“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 14, n. 24/2022, pp. 153-178 – ISSN 2038-1034

Fare matematica: riflessioni su esperienze di didattica laboratoriale

David Lognoli, Carla Provitera, Manuela Saponaro, Camilla Spagnolo

Abstract – *This paper presents the development of a mathematical activity that provides an understanding of how modular recursivity can be used to solve real problems, in the perspective of National Guidelines. The activities were designed together with teachers and involved students from kindergarten, primary school and secondary school. Results highlight situations of didactic contract.*

Riassunto – *In questo contributo viene presentato lo sviluppo di un’attività laboratoriale di matematica, che consente di comprendere come può essere utilizzata la ricorsività modulare per risolvere problemi reali, nell’ottica delle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo. L’attività è stata progettata insieme ai docenti delle classi e ha coinvolto studenti della scuola dell’infanzia, della scuola primaria e della scuola secondaria di primo grado. La discussione e l’analisi dei risultati mettono in luce situazioni di contratto didattico; dalle conclusioni emerge una esplicita riflessione relativa alla necessità di progettare in verticale una didattica di tipo laboratoriale.*

Keywords – problem solving, teaching practices, modular recursivity, real situation, mathematics education

Parole chiave – problem solving, pratiche didattiche, ricorsività modulare, situazione reale, didattica della matematica

David Lognoli, Laureato in Fisica e Dottore di ricerca in “Controlli non distruttivi”, dopo alcuni anni di ricerca nell’ambito del telerilevamento di fluorescenza è da oltre un lustro Docente di matematica e scienze nella scuola secondaria di primo grado dove, oltre alla didattica laboratoriale, cura la divulgazione di un approccio attivo verso l’apprendimento della matematica. Tra le sue pubblicazioni: *I cerchi nel grano* (in “Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula”, (12), 2022, pp. 70-92) e *The Area of the Disk in Middle School Grade by GeoGebra* (in “International Journal of Emerging Technologies in Learning”, 12(11), 2017).

Carla Provitera è Docente a contratto e referente dei tirocini presso il Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria dell’Università degli Studi di Bologna. I suoi principali interessi sono la didattica laboratoriale e la sperimentazione di buone pratiche didattiche nella scuola primaria e dell’infanzia. Tra le sue pubblicazioni: *Il quadrato è rettangolato e il cerchio è tondato. Esperienze di geometria nella scuola dell’infanzia* (in B. D’Amore, a cura di, *Didattica della matematica come attività di ricerca in aula*, Atti del Convegno ”Incontri con la matematica”, n. 36, Castel San Pietro Terme (Bo), 21-22-23 ottobre 2022, Bologna, Pitagora, 2022, pp. 51-52) e *L’autoefficacia e le emozioni verso la matematica dei futuri insegnanti di scuola dell’infanzia e primaria* (in coll. con A. Ciani, F. Ferretti, A. Lemmo, A. Maffia, in “Ricerche di Pedagogia e Didattica”, 14(3), 2019, pp. 143-160).

Manuela Saponaro, Laureata in Matematica e già Docente di Matematica e Fisica nella scuola secondaria di secondo grado, è da oltre un lustro Docente di Matematica e Scienze nella scuola secondaria di primo grado. I suoi principali interessi riguardano la didattica laboratoriale, la didattica inclusiva e la didattica per competenze. Tra le sue pubblicazioni: Matematica in città (in coll. con L. Del Chiaro, E. Taranto, G. Zito, in B. D’Amore, a cura di, *Didattica della matematica come attività di ricerca in aula*, Atti del Convegno ”Incontri con la matematica”, n. 36, Castel San Pietro Terme (Bo), 21-22-23 ottobre 2022, Bologna, Pitagora, 2022, pp. 147-148).

Camilla Spagnolo è Ricercatrice di Didattica della Matematica presso la Libera Università di Bolzano e Docente a contratto presso l'Università degli Studi di Bologna. I suoi principali interessi di ricerca riguardano l'interpretazione dei risultati delle prove standardizzate ai fini della ricerca in didattica della matematica, i processi di argomentazione in matematica, la didattica per competenza e la formazione insegnanti. Tra le sue pubblicazioni: *The role of metaphors in interpreting students' difficulties in operating with percentages: A mixed method study based on large scale assessment* (in coll. con C. Giberti, G. Santi, in "European Journal of Science and Mathematics Education", 11(2), 2023, pp. 297-321) e *Where do students focus their attention on solving mathematical tasks? An eye tracker explorative study* (in coll. con R. Capone, A. Gambini, in *Proceeding of PME 44*, Khon Kaen, Thailand, 19-22 July 2021, 2022, pp. 84-92).

1. Introduzione e quadro teorico

Elemento chiave del percorso di formazione di ciascuno studente per l'apprendimento della matematica è il *laboratorio di matematica* (Castelnuovo, 1963; Bolondi, 2006).

I tradizionali percorsi di insegnamento della matematica sono invece fortemente strutturati. La ricerca e l'esperienza attestano che questo porta a risultati spesso insoddisfacenti sia per insegnanti, che per studenti (Spagnolo et al., 2021; Giberti et al., 2023). Tenendo come riferimento i traguardi delle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo, occorre riportare al centro gli obiettivi generali; per farlo diviene necessario attuare cambiamenti sul curricolo individuando i nuclei fondanti a partire dai quali scegliere e progettare contenuti e metodi. Si manifesta la necessità di pensare a un *curricolo verticale* per la matematica. Tale necessità deriva dalle caratteristiche specifiche dell'apprendimento della matematica e della disciplina stessa (Fandiño Pinilla, 2008).

La matematica non si impara per contemplazione. Il fatto che il coinvolgimento attivo del discente sia una componente essenziale di ogni sano processo di insegnamento-apprendimento è oggi un dato certo (Castelnuovo, 2008). In matematica, tuttavia, questo è anche strettamente legato alla natura della disciplina stessa. Questa idea è profondamente radicata nella tradizione della ricerca italiana in didattica della matematica (Muller, 2001; Isoda, 2004; Henderson et al., 2005; Bolondi, 2006; Arzarello et al., 2013), fin dal lavoro pionieristico di Emma Castelnuovo (Castelnuovo, 1963). Emma Castelnuovo ha formulato l'idea iconica, che ha esemplificato anche con la propria personale azione di insegnante, che è l'intera classe che deve essere un laboratorio di matematica: in essa devono essere disponibili materiali per la sperimentazione e la costruzione.

Il laboratorio non ha bisogno di avere un suo spazio fisico dedicato; tuttavia, deve avere un suo tempo ben definito, una sua fisionomia che lo distingua dal consueto orario scolastico. Qualunque forma esso assuma, deve riuscire a coinvolgere gli studenti.

Nel periodo della pandemia e della formazione a distanza, molti insegnanti hanno abbandonato la didattica laboratoriale perché non avevano esperienza specifica. L'approccio di Emma Castelnuovo, però, è adatto anche alla didattica a distanza (Spagnolo et al., 2022).

Quali sono gli strumenti che un insegnante ha oggi a disposizione per aiutare i suoi studenti a fare matematica? Il termine "laboratorio" sembra promettere di cambiare e forse rompere le catene di contratti didattici taciti o espliciti che tra le mura della scuola legano studenti, insegnanti, istituzioni, famiglie... Per individuare su quali argomenti, con quali strumenti, con quali metodologie un insegnante può provare a fare laboratorio nel particolare contesto in cui svolge la sua attività, è opportuno fissare alcune caratteristiche del laboratorio di matematica.

La risoluzione di problemi è una delle attività maggiormente affrontate nei curricula scolastici.

D'Amore e Fandiño Pinilla (2006, p. 6) affermano che "risolvere problemi e saper scegliere come comportarsi in situazioni problematiche sembra essere un veicolo eccellente per la formazione di concetti" e, dunque, per l'apprendimento. Di fronte a una situazione nuova e stimolante, lo studente potrebbe trovare nuove soluzioni e strategie che vanno ad arricchire il proprio bagaglio personale, a cui attingere in futuro.

Risolvere un problema di matematica, e in particolare un "word problem", è un'attività complessa. Un "word problem" è

> [...] un testo (tipicamente contenente informazioni quantitative) che descrive una situazione assunta familiare per il lettore e che pone una domanda quantitativa, alla quale si può dare una risposta attraverso operazioni matematiche eseguite a partire dai dati forniti nel testo o dedotti in altro modo (Greer et al., 2002, citato da Zan, 2017, p. 46).

L'attività laboratoriale descritta nei prossimi paragrafi (il paragrafo 4 è dedicato alla scuola dell'infanzia, il paragrafo 5 è dedicato alla scuola primaria e il paragrafo 6 è dedicato alla scuola secondaria di primo grado) è stata progettata a partire da un word problem. Il problema è stato declinato rispetto ai diversi gradi scolastici coinvolti, insieme agli insegnanti delle classi coinvolte nella sperimentazione.

2. Impianto della ricerca

All'attività hanno partecipato studenti provenienti da differenti gradi scolastici e differenti regioni. In particolare hanno collaborato al progetto 6 insegnanti con 10 classi.

In totale sono stati coinvolti 230 studenti così suddivisi:

– Scuola dell'infanzia (età 4-5 anni): 38 studenti di una scuola di Bologna e 37 studenti di una scuola di Cesenatico;

– Scuola primaria: 20 studenti di una scuola di Reggio-Emilia (classe III);

– Scuola secondaria di primo grado: 45 studenti di una scuola di Brindisi (una classe I e una classe II) e 90 studenti di una scuola di Firenze (due classi I, una classe II e due classi III).

La sperimentazione è durata circa 3 ore per ciascuna classe. Gli studenti hanno risolto word problem (Greer et al., 2002) progettati in verticale con l'obiettivo di comprendere come può essere utilizzata la ricorsività modulare per risolvere problemi reali. In particolare, partendo da un obiettivo comune, l'attività che descriveremo è pensata in verticale per differenti livelli scolastici e strutturata in modo tale da poter coinvolgere studenti dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria di primo grado. Il processo di risoluzione di problemi, come si vedrà nei paragrafi successivi, è stato affrontato in modo laboratoriale coinvolgendo gli studenti dapprima individualmente e poi in maniera collaborativa.

Specifichiamo, inoltre, alcune delle caratteristiche fondamentali del laboratorio di matematica che abbiamo utilizzato per strutturare la nostra proposta (Muller, 2001; Isoda, 2004; Henderson et al., 2005; Bolondi, 2006; Castelnuovo, 2008; Arzarello et al., 2013).

In un laboratorio ci sono cose da capire: dati, fatti, situazioni da osservare, studiare, riprodurre, sistemare. Gli studenti entrano in laboratorio perché vogliono capire qualcosa (coinvolgimento personale).

In un laboratorio gli studenti partono dal problema, non dalla sua soluzione. Questo è un punto particolarmente cruciale per noi matematici. Il punto finale di ogni ricerca matematica è la costruzione di una teoria formale, possibilmente generale, cristallina ed essenziale nella sua organizzazione logico-deduttiva, di cui tutte le situazioni concrete che incontriamo sono solo casi particolari, ma questo è il punto di arrivo del lavoro dei matematici, del lavoro in matematica, e non può mai essere il punto di partenza per i nostri studenti (Castelnuovo, 2008). Quando si impara, quando si scopre, quando si cerca di capire, c'è anche un lavoro da fare che non può essere delegato ad altri (coinvolgimento epistemologico).

Non è possibile sapere a priori di quali strumenti avremo bisogno per capire la situazione proposta e rispondere alle domande (approccio di indagine).

Inoltre, in un laboratorio, il lavoro non è mai solo individuale. La collaborazione tra persone diverse può avvenire a molti livelli e in molte forme, ma questo può avvenire solo lavorando su problemi concreti, che coinvolgono gli studenti e l'insegnante come sfide reali (coinvolgimento sociale).

Nel lavoro di laboratorio non esiste una linea di demarcazione netta tra teoria e pratica: ogni osservazione fatta sul campo, ogni situazione concreta può diventare il punto di partenza per una costruzione teorica (intreccio operativo di teoria e pratica).

Nel laboratorio, tutto ciò che gli studenti fanno può contribuire a dare un senso, anche gli errori, e contribuisce a costruire il significato del corpo di conoscenze all'interno del quale si lavora (valorizzazione dell'errore).

Per risolvere i problemi posti dalle situazioni concrete di laboratorio, l'intuizione si unisce al rigore, l'immaginazione al metodo, l'inventiva alla manualità. Questo è particolarmente importante per la matematica: il ragionamento matematico è così formativo, così importante, così "bello" perché non è logica astratta da software di calcolo simbolico ma "logica in atto" (attivazione di tutte le risorse personali).

L'attività matematica richiede anche una capacità di visualizzazione che deve essere sviluppata con gli strumenti appropriati e il laboratorio è un luogo per farlo.

Il docente dovrebbe pertanto (i) pianificare percorsi idonei a promuovere le costruzioni matematiche degli studenti; (ii) creare un ambiente che favorisca l'esplorazione e la formulazione di congetture; (iii) facilitare l'interazione e la condivisione delle idee; (iv) prevedere possibili processi di pensiero degli studenti e loro reazioni a particolari domande; (v) fronteggiare sviluppi del discorso matematico che divergono da quello previsto.

Tali caratteristiche sono fondamentali anche per evitare misconcezioni o atteggiamenti riconducibili a situazioni di contratto didattico.

3. Descrizione del problema

La progettazione della nostra proposta è partita da una riflessione comune (tra insegnanti e ricercatori): per realizzare un'attività laboratoriale il docente deve fare scelte forti e coraggiose, deve lavorare soprattutto su domande difficili valorizzando sia il processo e favorendo l'emergere di domande (invece di fornire risposte), sia valorizzando i contributi di tutti (anche parziali) e non solo il prodotto finale.

Lo scopo dell'attività progettata è quello di indagare le azioni degli studenti a partire da un problema di ricorsività modulare. In particolare, la ricorsività modulare è stata affrontata a partire dal 7 e da situazioni reali. Le attività, come vedremo nel seguito, hanno portato gli studenti a una generalizzazione.

L'attività laboratoriale è stata pensata in linea con le Indicazioni Nazionali del primo ciclo (MIUR, 2012). Nel seguito riassumiamo i riferimenti specifici per ciascun livello scolastico.

Per quanto riguarda la Scuola dell'Infanzia abbiamo fatto riferimento alla Premessa e ai Traguardi della Scuola dell'Infanzia, in particolare:

> [...] le stesse routine […] svolgono una funzione di regolazione dei ritmi della giornata e si offrono come una base sicura per nuove esperienze […]
>
> Ha familiarità sia con le strategie del contare e dell'operare con i numeri sia con quelle necessarie per eseguire le prime misurazioni di lunghezze, pesi e altre quantità.

Per quanto riguarda la Scuola Primaria abbiamo fatto riferimento agli Obiettivi e ai Traguardi della Scuola Primaria, in particolare:

> Eseguire la divisione con resto fra numeri naturali; individuare multipli e divisori di un numero.
>
> Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
>
> Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.
>
> Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.

Mentre per quanto riguarda la Scuola Secondaria di primo grado abbiamo fatto riferimento agli Obiettivi e ai Traguardi della Scuola Secondaria di primo grado, in particolare:

> Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, quando possibile a mente oppure utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e i fogli di calcolo e valutando quale strumento può essere più opportuno.
>
> Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per prendere decisioni.
>
> Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.

> Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati e produce argomentazioni in base.

Nel seguito descriviamo l'attività laboratoriale declinata per ciascun livello scolastico e analizziamo alcuni protocolli per ciascun segmento scolastico.

Le attività hanno coinvolto 75 studenti della scuola dell'infanzia (38 di una scuola di Bologna e 37 di una scuola di Cesenatico), 20 studenti di scuola primaria (di una scuola di Reggio-Emilia) e 135 studenti di scuola secondaria di primo grado (45 di una scuola di Brindisi e 90 di una scuola di Firenze), per un totale di 230 studenti. La sperimentazione è durata circa 3 ore per ciascuna classe.

4. Scuola dell'Infanzia

Nei paragrafi 4.1. e 4.3. descriviamo l'attività progettata e declinata per la scuola dell'infanzia e nei paragrafi 4.2. e 4.4. analizziamo i relativi protocolli.

4.1 Descrizione dell'attività laboratoriale

Trovare una situazione comune ai tre ordini di scuola a cui poter dare significato e capace di attivare ragionamenti negli alunni e nelle alunne, è stato il motivo alla base dei problemi proposti formulati tenendo conto della grande e significativa differenza di età. Le esperienze proposte vogliono essere un esempio di laboratorio così come viene descritto nelle Indicazioni Nazionali del 2012 *inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo*.

Nella scuola dell'Infanzia ogni giornata è scandita da routine che si ripetono, routine importanti in cui i bambini e le bambine scoprono, si esprimono si confrontano "*(…) le stesse routine (…) svolgono una funzione di regolazione dei ritmi della giornata e si offrono come una base sicura per nuove esperienze (…)"* (MIUR, 2012).

La routine che segue il momento dell'accoglienza del mattino nelle scuole coinvolte (e in molte altre) è quella del calendario dove, a partire dai tre anni, si indica il giorno della settimana, si segnano le presenze/assenze per poi contarle, registrarle, si ordinano e si confrontano le quantità, si registrano particolari eventi e/o il tempo meteorologico: sono tutte situazioni ben organizzate nello spazio e nel tempo che poi vengono riprese per essere interpretate sulla base soprattutto del conteggio. Molte sono le ricerche in didattica della matematica che da tempo ci dicono che fin da piccoli i bambini contano oggetti (D'Amore, 2002) pronunciando i numeri naturali almeno fino al 6 (talvolta ne dimenticano qualcuno, ma intuendo comunque la successione). Questo però non significa che abbiano compreso come contare e perché contare. È fondamentale quindi proporre e variare situazioni di quotidianità a cui dare significato affinché le routine non siano solo ripetizioni di gesti.

Anche in questo ordine di scuola è da tenere sempre in considerazione il richiamo alla differenza fra esercizio ripetitivo in cui si applicano delle regole e problema in cui si presentano situazioni non standard, in cui si attiva la ricerca di strategie diverse, in cui l'errore è motivo di confronto e di discussione, in cui gli spazi si modificano e diventano funzionali all'attività.

La situazione problematica pensata è stata proposta al mattino proprio durante il momento del calendario al posto delle solite richieste (ad esempio: Che giorno è oggi?) e questo è stato un motivo che ha attirato l'attenzione di tutti i bambini e le bambine abituati a soddisfare gli insegnanti con la ricerca di date e numeri.

Il *problema* concordato in continuità con i successivi ordini di scuola è stato il seguente:

Oggi in sezione sono presenti 14 bambini e 8 bambine. Oggi è il 23 marzo. Fra una settimana che giorno sarà?

4.2 Analisi e discussione dei protocolli dell'attività laboratoriale

In questa sezione vengono analizzati e discussi alcuni protocolli degli studenti basati sull'oralità. Un primo insegnante ha pronunciato il testo più volte, mentre un secondo insegnante registrava le risposte e annotava gli sguardi, i movimenti, le parole pronunciate a voce troppo bassa.

La prima osservazione registrata è che nessun bambino ha posto domande e tanto meno ha considerato il dato inutile espresso in numeri.

L'azione principale è stata quella di cercare il calendario, recarsi davanti ad esso e andare ad individuare il giorno nel mese di marzo fissandolo con il solito "segnalino": questo sarebbe stato per tutti il punto di partenza.

Un altro dato importante è stata l'immediata associazione fra il termine settimana inteso come periodo ciclico regolare e 7 giorni.

Le risposte dei bambini e delle bambine vengono sotto riportate fedelmente insieme alle interazioni dell'insegnante. Tali frammenti di conversazione permettono di individuare le diverse strategie utilizzate.

> *Il conteggio dei sette giorni avviene a partire dal 23 con risultato finale 29.*
> Bambino 1: Bisogna contare 7 giorni… quindi andiamo a teatro il 29.

In questo tipo di risposta abbiamo sia l'idea del conteggio come successione sia l'idea del procedere in avanti in questa particolare e finita linea dei numeri.

> *Il conteggio dei sette giorni avviene tenendo conto (sicuramente senza consapevolezza) che il giorno è fatto di ventiquattro ore, a partire quindi dal 24 marzo.*
> Bambino 2: No, hai sbagliato devi contare con il "salto" quindi 1, 2, 3… arriviamo al 30 marzo.

Come rinforzo di questa strategia abbiamo anche bambini che propongono di contare sul calendario tenendo la "conta" con le dita o altri oggetti. Interpretiamo questa azione sia come rinforzo sia come azione associata ad un gesto e quindi come verifica.

> *L'attenzione è concentrata esclusivamente sull'associazione tra il numero 7 e il significato di settimana.*

> Bambino 3: Non sono convinto perché qui vedi [indica il numero 27] qui c'è il 7 che vuol dire una settimana e quindi forse ci andremo in questo giorno.

Tale convinzione, emersa più volte, potrebbe far pensare ad un lavoro intenso e forse eccessivo e poco flessibile sulla settimana come intervallo fatto da sette giorni. Il laboratorio come luogo privilegiato nella costruzione delle conoscenze, consente di prendere la parola con facilità per sostenere il proprio punto di vista. Infatti un bambino contraddice il proprio compagno con queste parole:

> Bambino 4: Bisogna contare i giorni che passano e non il numero.

Un'altra risposta che è stata data più volte è relativa alla gestione della settimana sul calendario. I bambini e le bambine fanno molte esperienze *sul* calendario e *con* il calendario, un artefatto che aiuta a sviluppare i concetti di durata e di successione, che invoglia l'utilizzo di simboli facendo perdere di vista il concetto di ricorsività del modulo 7 (D'Amore, 2002).

Non a caso abbiamo ritrovato ragionamenti di questa tipologia:

> Bambino 5: Scusa maestra ma tu hai detto che dopo una settimana si ricomincia da capo.

I bambini contano privilegiando il giorno, quindi arrivati alla domenica tornano indietro.

Interessante la discussione di alcuni alunni che distinguono la ricorsività della settimana dalla ricorsività dei numeri Naturali. *Disponendo i numeri naturali in fila in ordine crescente si può, partendo dal primo, raggiungere un numero qualsiasi aggiungendo ogni volta 1: si forma così la successione dei numeri naturali. Questo processo che si ritrova nel processo di conta, caratterizza l'approccio ricorsivo* (Sabena, Ferri, Martignone, Robotti, 2019).

> Bambino 6: Ma cosa dici…la settimana è fatta di 7 giorni e poi si ricomincia con il nome lunedì, martedì. mercoledì…, i numeri invece vanno avanti e quindi si arriva al 30.

5. Scuola Primaria

Nel paragrafo 5.1. descriviamo l'attività progettata e declinata per la Scuola Primaria e nel paragrafo 5.2. analizziamo i relativi protocolli.

5.1. Descrizione dell'attività laboratoriale

La sperimentazione è continuata nella scuola primaria: è stata coinvolta una sola classe terza per impossibilità ad entrare in interagire con altre classi a seguito della situazione sanitaria di novembre 2021. La classe resasi disponibile, eterogenea nei livelli di apprendimento, è abituata a lavorare in gruppo e, secondo quanto afferma l'insegnante, affronta i problemi senza timori e ansie.

Il testo proposto è stato consegnato in cartaceo a ciascuno dei 5 gruppi formati con la sola indicazione di incollarlo su un foglio su cui scrivere soluzione e spiegazione. La situazione si ispira a una situazione realmente accaduta e per questo ben accolta dall'insegnante. Anche in questo caso, il tema principale è stata la ricorsività.

Di seguito si riporta il testo del problema; dal punto di vista linguistico non sono emerse difficoltà tra gli alunni coinvolti:

Il fratello di Letizia che ha 7 anni, durante le vacanze di Natale si è rotto un piede e l'ortopedico lo ha ingessato. Martedì 8 febbraio si è recato dal medico che lo ha trovato molto bene. Gli ha rimosso il gesso e fissato un appuntamento di controllo fra 3 mesi. In quale giornata la segretaria ha fissato l'appuntamento per il bambino? Spiega come hai fatto a risolvere il problema.

5.2. Analisi e discussione dei protocolli dell'attività laboratoriale

La discussione di questo paragrafo si sofferma sui lavori di gruppo che l'insegnante ha formato dopo una preliminare riflessione individuale.

Di seguito analizziamo 4 protocolli che mettono in luce un atteggiamento studiato e interpretato da tempo dalla ricerca in didattica della matematica: la presenza di numeri nel testo genera la convinzione che tutti i dati presenti nel testo di un problema debbono essere utilizzati e combinati attraverso delle operazioni.

> In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico (Brousseau, 1986).

In tutti e quattro i protocolli c'è l'abitudine consolidata nel testo a cerchiare i dati numerici, a cancellare il dato inutile e a evidenziare la domanda. La soluzione presenta un format identico composto da dati che non sembrano chiarire la situazione, da un'operazione, da una risposta e da una spiegazione che descrive l'operazione svolta.

Tutti i gruppi comprendono che la frase "*controllo fra tre mesi*" ha come esito il mese di maggio, tuttavia non si pongono il problema del corrispondente numero nel mese di maggio. Nessuno richiede un calendario per verificare, anzi viene ritenuto uno strumento che può essere utilizzato solo da alunni con disturbi specifici dell'apprendimento come misura compensativa (un solo alunno).

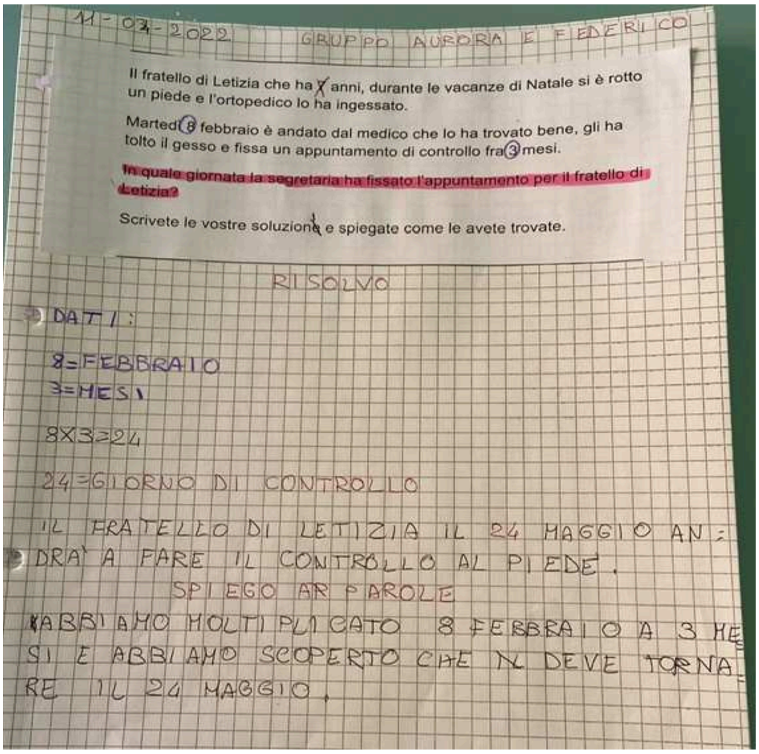

Figura 1 – Esempio di protocollo dell'attività per la scuola primaria: primo gruppo, classe III

Nel dialogo con l'insegnante gli alunni del gruppo 1 (il lavoro di gruppo è esplicitato nel protocollo in Figura 1) esplicitano la necessità di fare un'operazione che potesse avere come risultato un numero maggiore di quelli presenti nel testo. Fra le 4 l'unica è la moltiplicazione che ha come prodotto 24 maggiore sia di 3 sia di 8.

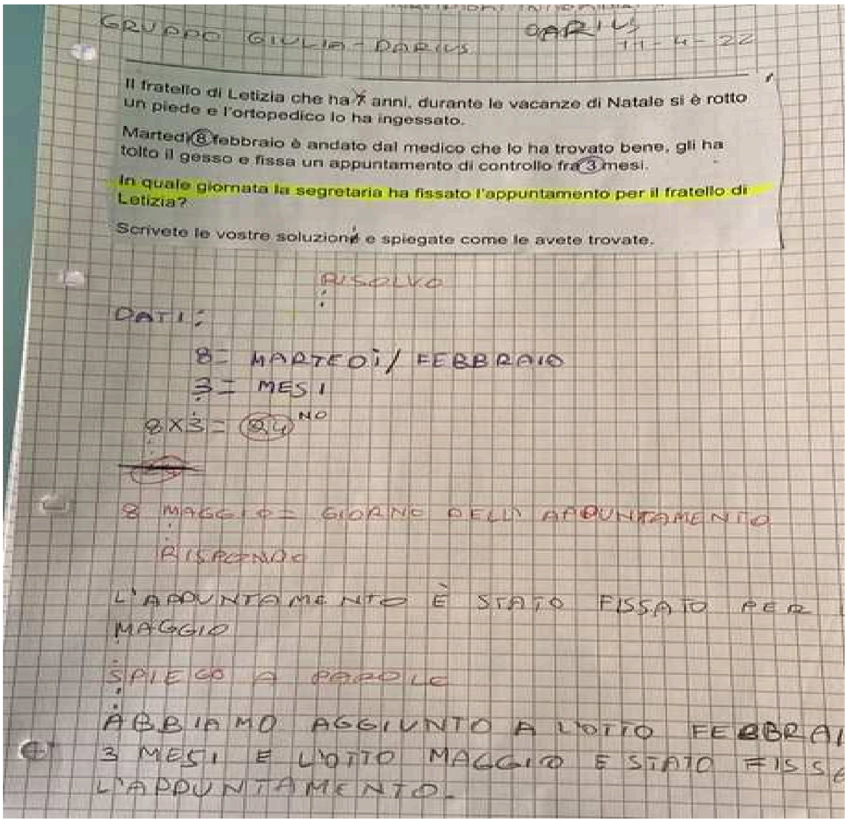

Figura 2– Esempio di protocollo dell'attività per la scuola primaria: secondo gruppo, classe III

Il protocollo (Figura 2) mostra un atteggiamento simile al precedente. Nel dialogo tra insegnante e alunni è evidente un ripensamento, che fa sperare in una revisione e controllo della situazione: emerge il coraggio di lasciare l'errore e di cerchiarlo in rosso e di tentare un'altra strada evidentemente più adatta alla domanda posta.

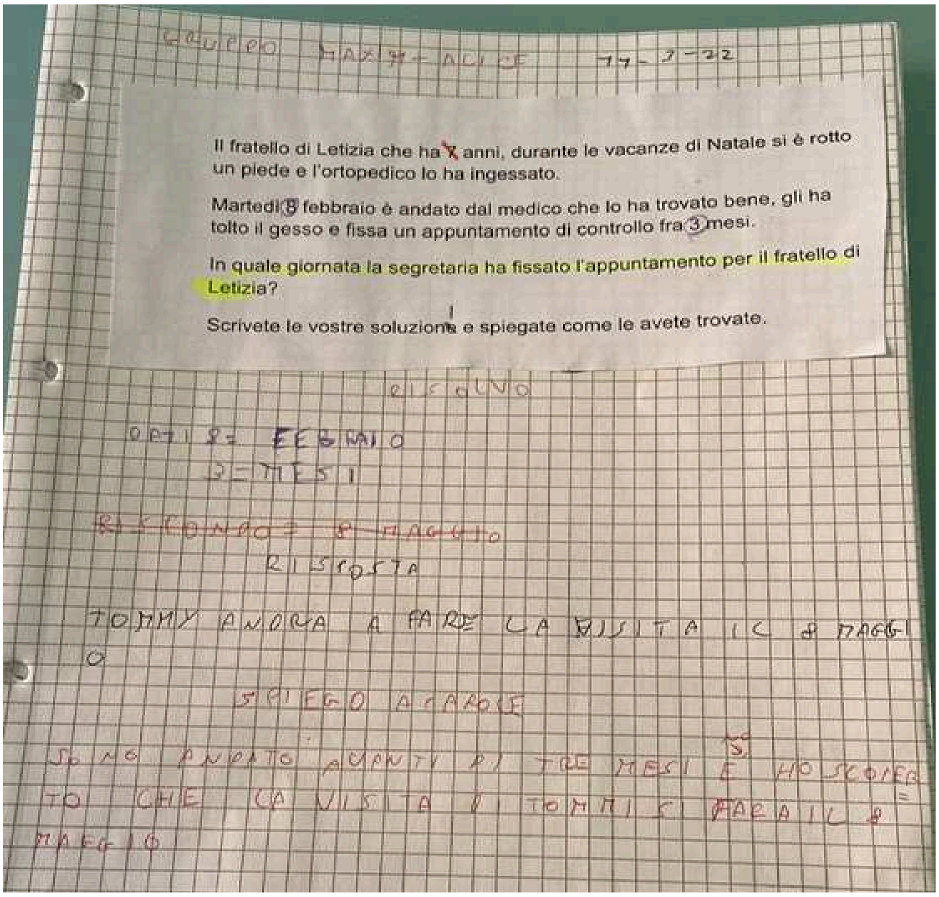

Figura 3 – Esempio di protocollo dell'attività per la Scuola Primaria: terzo gruppo, classe III

La risoluzione del protocollo in Figura 3 appare sbrigativa: ciò che si può cogliere dalla frase "*Sono andato avanti di tre mesi"* senza porsi delle domande per verificare a quale giorno della settimana corrisponde l'8 maggio, riconduce all'atteggiamento diffuso in tutti e quattro i protocolli: la risposta rappresenta l'atto finale di un problema.

Infine nel protocollo presente in Figura 4, ciò che colpisce è la strategia utilizzata: la somma, mette in evidenza il ragionamento fatto. Il 2, il 3 e il cinque hanno un significato ordinale in quanto indicano la posizione dei mesi nell'anno. È l'unico che spiega il ragionamento fatto.

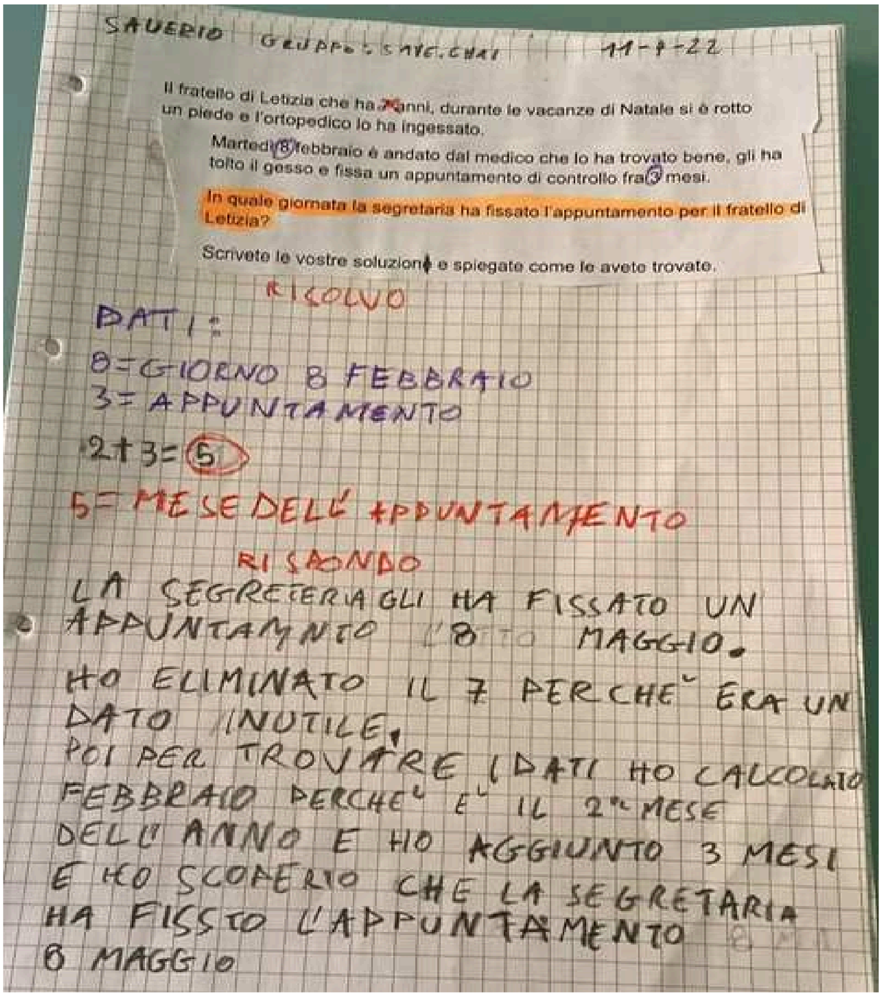

Figura 4. Esempio di protocollo dell'attività per la Scuola Primaria: quarto gruppo, classe III.

6. Scuola Secondaria di primo grado

Nel paragrafo 6.1. descriviamo l'attività progettata e declinata per la scuola secondaria di primo grado e nel paragrafo 6.2. analizziamo i relativi protocolli.

6.1 Descrizione dell'attività laboratoriale

Una situazione problematica equivalente ma adeguata al diverso grado scolastico è stata proposta alla scuola secondaria di primo grado a partire da due word problem:

- la lampada da cambiare;
- la punizione per i gemelli terribili.

Entrambi i testi presentano un ampio contesto narrativo che fa riferimento alla didattica dell'errore di Gianni Rodari, da una parte il professor Mathematicus, calco del professor Grammaticus (Rodari, 1964); dall'altra Marco e Mirco, i gemelli terribili (Rodari, 2012).

I problemi sono stati consegnati in schede (Figura 5), con la consegna di dover essere svolti sulla scheda stessa, sfruttando eventualmente anche il retro. Il testo del problema "La lampada da cambiare", a sinistra in Figura 5, era riprodotto a colori; il testo del problema "la punizione per i gemelli terribili" era riprodotto in bianco e nero per l'impossibilità di disporre di immagini a colori nelle circostanze in cui è stato assegnato alla classe. Gli studenti hanno affrontato i problemi in coppia o in gruppi da tre.

Nome:____________________ Cognome:________________ | Classe

Nome:____________________ Cognome:________________

Nome:____________________ Cognome:________________

LA LAMPADA DA CAMBIARE.

L'anno scolastico volge al termine e il professor Mathematicus decide di festeggiare organizzando un aperitivo con i colleghi: la professoressa Anglicas, il professor Grammaticus, la professoressa Trahas, la professoressa Ibericas, etc.

Il professor ha organizzato una cena al bordo della piscina e per l'occasione ipotizzando che tra una lettura dantesca, un brano del Don Chisciotte, un pezzo al violino, una equazione la serata procederà ben dopo il tramonto ha disposto intorno alla recinzione della piscina un lungo filo di luci colorate.

Le luci sono di tre colori e si alternano esattamente come nel disegno. Due luci celesti, tre luci verdi, due luci rosse, due luci celesti, tre luci verdi, due luci rosse e così via fino al termine del filo. La prima luce della fila proprio come nello spezzone del disegno è celeste.

Collegato il filo alla alimentazione elettrica il professor Mathematicus lo accende e legge sul pannello di controllo che alcune lampade sono guaste e devono essere sostituite. Le lampade guaste sono la 64esima, la 258esima e la 3257esima.

Per non alterare la successione dei colori dovrà sostituire ogni lampada con una corrispondente del medesimo colore. Se la lampada guasta fosse celeste dovrà usare una luce celeste, se fosse verde verde e rossa se rossa. Le lampade lungo il filo sono numerate e facilmente trova la loro posizione, abbagliato dal sole non può però capirne il colore e deve quindi scoprirlo con le informazioni che ha.

Aiuta il professor Mathematicus a scoprire il colore della 64esima luce, della 258esima luce e della 3257esima.

Di che colore farà luce la lampada posta in 64esima posizione?

Di che colore farà luce la lampada posta in 258esima posizione?

Di che colore farà luce la lampada posta in 3257esima posizione?

Racconta in dettaglio come hai trovato la risposta.

Nome:____________________ Cognome:________________ | Data

Nome:____________________ Cognome:________________

LA PUNIZIONE PER I GEMELLI TERRIBILI

Marco e Mirco, i due gemelli terribili, hanno fatto uno dei loro brutti scherzi alla bidella.

Il consiglio di classe, infuriato, decide di sospenderli dalle lezioni per cinque giorni.

Ai discoli viene però offerta la possibilità di svolgere un lavoro utile a tutta la scuola come sanzione disciplinare alternativa. Nella pausa primaverile la scuola sarà ristrutturata e Marco e Mirco dovranno decorare la nuova fascia di carta da parati che sarà usata come battiscopa.

Il professor Mathematicus ha deciso che la fascia dovrà essere decorata con una precisa alternanza di simboli geometrici come in figura: prima due triangoli, poi tre quadrati, quindi due cerchi, poi di nuovo due triangoli poi tre quadrati, quindi due cerchi e così via fino al termine. I primi due simboli della serie dovranno essere due triangoli.

Ai ragazzi sono consegnati pezzi di fascia di differenze lunghezza, che andranno ordine in modo poi da rispettare la successione dei simboli come se la fascia fosse unica.

Il primo pezzo inizia dalla posizione 1. **Che simbolo dovranno disegnare nella prima posizione?**

Il secondo pezzo inizia dalla posizione 66. **Che simbolo dovranno disegnare nella 66esima posizione?**

Il terzo pezzo inizia dalla posizione 258. **Che simbolo dovranno disegnare nella 258esima posizione?**

Il quarto pezzo inizia dalla posizione 3257. **Che simbolo dovranno disegnare nella 3257esima posizione?**

Motiva la risposta con argomenti matematici.

Figura 5 – Testi dei due problemi per la Scuola Secondaria. A sinistra "La lampada da cambiare", con immagini a colori. A destra "La punizione per i gemelli terribili", immagini in gradazioni di grigio.

Entrambi i testi operano dentro una sequenza di modulo 7, il modulo base è però nascosto sia dalla successione (2, 3, 2 dei sotto-elementi da cui è composto il modulo stesso), sia dalla lunghezza della sequenza complessiva, 16 nel primo problema, 20 nel secondo problema. Per scelta entrambe le sequenze complessive mostrate nei disegni non sono multiple di quella fondamentale.

Nel secondo testo, assegnato ad altre classi posteriormente che fossero raccolti gli svolgimenti del primo problema, è presente una domanda aggiuntiva, relativa al simbolo posto nella prima posizione, che aveva l'obiettivo di rimuovere ogni ambiguità circa la continuità della sequenza complessiva e verificare che eventuali rinunce fossero conseguenti comunque a una non lettura del problema che proponeva un testo articolato e di media lunghezza.

6.2. Analisi e discussione dei protocolli dell'attività laboratoriale

Possiamo osservare l'effetto della domanda presente in Figura 5 (a destra) nell'esempio di protocollo riportato in Figura 6, dove gli alunni dichiarano appunto di aver "provato a indovinare" eccetto che nella prima domanda. Di un certo interesse anche l'autocorrezione che contiene contemporaneamente sia l'attenzione al registro linguistico, l'espressione "sparato a caso" non è adeguata secondo loro al contesto scolastico.

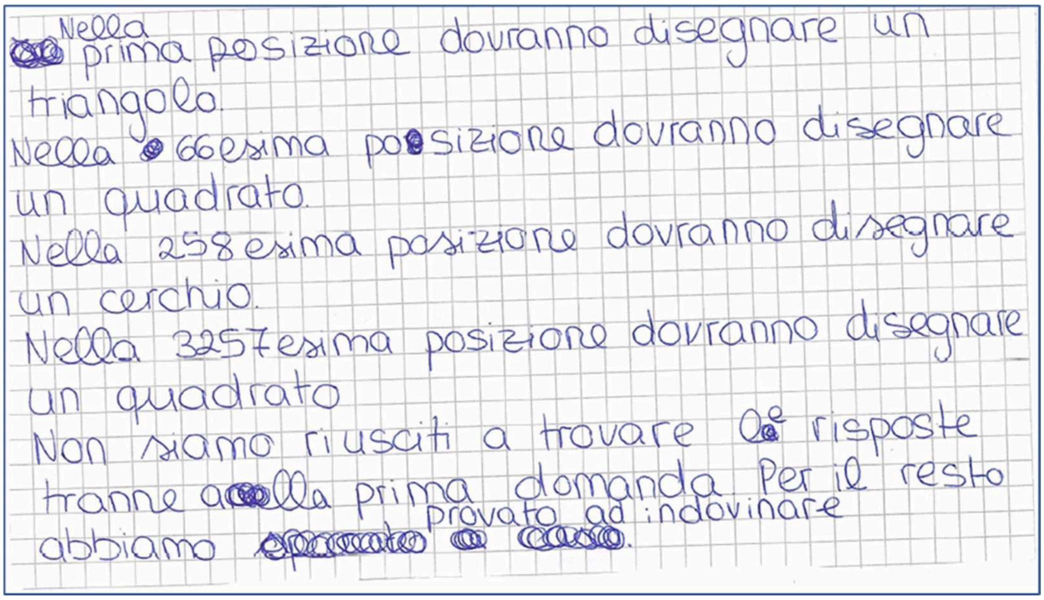
Nella prima posizione dovranno disegnare un triangolo.
Nella 66esima posizione dovranno disegnare un quadrato.
Nella 258esima posizione dovranno disegnare un cerchio.
Nella 3257esima posizione dovranno disegnare un quadrato
Non siamo riusciti a trovare le risposte tranne alla prima domanda. Per il resto abbiamo provato ad indovinare.

Figura 6 – Esempio di protocollo di scuola secondaria: una risposta al problema "La punizione per i gemelli terribili". Nel testo possiamo leggere: "Non siamo riusciti a trovare le risposte tranne alla prima domanda. Per il resto abbiamo provato a indovinare". Nella parte cancellata e poi corretta vi era scritto "sparato a caso".

La presenza di sotto sequenze additive (2, 3, 2) nascoste dentro la sequenza principale emerge in alcuni protocolli di entrambi i problemi. In particolare alcuni studenti, per fortuna un piccolo numero, cercano dalla sotto sequenza di prevedere il risultato finale apparentemente estendendo una ricorsività. In Figura 7 a) è riportato un protocollo in cui a partire dall'osservazione dei primi due casi si associa immediatamente all'essere pari o dispari della posizione il colore della lampadina. La deduzione è ovviamente precipitosa e infondata, frutto di un approccio frettoloso al problema, in cui del resto sono evidentemente possibili tre casi. Si tratta comunque di un approccio sperimentale alla situazione problematica. Un altro approccio sperimentale è riportato nella immagine b) della Figura 9 in cui gli studenti definiscono loro una sotto sequenza arbitraria di 4 elementi che permette di campionare il modulo che osservano, di 16 luci, di cui non osservano l'arbitrarietà nel troncamento. Questo tentativo di soluzione è poi corretto nel metodo ma appunto muove da una premessa errata. La soluzione proposta nella immagine c) termina con una fuga verso l'incontrovertibile dato sperimentale "Ma dobbiamo ricordarci che c'è sempre una lampadina non funzionante (GRIGIA)" dall'altra però viene mostrato un tentativo confuso di associare la ricerca della risposta a un qualcosa di simile ai criteri di divisibilità.

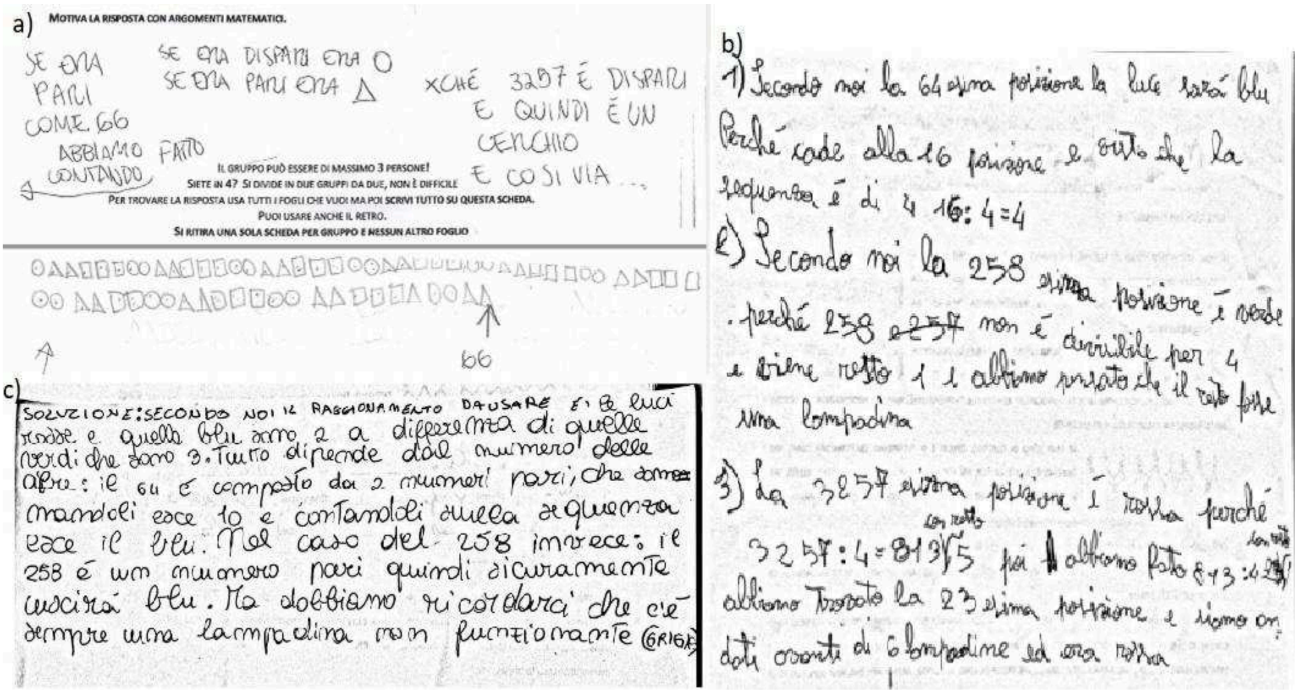

Figura 7 – Esempi di protocolli di scuola secondaria: alcuni approcci sperimentali alla situazione problematica. Nella immagine a) un protocollo in cui si associa la forma dell'ennesimo simbolo geometrico a essere in posizione pari o dispari; nella immagine b) viene identificato arbitrariamente un modulo 4; nella immagine c) nuovamente si accenna nuovamente alla condizione pari.

L'immagine c) nella Figura 7 può essere una paradigmatica spia delle difficoltà che sottendono questi tentativi: nello specifico gli studenti mostrano di non aver acquisito che eseguendo una divisione quando il divisore contiene fattori primi diversi tra 2 e 5 si crea una ricorsività del resto che non ha una periodicità decimale. Un altro protocollo, in Figura 8, mostra in maniera più esplicita un ulteriore tentativo di soluzione che non tiene conto come nel sistema di numerazione decimale i resti non abbiano sempre periodicità 10. Anche i riferimenti all'essere "pari" o "dispari" presenti nei protocolli a) e c) di Figura 7 erano associati alla ricorsività dei resti nelle divisioni. L'insieme di questi protocolli evidenzia due misconcezioni (D'Amore & Sbaragli, 2005) legate ai seguenti temi:

- la differenza tra scomposizione in fattori primi e scomposizione additiva;
- la relazione tra il sistema di numerazione posizionale decimale e la ricorsività dei resti nella divisione.

Anche in questo caso emergono alcuni aspetti legati al contratto didattico: i contenuti matematici utili alla risoluzione dei problemi sono stati affrontati negli anni precedenti e gli alunni fanno riferimento a conoscenze apprese recentemente (come solitamente accade quando si risolvono esercizi, Figura 8).

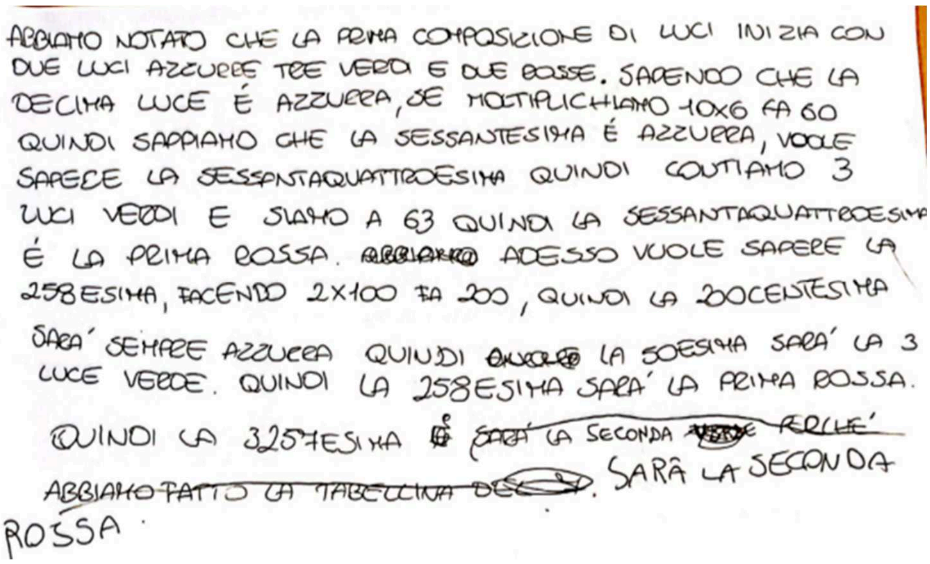
ABBIAMO NOTATO CHE LA PRIMA COMPOSIZIONE DI LUCI INIZIA CON
DUE LUCI AZZURRE TRE VERDI E DUE ROSSE. SAPENDO CHE LA
DECIMA LUCE É AZZURRA, SE MOLTIPLICHIAMO 10X6 FA 60
QUINDI SAPPIAMO CHE LA SESSANTESIMA É AZZURRA, VUOLE
SAPERE LA SESSANTAQUATTROESIMA QUINDI CONTIAMO 3
LUCI VERDI E SIAMO A 63 QUINDI LA SESSANTAQUATTROESIMA
É LA PRIMA ROSSA. ADESSO VUOLE SAPERE LA
258ESIMA, FACENDO 2X100 FA 200, QUINDI LA 200CENTESIMA
SARÁ SEMPRE AZZURRA QUINDI LA 50ESIMA SARÁ LA 3
LUCE VERDE. QUINDI LA 258ESIMA SARÁ LA PRIMA ROSSA.
QUINDI LA 3257ESIMA ~~SARÁ LA SECONDA PERCHÉ~~
~~ABBIAMO FATTO LA TABELLINA DEL~~. SARÁ LA SECONDA
ROSSA.

Figura 8 – Esempio di protocollo di scuola secondaria: un protocollo in cui si affronta, senza sistematicità e in maniera intuitiva, la relazione tra il sistema di numerazione posizionale decimale e la ricorsività dei resti nella divisione.

La maggior parte degli studenti (Figura 9) ha affrontato i problemi cercando (talvolta con successo) un modulo che coordinasse il testo con le immagini, ovvero procedendo per tentativi.

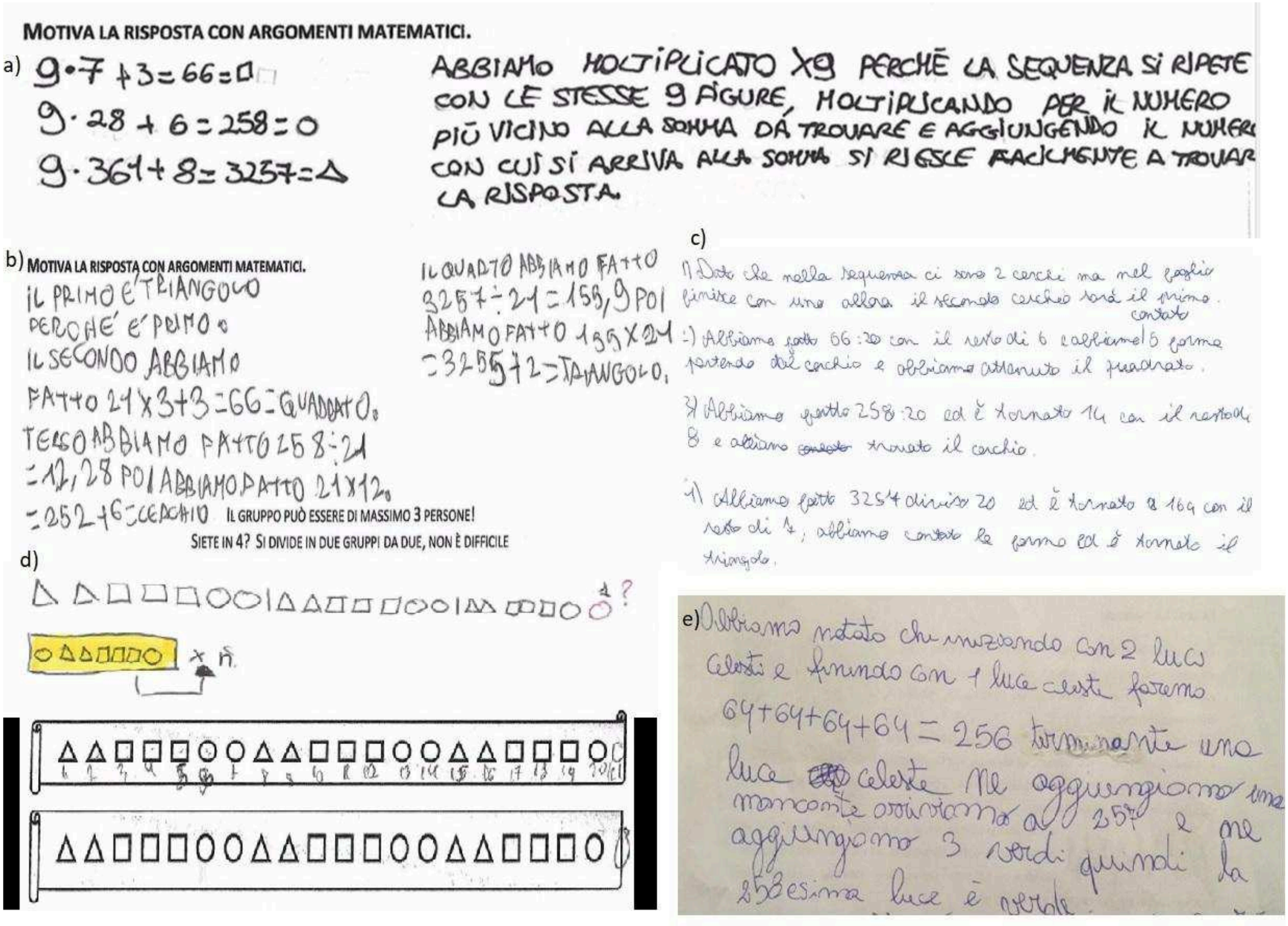

Figura 9 – Esempio di protocollo di scuola secondaria: individuazione del modulo a confronto tra alcuni protocolli. Le immagini a), b), c), d) si riferiscono al problema "La punizione dei gemelli terribili"; l'immagine e) si riferisce al problema "la lampada da cambiare". Nella immagine a) un protocollo in cui viene individuato il modulo 9 invece che il modulo 7; nella immagine b il modulo individuato è 20; nella immagine c) il modulo individuato è 21; nella immagine e) è 64; nella immagine d) sono riportati tre esempi di individuazione del modulo sulla figura (modulo 7 in alto, modulo 21 al centro e in basso).

Procedendo per tentativi non tutti gli studenti sono arrivati alla risposta corretta, talvolta anche a causa di ostacoli legati alla comprensione del testo. In particolare in Figura 9 a), c), e) sono raffigurati esempi di protocolli errati. Nell'immagine 9 a) la scelta è caduta su 9; nell'immagine 9 c) su 20 (ossia sulla sequenza incompleta proposta in figura); mentre nella Figura 9 e), riferita al problema "La lampada da cambiare", il modulo è riferito a 64, corrispondente alla prima posizione attesa nonché multiplo dei 16 elementi mostrati. Alcuni esempi di protocolli corretti sono mostrati nelle immagini 9 b) e d): nei protocolli mostrati in posizione d) possiamo vedere, nella immagine in alto, come sia stato completato il disegno e poi individuato il modulo 7.

Tra i protocolli corretti, procediamo confrontando le differenti strategie messe in atto dagli studenti; tali strategie sono state anche oggetto di discussione in classe.

Il primo approccio (che consiste nella ripetizione del modulo base della successione, come mostrato in Figura 10), ha permesso di trovare la soluzione fino alla sessantaquattresima posizione. Questo approccio non ha portato a un ragionamento generalizzato che permettesse di ricavare la risposta a prescindere dalla rappresentazione della sequenza. Nella Figura 10 a) sono stati sfruttati i colori per ripetere la sequenza nella medesima disposizione grafica (alto-basso) dell'immagine fornita con il testo, mentre nella Figura 10 b) le sequenze sono disposte per riga allineando i simboli con un primo tentativo di sistematizzare la procedura. Siamo, in questo caso, di fronte a una procedura che mostra una certa analogia con la ripetizione delle tabelline per "litania".

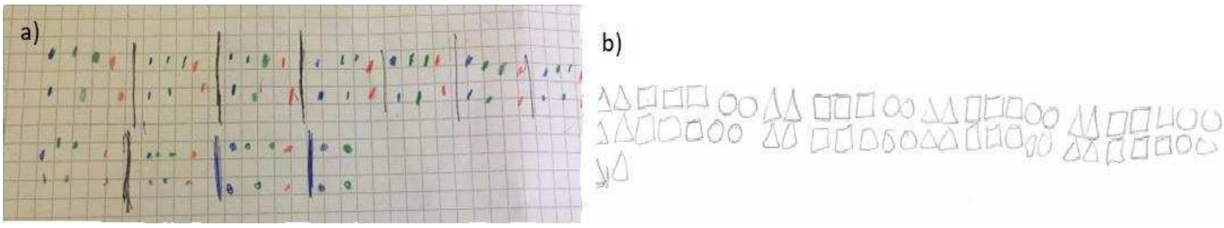

Figura 10 – Esempio di protocollo di scuola secondaria: esempi di ripetizione grafica della sequenza fondamentale. Nella immagine a) un protocollo riferito al problema "La luce da cambiare"; nella immagine b) un protocollo riferito al problema "La punizione dei gemelli terribili".

Un'altra strategia utilizzata dagli alunni è stata quella di procedere con una addizione ripetuta, talvolta con l'aiuto della calcolatrice. La Figura 11 riporta un esempio in cui procedendo con la somma di 7 si avanza verso la posizione per poi completare aggiungendo gli elementi mancanti. Questo metodo è analogo alla procedura iterativa *while … return* di molti linguaggi di programmazione che permette di implementare qualunque algoritmo nella programmazione informatica (Böhm & Jacopini, 1966): gli studenti sommano 7 e verificano se hanno raggiunto o superato la posizione richiesta poi correggono aggiungendo o togliendo i singoli elementi e rispondono alla domanda.

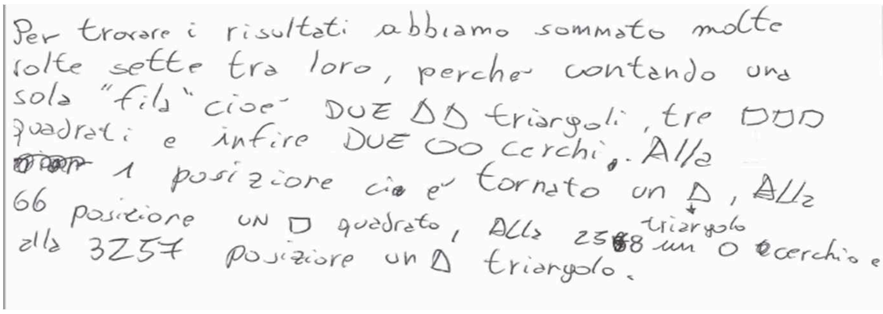

Figura 11 – Esempio di protocollo di scuola secondaria: un protocollo in cui è utilizzata la strategia di addizione ripetuta riferito al problema "La punizione dei gemelli terribili".

Qualche alunno ha "semplificato" la strategia introducendo la moltiplicazione e poi convergendo verso la posizione cercata per addizione o per sottrazione (Figura 12).

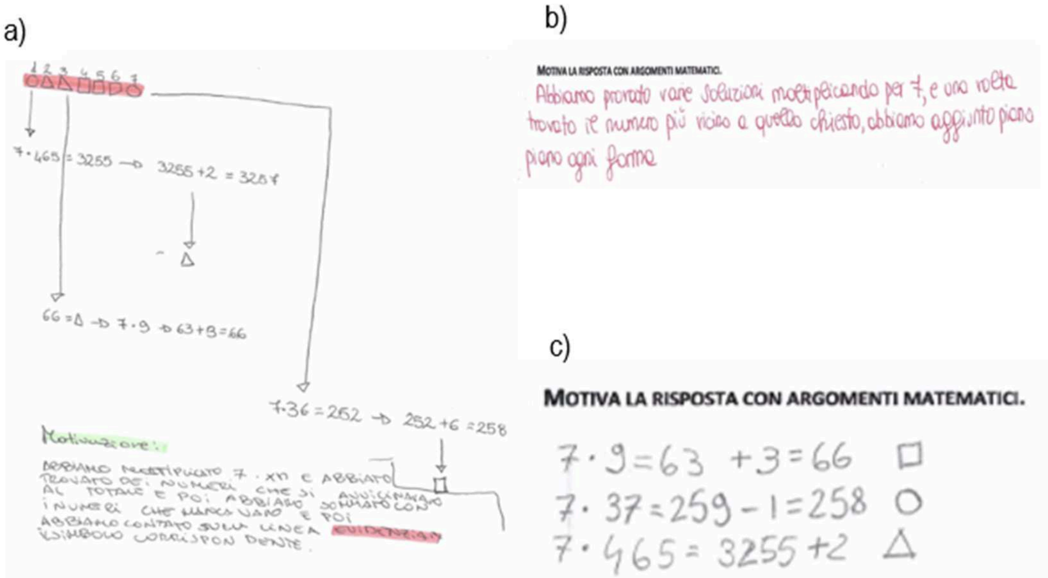

Figura 12 – Esempi di protocolli di scuola secondaria: alcuni protocolli basati sulla moltiplicazione per la soluzione del problema "I gemelli terribili". Nella immagine a) una chiara spiegazione dell'uso della moltiplicazione completata poi dall'addizione per raggiungere la posizione richiesta nel testo; nella immagine b) la stessa procedura illustrata per sinteticamente a parole; nella immagine c) una procedura a base moltiplicativa in cui la convergenza alla posizione richiesta è ottimizzata riducendo il valore del numero da aggiungere o sottrarre.

La Figura 12 a) mostra un esempio di strategia grafica. Nel protocollo le soluzioni sono state trovate procedendo per moltiplicazione e poi individuando sulla sequenza opportunamente numerata il “resto” da aggiungere. La medesima strategia è sinteticamente illustrata a parole nella immagine 12 b). La Figura 12 c), mette in luce una misconcezione relativamente all’uso del simbolo “=“, ma propone però un’importante ottimizzazione della procedura. In particolare, quando la posizione cercata è più vicina al multiplo di 7 superiore si sceglie di sottrarre. Gli studenti che hanno utilizzato questa strategia si sono posti anche la problematica della ottimizzazione nella ricerca delle soluzioni. Un protocollo basato sulla moltiplicazione e quindi l’addizione, benché realizzato sul modulo 21, è mostrato in Figura 9 b), mentre la Figura 9 a) riporta un protocollo con la medesima procedura ma con un modulo che non consente di risolvere correttamente il problema.

Nel protocollo mostrato in Figura 12 a) gli studenti hanno ripercorso l’algoritmo per la divisione euclidea (Montessori, 1934). Questo protocollo enfatizza, in particolare, la necessità di giungere al quoziente inferiore più prossimo al numero cercato, aspetto che è in genere acquisito come automatismo dopo l’apprendimento iniziale e non sempre è oggetto di consapevolezza. Anche nel protocollo in Figura 12 c) viene utilizzata la moltiplicazione per ottenere l’operazione inversa (ottimizzato e adattato al problema).

Alcuni protocolli mettono in evidenza un utilizzo consapevole ed esplicito della divisione euclidea.

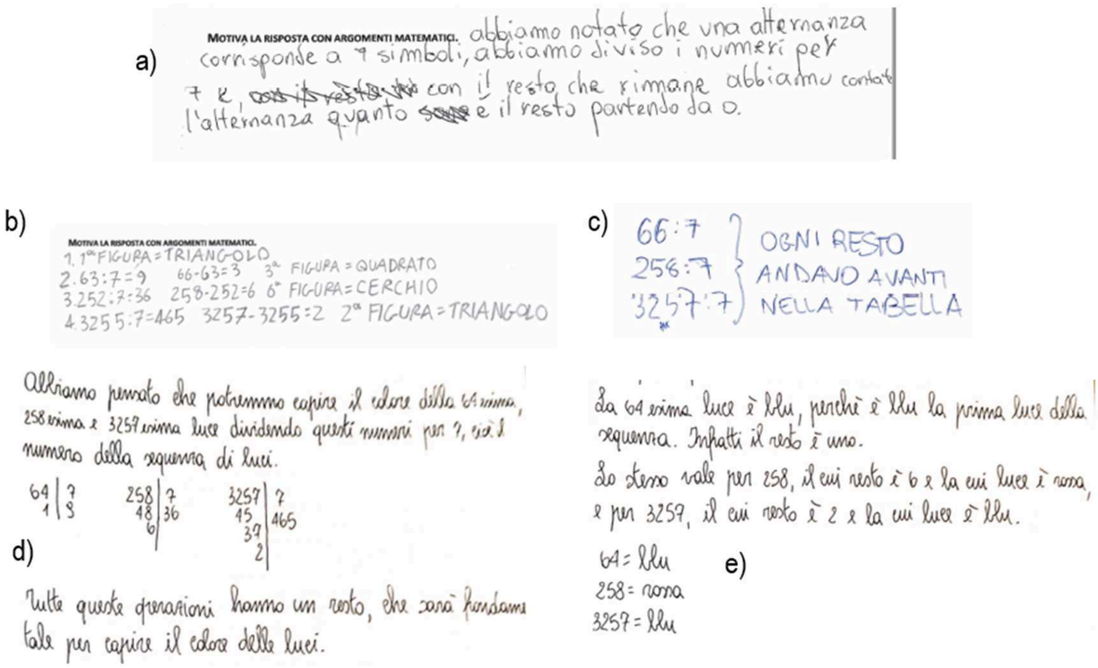

Figura 13 – Esempio di protocollo di Scuola Secondaria: alcuni protocolli basati sulla divisione con resto. Nelle immagini a), b) e c) protocolli sono riferiti al problema “La luce da cambiare”; nelle immagini d) ed e) i protocolli sono riferiti al problema “La punizione dei gemelli terribili”.

Alcune delle argomentazioni proposte dai gruppi che hanno scelto la divisione sono riportate in Figura 13. Nell'immagine a) la procedura è descritta a parole a un livello astratto e generalizzabile; nell'immagine e) è riportata una procedura descritta a parole con spiegazione specifica per il problema affrontato; nell'immagine d) la descrizione della procedura è prevalentemente dominata dalla parola, l'algoritmo è mostrato come efficace spiegazione dei casi concreti; nell'immagine b) sono riportate le diverse applicazioni dell'algoritmo senza argomentazione e, infine, nell'immagine c) la procedura è illustrata sinteticamente attraverso la divisione. Anche nella Figura 9 c) è riportato un altro caso di applicazione della divisione euclidea seppur con un modulo errato, ma in questo caso sono presenti argomentazioni coerenti con la richiesta del problema.

In alcuni protocolli, invece, è stata utilizzata la procedura della divisione con quoziente non intero (con la difficoltà di dover gestire la parte intera). Nella Figura 14 è riportato un esempio in cui la scelta di procedere con la divisione con quoziente non intero porta alla risposta errata. Questo esempio mette in evidenza alcune misconcezioni legate all'algoritmo di divisione e della corrispondenza tra il quoziente della divisione euclidea e la parte intera della divisione con quoziente non intero; inoltre emerge la difficoltà nel dare significato alle cifre decimali e a quando queste non servono per la giusta conclusione di un problema. Nonostante la strategia permetta di arrivare alla soluzione corretta, la sua applicazione porta a una soluzione errata.

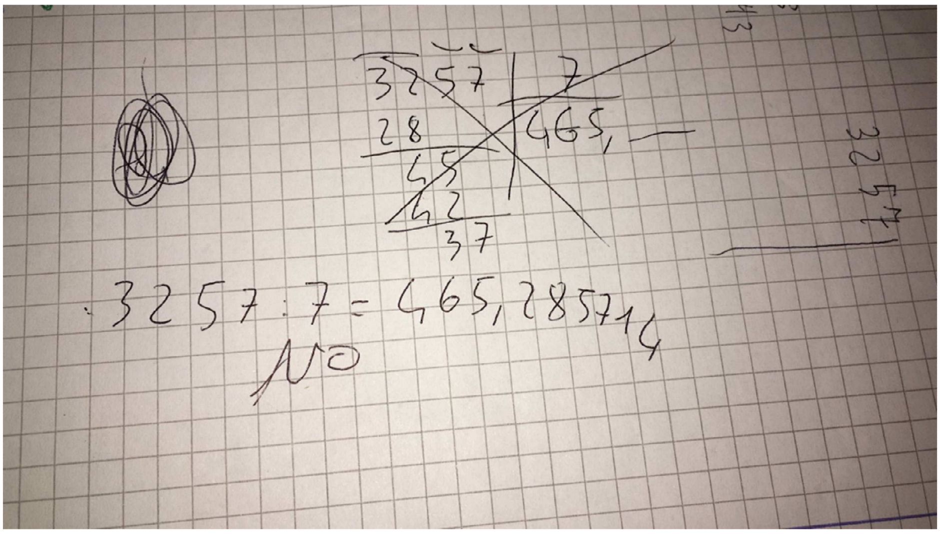

Figura 14 – Esempio di protocollo di scuola secondaria: un protocollo in cui gli studenti procedono meccanicamente con la divisione con quoziente non intero e arrivano alla soluzione errata.

Un protocollo completo in cui gli studenti scelgono di procedere con la divisione con quoziente non intero è mostrato in Figura 15, dove appare evidente l'individuazione della sequenza fondamentale, definita “stampo” nel testo, l’effettuazione delle divisioni con il conteggio delle “posizioni di resto” e un esempio in cui della divisione decimale si prende la sola parte intera. Non viene esplicitata la periodicità nella divisione, periodicità che era evidente dalle cifre decimali mostrate dalla calcolatrice.

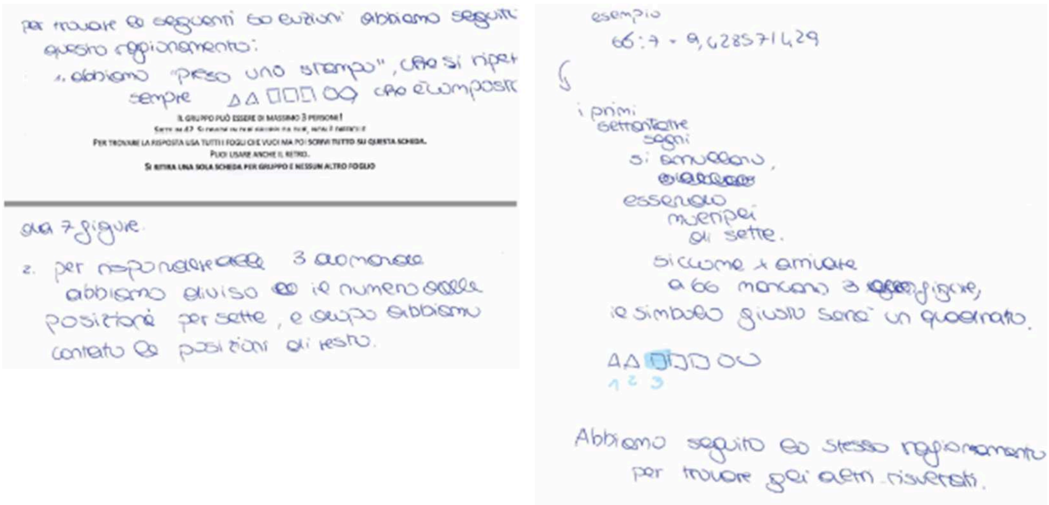

Figura 15 – Esempio di protocollo di scuola secondaria: protocollo basato sulla divisione con quoziente non intero riferito al problema “La punizione dei gemelli terribili”.

7. Conclusioni

Il lavoro di avvio al sapere teorico, di costruzione del significato di una teoria richiede una didattica paziente, non pressata da eccessive preoccupazioni di far conseguire agli studenti tutte quelle competenze tecniche che erano e sono ancora oggetto di attenzione nella prassi didattica. Le attività che sono state presentate possono essere considerate come possibili esempi di attività laboratoriale da proporre agli studenti.

A nostro avviso, questa scelta deve tenere conto delle conoscenze condivise dagli studenti, soprattutto di quelle che sono state veramente fatte proprie. Per questo motivo è stato essenziale coinvolgere gli insegnanti delle classi e decidere insieme le consegne delle attività.

La verticalità delle attività mette in luce l’emergere di alcune misconcezioni e di situazioni di contratto didattico in *tutti* i livelli coinvolti, me sempre più evidenti all’aumentare del grado scolastico. La discussione e l’analisi dei risultati evidenziano che tali situazioni possono essere superate in situazioni di didattica laboratoriale.

Ne è un esempio il protocollo mostrato in Figura 8, che mostra una strategia di soluzione attraverso un ragionamento di tipo ricorsivo sul modulo di 10. Tale strategia risulta non efficace perché gli alunni sbagliano nell'individuazione del colore della decima lucina (informazione inferibile dall'immagine). Le motivazioni dell'errore sono legate ad alcuni aspetti del contratto didattico: i contenuti matematici utili alla risoluzione dei problemi sono stati affrontati negli anni precedenti e gli alunni tentano di risolvere il problema facendo riferimento a conoscenze apprese recentemente (come solitamente accade quando si risolvono *esercizi*). In effetti nei curricoli scolastici il significato del resto in una divisione viene affrontato alla scuola primaria, mentre risulta evidente l'importanza di attività che mettano in risalto il suo significato anche negli anni successivi.

L'insegnante gioca un ruolo fondamentale poiché è l'artefice della didattica: alterna attività individuali ad attività collettive, favorisce il confronto, costruisce consegne mirate, valuta positivamente gli errori ed argomenta esso stesso le sue scelte. Il contratto didattico in questo modo impegna l'insegnante e gli allievi in un lavoro di costruzione consapevole del sapere e dell'essere individuo inserito all'interno di una classe (Bolondi et al., 2021)

Emergono, inoltre, differenti strategie per risolvere uno stesso problema: tali caratteristiche sono fondamentali per analizzare i processi decisionali che portano un allievo ad adottare una strategia piuttosto che un'altra nella risoluzione di un problema.

Infine vogliamo concludere con una riflessione sulla retroazione del docente, che ha accompagnato la progettazione, la somministrazione e l'analisi delle attività. L'intervento dei docenti coinvolti è sempre stato collegato all'esperienza degli studenti: occorre che il docente ridefinisca l'obiettivo dell'attività di risoluzione dei problemi in modo da non identificarlo con una prestazione volta a riconoscere le conoscenze e abilità degli allievi, ma come un'esperienza intellettuale stimolante, capace di far sviluppare competenze negli allievi.

Le proposte didattiche qui esposte vanno affiancate a un lavoro ampio e critico sul genere "problema matematico", che consenta di allargarne l'interpretazione da parte di docenti e allievi. In questa prospettiva gioca un ruolo cruciale il *tempo*, in tutte le sue accezioni e rispetto a tutti gli attori coinvolti: il tempo che il docente si concede per proporre attività ricche e differenziate, per far leggere e interrogare i testi, per ascoltare i dubbi, per porre e rilanciare domande; il tempo che l'allievo si concede per affrontare un problema, in particolare per comprenderlo e per attivare strategie risolutive; il tempo per una didattica coraggiosa, che sappia dedicarsi a percorsi lunghi.

In conclusione emerge una esplicita riflessione relativa alla necessità di progettare in verticale una didattica di tipo laboratoriale.

8. Bibliografia di riferimento

Arzarello, F., Bussi, M. B., & Bazzini, L. (2013). Emma Castelnuovo e la ricerca in didattica della matematica in Italia: alcune riflessioni.

Böhm, C., & Jacopini, G. (1966). Flow diagrams, turing machines and languages with only two formation rules. *Communications of the ACM, 9*(5), 366-371. doi:10.1145/355592.365646

Bolondi, G. (2006). Metodologia e didattica: il laboratorio. *Rassegna*, 29, 59-63.

Bolondi, G., Ferretti, F., Spagnolo, C. (2021) Argomentare in Matematica. Analisi di protocolli di studenti su catene di quesiti INVALSI proposti in diversi gradi scolastici. *I DATI INVALSI: UNO STRUMENTO PER LO SVILUPPO DELLE COMPETENZE TRASVERSALI*.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33- 115.

Castelnuovo, E. (2008). L'Officina Matematica. Bari: Edizioni La Meridiana.

Castelnuovo, E. (1963). *Didattica della Matematica.* Firenze: La Nuova Italia.

D'Amore, B. (2002). Basta con i numeri da 1 a 9, basta con i numeri in colore, basta con i blocchi logici, basta con gli abaci multibase. *La vita scolastica*, *8*, 14-18.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Che problema i problemi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6(29), 645–664.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, *2*, 139-163.

Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento:Erickson.

Giberti, C., Santi, G., & Spagnolo, C. (2023). The role of metaphors in interpreting students' difficulties in operating with percentages: A mixed method study based on large scale assessment. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(2), 297-321. https://doi.org/10.30935/scimath/12642

Greer, B., Verschaffel, L., & De Corte, E. (2002). "The answer is really 4.5": Beliefs about word problems. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 271–292). Kluwer Academic Publishers.

Henderson, D., & Taimina, D. (2005). *Mathematical aspects of the Peaucellier-Lipkin linkage*. http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/11/. Accessed 21 November 2022.

Isoda, M. (2004). The development of mathematics education. In Japan International Cooperation Agency (Ed.), *The history of Japan's educational development* (pp. 159–172). Tokyo: Institute for International Cooperation.

Mueller, W. (2001). Mathematical Wunderkammern. MAA Monthly, 108, 785-796.

MIUR (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma: MIUR.

Montessori, M. (1934). *Psico Aritmetica.* Barcellona: Araluce.

Rodari, G. (1964). *Il libro degli errori.* Torino: Einaudi.

Rodari, G. (2012). *Storie di Marco e Mirko.* Torino: Einaudi.

Sabena, C. Ferri, F. Martignone, F. Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'Infanzia e primaria.* Firenze: Mondadori Università.

Spagnolo C., Giglio R., Tiralongo S. & Bolondi G. (2021). Formative Assessment in LDL: A Teacher-training Experiment. In *Proceedings of the 13th International Conference on Computer*

Supported Education - Volume 1: CSEDU, ISBN 978-989-758-502-9, pages 657-664. DOI: 10.5220/0010496006570664

Spagnolo, C., Giglio, R., Tiralongo, S., & Bolondi, G. (2022). Formative assessment in LDL workshop activities: Engaging teachers in a training program. In *International Conference on Computer Supported Education* (pp. 560-576). Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14756-2_27

Zan, R. (2017). Il ruolo cruciale del pensiero narrativo nella comprensione dei problemi. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 2, 46-57. https://doi.org/10.33683/ddm.17.2.3

Data di ricezione dell'articolo: 20 luglio 2022
Date di ricezione degli esiti del referaggio in doppio cieco: 26 agosto e 6 settembre 2022
Data di accettazione definitiva dell'articolo: 20 novembre 2022