentato in linea con la progettazione condivisa precedentemente; l'utilizzo dello spago ha avviato un brainstorming sia sulle conoscenze e sui contenuti matematici coinvolti, sia sulla sua possibile implementazione in classe. Le riflessioni e le discussioni promosse sono state incentrare sulla difficoltà che ha incontrato un gruppo nella visualizzazione del caso limite e la questione è stata affrontata sotto il punto di vista cognitivo/didattico.

La presentazione e l'implementazione del percorso, ha veicolato riflessioni prevalentemente in merito all'implementazione di attività laboratoriali e attività manipolative, e alla promozione di momenti volti allo sviluppo di competenze argomentative e di problem solving.

4. Riflessioni da un punto di vista didattico

Dal punto di vista delle pratiche didattiche, l'attività proposta offre la possibilità di esplorare nuove strade per affrontare i concetti di isoperimetria ed equivalenza, soggetti spesso a misconcezioni da parte di studenti e insegnanti (D'Amore, & Fandiño Pinilla, 2005). Le osservazioni informali delle sperimentazioni effettuate con studenti di diversa età, sebbene non strutturate, evidenziano quanto le proposte presentate siano state positivamente accolte, e che abbiano promosso motivazione-volizione (D'Amore, & Fandiño Pinilla, 2006), processi fondamentali per l'"implicazione" da parte degli allievi. In tutti i momenti analizzati, è risultato fondamentale l'aver affrontato il problema mediante attività manipolative di diversa natura. Le osservazioni effettuate sono in linea con la letteratura, in cui c'è un forte consenso sull'importanza del ragionamento visuospaziale nell'insegnamento-apprendimento della geometria e su quanto le capacità di visualizzazione e di ragionamento possono essere migliorate attraverso esperienze che coinvolgano lo studente in attività di manipolazione concreta di artefatti, anche combinate con l'uso dei software di geometria dinamica (Sinclair et al., 2017).

Il percorso può essere ovviamente adattato in base al contesto e alle finalità didattiche.

Ad esempio, se dalla consegna dell'attività dei rettangoli grigliati si elimina l'espressione "con i lati paralleli alle diagonali", si aprono altre piste. Tra queste, un bambino ha suggerito un quadrato con rotazione diversa da 45°, accorgendosi poi che è possibile disegnarne una serie sempre con i vertici sui lati della griglia di partenza. Dopo un momento esplorativo di gruppo si è giunti a lavorare sull'area di questi nuovi quadrati (Figura 10) riprendendo proprio il problema già proposto come laboratorio nel testo di Emma Castelnuovo (Castelnuovo, 1977).

È stato interessante osservare che l'area del quadrato costruito sui punti medi della griglia fosse quello di area maggiore tra tutti i rettangoli, ma, considerato tra tutti i quadrati, fosse quello di area minore. In altri contesti, si sono proposte anche altre "partenze" del percorso che hanno condotto a lavorare con parallelogrammi (Figura 10).

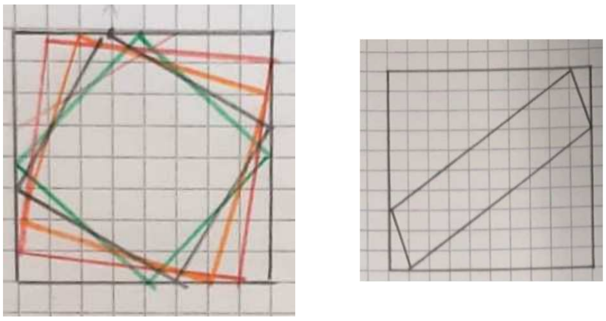


Figura 10 – Protocolli di studenti.

5. Bibliografia di riferimento

Bolondi, G. (2016). Il laboratorio di matematica nelle Indicazioni curricolari per la scuola italiana. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 39*(6 A/B), 551-562

Boscolo, A., Crescenzi, M. T., & Scoppola, B. (2021). Sulla genesi e lo sviluppo del pensiero matematico di Maria Montessori. *Rivista di Storia dell'Educazione, 8*(2), 9-23.

Brunelli, F., Castellini, A., & Ferretti, F. (2021). Il laboratorio di matematica: riflessioni e idee per pratiche didattiche efficaci. In D'Amore, B. (Ed.) (2021). *La didattica della matematica: riflessioni teoriche e proposte concrete. Atti del Convegno Incontri con la matematica* n. 35, Castel San Pietro Terme (Bo), 5-6-7 novembre 2021. Convegno in videoconferenza. Bologna: Pitagora. Pp. 33-34

Castelnuovo E. (1972). *Documenti di un'esposizione matematica "da bambini a uomini".* Torino: Boringhieri.

Castelnuovo, E. (1963). *Didattica della matematica.* Firenze: La Nuova Italia.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Area e perimetro Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. [Bologna, Italia]. 2, 165-190.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2006). Che problema i problemi! *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 6, vol. 29 A- B. 645-664

Faggiano, E., & Montone, A. (2017). Artefatti manipolativi e virtuali in sinergia per la concettualizzazione della simmetria assiale nella scuola primaria. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 40,* 181-204.

Jaworski, B., & Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: Key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM*, *46*(2), 173-188.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola* dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. Annali della Pubblica Istruzione. No. Speciale.

Scali, E. (2020). Un approccio attivo alla geometria piana nella scuola primaria. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula,* (8), 141-163.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., Villiers, M. D., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry education, including the use of new technologies: A survey of recent research. In *Proceedings of the 13th international Congress on Mathematical Education* (pp. 277-287). Springer, Cham.

Data di ricezione dell'articolo: 20 luglio 2022
Date di ricezione degli esiti del referaggio in doppio cieco: 11 e 31 agosto 2022
Data di accettazione definitiva dell'articolo: 29 novembre 2022