Università degli Studi di Ferrara
- Ex labore fructus -

Annali online della Didattica e della Formazione Docente

Illustrazione di copertina di Anna Forlati
(Manifesto della XXIX edizione del Festival "I teatri del mondo")

ISSN 2038-1034

Vol. 9, n. 14/2017

La Rivista "Annali online della Didattica e della Formazione Docente" è classificata dall'ANVUR come Rivista di Fascia A per i settori concorsuali 11/D1 (Pedagogia e Storia della Pedagogia) e 11/D2 (Didattica, Pedagogia Speciale e Ricerca educativa)

Annali online della Didattica e della Formazione Docente

Vol. 9, n. 14 (2017)

numero monografico

“Strategie e metodologie didattiche in Matematica e nelle Scienze”

a cura di

Maria Teresa Borgato e Simonetta Pancaldi

"Annali online della Didattica e della Formazione Docente"
Vol. 9, n. 14/2017 – ISSN 2038-1034

INDICE

SEZIONE III: SPERIMENTAZIONI E BUONE PRATICHE

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 1-2 – ISSN 2038-1034

EDITORIALE

Elena Marescotti

“La Didattica espone agli occhi dell’insegnante una identità scientifica *binaria*, nel senso che brillano di luce propria le due facce della sua luna morfologica: l’*identità disciplinare* e l’*identità generale*.

Riconoscere questa ‘bipolarità’ significa attribuirle l’immagine di scienza complessa. La Didattica è la scienza della comunicazione (con il compito di ‘ottimizzare’ il trasferimento delle conoscenze e dei modelli culturali) all’interno di uno specifico contesto/istituzione deputato alla formazione. Nello specifico ‘teatro’ dell’istituzione scolastica, la Didattica sagoma una doppia identità: di *didattica disciplinare* e di *didattica generale*.

a) La didattica disciplinare pone al centro della propria riflessione teorica e della propria progettazione empirica i saperi scolastici (le materie di insegnamento) e le relative strategie di trasmissione delle conoscenze. In altre parole, nel suo mirino campeggiano le discipline sancite dai piani degli studi dei percorsi curricolari della scuola dell’infanzia, del ciclo primario e di quello secondario. Questo significa che la didattica disciplinare è quella parte della Didattica chiamata a tener conto sia delle *dimensioni di sviluppo* degli studenti (i loro potenziali linguistici, logici, scientifici, creativi, socioaffettivi), sia dei *sistemi simbolico-culturali* (i codici, i congegni ermeneutici, le metodologie della ricerca) delle singole discipline scolastiche”.

(F. Frabboni, *Didattica generale. Una nuova scienza dell’educazione*,
Milano, Paravia Bruno Mondadori editori, 2000, pp. 19-20)

Nel rispondere al suo costitutivo mandato di luogo e occasione di confronto e disseminazione culturale circa i temi e i problemi che interessano, ad ampio raggio e nelle loro innumerevoli specificità, il settore della didattica e della formazione docente, questo secondo fascicolo del 2017 della Rivista “Annali online della Didattica e della Formazione Docente” intende presentare un approfondimento di ricerca e, allo stesso tempo, una ricognizione dello stato dell’arte riguardanti la didattica disciplinare della Matematica e delle Scienze, oggetto, negli ultimi tempi, di una crescente attenzione e di interessanti innovazioni e sperimentazioni.

I temi indagati, al crocevia di approcci diversi e complementari – teorici e sperimentali – così come nel loro altrettanto differente e complementare calarsi in situazioni formative che vanno dalla scuola primaria all’università, rispondono non solo alle peculiarità dei campi disciplinari trattati ma, più in generale, aprono – e non poteva che essere così – ad una discussione che si ripercuote sul processo di insegnamento/apprendimento globalmente inteso, che chiede agli insegnanti di testimoniare e praticare il loro essere ricercatori sia nella materia di competenza sia nella sua comunicazione con finalità educative.

Di là degli aspetti particolari, dunque, strettamente connessi alla struttura epistemologica e alle metodologie di ricerca della Matematica e delle Scienze qui prese in esame, emerge una chiara e forte valorizzazione della professionalità del docente, nella sua formazione iniziale e nel suo continuo aggiornamento, quale interprete della disciplina ed esperto di didattica.

Recuperando la sua suggestiva origine etimologica – *didachè*, insegnamento, *dídaxis*, lezione, *didaktós*, che può essere insegnato – ove la radice *da*, *dak*, nel suo significato di *mostrare*, ne sottolinea tutta la responsabilità di scelta, contenutistica e delle modalità e dei veicoli esplicativi, l'insegnante come "didatta" traduce nella sua prassi quotidiana quell'identità scientifica "binaria" – per riprendere le parole di Franco Frabboni – della Didattica, che può inverarsi solo nella sua declinazione "disciplinare", di cui peraltro si nutre per mettere costantemente a punto una dimensione "generale" intitolata a principi-guida fondamentali e traversali alla pluralità dello scibile, a loro volta coerenti ad una nozione di "relazione educativa" scientificamente fondata.

I venti articoli qui raccolti ne presentano, argomentano ed esemplificano alcuni tra i più importanti: senza poter entrare ora dettagliatamente nel merito di tutte le "proposte didattiche" avanzate e discusse, sono senza dubbio i concetti di apprendimento collaborativo, di discussione partecipata, di raccordo pensiero/azione, di approccio critico, di problematizzazione, di didattica laboratoriale, di cognizione/metacognizione ad emergere come particolarmente significativi e, proprio a partire anche da singoli casi, progetti, sperimentazioni, come "esportabili" e "applicabili", nel senso di "ricreabili" e "reinventabili", in altri contesti.

Oltre che per numerosità, ampio respiro e, ovviamente, pertinenza con gli intenti della Call for Papers messa a punto dalle curatrici Maria Teresa Borgato e Simonetta Pancaldi, i contributi di questo fascicolo sono particolarmente apprezzabili anche per la pluralità di punti di vista che esprimono, a più livelli: affermati studiosi accademici, giovani leve della ricerca, insegnanti di vari gradi e ordini di scuola, provenienti sia dai contesti scientifico-disciplinari della Matematica e delle Scienze così come dagli ambiti della Pedagogia sperimentale, della Didattica, delle Tecnologie dell'istruzione, hanno raccolto la sfida di animare il dibattito su "Strategie e metodologie didattiche in Matematica e nelle Scienze", offrendo un quadro composito, complesso, aggiornato e – non meno importante – "vivo" circa il modo di pensare e di agire nella scuola e nell'università di oggi.

La regìa di Maria Teresa Borgato e di Simonetta Pancaldi, in questa prospettiva, non solo si è dimostrata sapiente, per via delle loro consolidate competenze, ma anche particolarmente attenta e sensibile, sulla scia di un impegno a favore della formazione docente da molti anni assunto – in particolare, ma non solo, dai tempi della SSIS e, a seguire, delle altre iniziative di formazione degli insegnanti nel raccordo scuola/università – e – come appunto testimonia ampiamente questo fascicolo – ancora energicamente coltivato.

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 3-6 – ISSN 2038-1034

Presentazione del
NUMERO MONOGRAFICO
Strategie e metodologie didattiche in Matematica e nelle Scienze

Maria Teresa Borgato
Simonetta Pancaldi

Nuove proposte metodologiche per l’insegnamento/apprendimento della matematica e delle scienze, che hanno avuto origine in altri ambiti di ricerca, emergono sempre più nelle pubblicazioni degli ultimi anni, come pure nelle sperimentazioni scolastiche. Oltre il rapporto consolidato con le scienze cognitive, che anche nel passato ha prodotto una osmosi di concetti e teorie, in tempi più recenti maggiore attenzione è dedicata agli aspetti metodologici. Per citare alcuni esempi: l’apprendimento capovolto (*flipped learning*), proposto in relazione all’insegnamento della chimica si è diffuso e sviluppato in pochissimi anni, l’apprendimento cooperativo (*peer education*), nelle sue varie declinazioni ha trovato applicazione anche nell’ambito della matematica. L’apprendimento a stazioni (*stationenlerner*) ha larga applicazione nell’insegnamento delle scienze.

Se anche vi è una piattaforma teorica comune, l’apprendimento della matematica e delle scienze pone problemi specifici e dunque queste metodologie richiedono una riflessione particolare, per orientarne opportunamente le strategie, i processi e i materiali, che possono dipendere non solo dalla fascia di età, dalla tipologia di scuola e dalla situazione sociale e individuale, ma dai contenuti stessi della disciplina che presentano ostacoli cognitivi specifici.

Il secondo numero dell’annata 2017 della Rivista “Annali online della Didattica e della Formazione Docente” è stato destinato a questo tema, e sono stati invitati i ricercatori e gli sperimentatori che si occupano di didattica della matematica, della fisica, della biologia, della chimica e delle altre scienze, separatamente o in forma interdisciplinare, a fornire il loro contributo. Il *Call for Papers*, divulgato anche nell’ambito delle associazioni rivolte al miglioramento dell’insegnamento e dell’apprendimento della matematica (AIRDM, UMI, Mathesis) come pure della pedagogia e della ricerca storico-educativa (SIPED, CIRSE), ha avuto successo e venti contributi sono stati accettati per la pubblicazione.

Abbiamo però volutamente evitato distinzioni di tipo disciplinare, per presentare un quadro trasversale tra matematica e scienze, tra didattica generale e disciplinare. Ciascun contributo indaga certamente un suo ambito circoscritto, ma tutti rientrano in un tema generale, quello dell’insegnamento/apprendimento scientifico, che supera le divisioni proprie dell’organizzazione accademica. Inoltre le recenti disposizioni sulla formazione degli insegnanti richiedono una collaborazione tra gli esperti delle discipline psico-pedagogiche e quelli delle didattiche disciplinari. In altri Paesi tale integrazione è istituzionalizzata con l'afferenza ad un medesimo dipartimento dell'educazione, mentre in Italia si realizza solo nell'ambito della formazione degli insegnanti di scuola primaria.

Nel volume si troveranno pertanto contributi su temi interdisciplinari, a fianco di temi riguardanti l'insegnamento della matematica, della fisica, della chimica o della biologia. La preponderanza della didattica della matematica negli argomenti presentati, testimonia la maggiore tradizione e il maggiore sviluppo che questa disciplina ha avuto, anche negli ultimi decenni, nel nostro Paese. Tuttavia la didattica delle scienze ha in campo internazionale una presenza consolidata, con convegni e riviste dedicate, e questo volume vuole essere di incentivo alle ricerche in questi campi, come pure di stimolo alle autorità accademiche, affinché diano spazio a queste discipline. Inoltre le considerazioni che introducono, accompagnano e concludono alcune sperimentazioni in matematica si possono applicare in ambiti più ampi.

Per dare ordine ai contenuti e facilitare la lettura, gli articoli sono divisi in tre sezioni: nella prima sono stati raccolti quei contributi che presentano aspetti e interpretazioni innovative di metodologie più mature, che poggiano su di una letteratura ampia e consolidata, nella seconda vi sono i contributi più specificamente rivolti alla formazione degli insegnanti, mentre nella terza sezione sono presentate sperimentazioni innovative ed esperienze pilota, che propongono ipotesi per nuove ricerche ed esperienze. La distinzione non è rigida, poiché non esiste ricerca in didattica delle scienze che non muova da un impianto teorico, e una teoria che non si basi sulla sperimentazione e sulla esemplificazione.

Nella prima parte sono sviluppati temi classici come il *problem posing* e il *problem solving*, l'argomentazione, la gestione dell'errore, la didattica laboratoriale, l'apprendimento cooperativo, la valutazione formativa, sotto angolazioni diverse e nuove e talora con l'introduzione di nuove tecnologie di comunicazione digitale. Il livello scolastico va dalla scuola primaria alla secondaria di secondo grado. Alcuni di questi lavori sono segmenti di progetti di ricerca nazionali o europei.

In un lavoro infatti le competenze argomentative in matematica sono acquisite in un ambiente cooperativo tra pari (studenti) mediante una piattaforma e-learning appositamente adeguata a schemi e linguaggi giovanili (videogiochi, fumetti). Le abilità argomentative sono anche l'oggetto di un altro contributo in cui gli esiti di una sperimentazione con studenti dei primi anni di scuola secondaria, sono confrontati facendo variare la metodologia cooperativa. La metodologia del *problem solving*, intesa come attività laboratoriale, in un altro studio, è analizzata in due diversi contesti (gare di matematica, formazione degli insegnanti di scuola primaria).

In un altro, il raccordo tra conoscenze scolastiche ed extrascolastiche nella scuola del primo ciclo è presentato alla luce di una varietà di metodologie didattiche tra loro complementari, integrate e interattive, che sono state messe in campo negli ultimi decenni. L'educazione matematica al primo ciclo è all'attenzione anche della riflessione sulla didattica della matematica, basata su una analisi delle prove INVALSI, e dello studio sulla gestione dell'errore, in cui si rivendica il valore storico-epistemologico dell'errore in matematica. Le nuove tecnologie intervengono in un altro contributo, per realizzare strategie di valutazione formativa in matematica che sono attivate, oltre che dall'insegnante, dallo studente stesso o dai compagni.

Nella seconda parte la metodologia *flipped* è utilizzata per la progettazione di percorsi didattici, procedendo a ritroso a partire dalle competenze, per definire poi conseguentemente le azioni di valutazione e infine le attività didattiche adeguate. In un altro intervento, l'aggiornamento professionale degli insegnanti in servizio, e i possibili cambiamenti nelle loro pratiche didattiche, sono realizzati attraverso una piattaforma informatica che mette a disposizione metodologie e materiali per insegnanti e formatori.

L'approccio storico diventa metodologia di insegnamento in diversi contesti: nella progettazione della discussione collettiva a partire da una fonte primaria, in una classe quinta elementare, o come racconto e ispirazione di sequenze operative, presso gli allievi più giovani. Vengono anche delineati i contenuti di storia della matematica adatti ad essere comunicati durante tutto il primo ciclo. Un simile approccio, sia letterario che scientifico, è proposto anche per l'insegnamento della chimica. Sono illustrati i risultati ottenuti nell'introduzione di questi elementi nel corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria. In questa sezione sono suggeriti inoltre percorsi integrati tra matematica e scienze (biologia, chimica, fisica, geologia) sulla base delle esperienze maturate durante i laboratori e i tirocini della scuola di specializzazione SSIS (Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario) e dei TFA (Tirocini Formativi Attivi), che potranno fornire indicazioni nel prossimo percorso FIT (Formazione Iniziale e Tirocinio) e nella formazione in servizio. La formazione degli insegnanti di scienze è l'oggetto di un intervento specifico, che solleva la questione delle mancate candidature in campo scientifico e la necessità di fornire adeguate conoscenze scientifiche a tutti i cittadini; sono individuati tre punti principali nelle metodologie di intervento per sollecitare l'interesse degli studenti: una didattica laboratoriale di tipo *inquiry-based*; temi vicini all'esperienza quotidiana e un approccio interdisciplinare.

È nostra convinzione che anche in un contesto di sperimentazioni in corso, e nella formazione dei futuri insegnanti, la dimensione storica degli insegnamenti matematici e scientifici non debba essere trascurata, in quanto l'analisi delle esperienze passate e dei loro esiti, può orientare responsabilmente le scelte future. Ma questo aspetto è stato già affrontato e potrà essere sviluppato in altre sedi.

Nella terza parte si segnala una sperimentazione, che fa uso di varie strategie didattiche, rivolta a studenti del primo anno universitario, per incentivare la motivazione allo studio della matematica in corsi di laurea in cui questa disciplina ha un ruolo strumentale. Si tratta di un ambito di ricerca più recente, questo della didattica universitaria, reso assai attuale dall'obiettivo del contrasto agli abbandoni sostenuto da interventi ministeriali. Sono inoltre presentate due sperimentazioni condotte da insegnanti, per la scuola primaria e secondaria di I grado, che riguardano, l'una un percorso interdisciplinare tra biologia e matematica, che fa uso della didattica digitale e laboratoriale, e l'altra l'educazione precoce al pensiero computazionale, attraverso linguaggi di programmazione intuitivi e la robotica educativa. Un gruppo di ricercatori universitari presenta varie esperienze di orientamento degli studenti e di aggiornamento degli insegnanti di scuola secondaria, e di divulgazione della fisica, svolte in parte nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche del MIUR che promuove le candidature ai corsi di laurea scientifici.

Due giovani dottorande presentano i risultati delle sperimentazioni condotte in classi prime di scuola secondaria di II grado, che sono parte del loro programma di ricerca. Queste riguardano la metodologia della *flipped education*, applicata all'introduzione dei sistemi di numerazione, e lo sviluppo di abilità visuo-spaziali in un ambiente di geometria dinamica.

Desideriamo sottolineare come abbiano contribuito al volume sia docenti di competenza riconosciuta in ambito internazionale, che giovani ricercatori animati da entusiasmo e fantasia, che insegnanti sperimentatori di grande esperienza. I contributi sono venuti da sedi distribuite in tutta Italia: Torino, Genova, Firenze, Pisa, Roma, Bologna, Ferrara, Parma, Padova, Salerno, Napoli, Cagliari… Questo dimostra la vitalità della ricerca in didattica della matematica e delle scienze, che sempre più studenti universitari desiderano coltivare, per diventare un insegnante, un ricercatore o entrambe le cose. Un'altra parte di esperti ha contribuito, durante il processo di revisione, a perfezionare il volume, Al termine del lavoro, possiamo concludere che questa iniziativa ha coinvolto, in un modo o nell'altro, una parte rilevante dei cultori di didattica disciplinare.

Le curatrici di questo volume si augurano che esso sia di interesse non solo per coloro che coltivano la didattica della matematica e delle scienze, di cui fornisce un panorama non vasto ma significativo degli studi in Italia, ma che, aiutato dalla collocazione in una Rivista che accoglie prevalentemente contributi di didattica e pedagogia generale, sia foriero di una collaborazione più stretta tra le diverse anime accademiche che si dedicano alla formazione degli insegnanti, e che talvolta si contrappongono pur avendo intenti comuni. Nulla favorisce il superamento delle reciproche diffidenze che il lavorare insieme.

Un altro auspicio è che si creino, o si rafforzino, i rapporti di collaborazione tra ricercatori universitari e insegnanti, che esistono a livello individuale e meno a livello di società scientifiche. Esistono in Italia le associazioni di insegnanti, alcune di antica tradizione e altre più recenti; come Mathesis, AIF, AIC, ANISN, o le associazioni di cultori delle discipline, come UMI, SIF, SCI, SISM, SISN… che possono essere interlocutori utili per le istituzioni scolastiche e le Università, per quanto riguarda la realizzazione di progetti che coinvolgono la formazione iniziale e permanente degli insegnanti.

Un grazie ad Elena Marescotti, che coordina la Redazione di questa Rivista, per la sua aperta e generosa collaborazione.

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 7-27 – ISSN 2038-1034

Script collaborativi e digital storytelling per l’apprendimento online della Matematica

Giovannina Albano
Filippo Bruni
Umberto Dello Iacono

Abstract – *This work concerns an e-learning skill-based methodology called M-DIST (Digital Interactive Storytelling in Mathematics) proposed for the learning of mathematics. It consists of a collection of collaborative scripts, which steer roles and actions of the participants in order to promote cognitive, socio-cognitive and metacognitive processes. We refer to a networking of theories as the theoretical framework and use storytelling experience to engage students. The activities use both experiential and discursive approaches, integrating individual and social tasks. According to Vygotsky, the expectation is that, over time, scripts can be internalized through practice and so produce learning. Finally, we analyse and discuss, using functional linguistic tools, the results of a DIST-M experimentation focused on argumentative skills in mathematics.*

Riassunto – *Questo lavoro riguarda la proposta di una metodologia per l’apprendimento della matematica in ambiente e-learning, basato sulle competenze, che abbiamo denominato Digital Interactive Storytelling in Matematica (DIST-M), che consiste in script collaborativi, finalizzati a gestire e strutturare ruoli e interazioni degli studenti per promuovere processi cognitivi, socio-cognitivi e metacognitivi. Il quadro teorico di riferimento è costruito come networking di teorie e usiamo una esperienza di storytelling per coinvolgere gli studenti. Le attività utilizzano entrambi gli approcci esperienziale e discorsivo, integrando task individuali e sociali. Secondo Vygotskij, l’aspettativa è che, nel tempo, gli script possano essere interiorizzati attraverso la pratica e garantire, in questo modo, l’apprendimento. Infine, analizziamo e discutiamo, utilizzando strumenti della linguistica funzionale, i risultati di una sperimentazione del DIST-M focalizzata sulla competenza argomentativa in matematica.*

Keywords – mathematics, collaboration script, storytelling, argumentation, linguistic

Parole chiave – matematica, script collaborativi, storytelling, argomentazione, linguistica

Giovannina Albano è Professore Associato presso il DIEM dell’Università degli Studi di Salerno (SSD MAT/04 – Didattica della matematica). I suoi interessi di ricerca riguardano il problema dell’integrazione tra la tecnologia, in particolare l’e-learning, e la ricerca in Educazione Matematica. In tale ambito si colloca il progetto Prin 2015 “Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a competence-based social approach”, di cui è coordinatrice nazionale. Dal gennaio 2016 è vice-presidente dell’AIRDM (Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica) che raccoglie tutti i membri della Comunità Accademica e Scientifica Italiana che si occupano di ricerca in didattica della matematica.

Filippo Bruni è Professore Associato e docente di *Didattica generale e tecnologie dell'istruzione* nel corso di Scienze della Formazione primaria e di *Media education e competenze digitali* nel corso di Scienze della comunicazione presso l'Università degli Studi del Molise. È vicedirettore della rivista on line "Form@re". Ha come principale area di ricerca quella della relazione tra le architetture e i formati dell'istruzione da un lato e risorse digitali dall'altro. In tal senso, tra le sue pubblicazioni, si segnala la monografia *Blog e didattica. Una risorsa del web 2.0 per i processi di insegnamento* (Macerata, EUM, 2009).

Umberto Dello Iacono è Dottore di Ricerca in Matematica, Fisica ed Applicazioni e titolare di un assegno di ricerca presso il DIEM dell'Università degli Studi di Salerno (SSD MAT/04 – Didattica della matematica). I suoi interessi di ricerca prevalenti e le sue più recenti pubblicazioni riguardano script collaborativi computer-based, digital interactive storytelling, logica applicata alla didattica della matematica e tecnologie didattiche nell'insegnamento/apprendimento della matematica, con attenzione alle piattaforme e-learning e all'integrazione tra piattaforme e-learning e altre tecnologie didattiche. È Professore a contratto di *Fisica* e *Didattica della Fisica* presso il Dipartimento SUSeF dell'Università degli Studi del Molise.

1. Introduzione

Questo lavoro riguarda la definizione di una metodologia per l'apprendimento della matematica in e-learning, basato sul convincimento che gli apprendimenti delle specifiche aree disciplinari vengano promossi in maniera più efficace affrontandoli nel più vasto contesto dato dalle competenze. Abbiamo denominato tale metodo Digital Interactive StoryTelling in Matematica (DIST-M), caratterizzandolo attraverso script collaborativi, finalizzati a gestire e strutturare ruoli e interazioni (King, 2007, Weinberger *et al.*, 2009). Tale metodologia utilizza il framework dello storytelling (Lambert, 2002, Ohler, 2008, Petrucco & De Rossi 2009), sia per motivare gli studenti sia per sfruttare i benefici dell'integrazione tra pensiero logico e pensiero narrativo (Bruner, 1986, Zan, 2011), sia infine per promuovere un utile intreccio tra area umanistica e area scientifica troppo spesso contrapposte in maniera infruttuosa. Il metodo si basa sull'assunto che gli strumenti offerti da una piattaforma e una collaborazione tra pari ben strutturata possano agire come un supporto all'apprendimento (Dello Iacono, 2015; Albano, Dello Iacono, Mariotti, 2016; Albano, Dello Iacono, Fiorentino, 2016). L'approccio teorico è di tipo socio-costruttivista, per cui gli studenti costruiscono la propria conoscenza impegnandosi attivamente in pratiche sociali, che poi vengono interiorizzate (Vygotsky, 1980; Varisco, 2002).

Il caso di studio presentato in questo articolo riguarda un'implementazione del DIST-M, relativamente alla competenza argomentativa in matematica. I risultati PISA mostrano che la capacità di esprimere argomentazioni in forma scritta è un punto critico (Turner e Adams, 2012). Dall'altra parte, in una cornice di approccio discorsivo all'apprendimento della matematica (Sfard, 2001), Ferrari mostra che il linguaggio matematico e i registri evoluti condividono molte caratteristiche. Così, egli conclude che avere familiarità con le comunicazioni scritte è un prerequisito per promuovere il pensiero matematico avanzato (Ferrari, 2004). Nel seguito inquadriamo l'articolo da un punto di vista teorico, poi descriviamo la metodologia DIST-M e discutiamo e analizziamo, da un punto di vista linguistico, i risultati quantitativi e qualitativi di una sperimentazione pilota del DIST-M implementato per la competenza argomentativa.

2. Il quadro teorico

L'importanza della comunicazione in matematica è stata evidenziata da molti studiosi e ricercatori, tanto da essere una delle competenze oggetto di valutazione nei test internazionali, quali quelli di OCSE-PISA. Per Sfard (2001) la comunicazione e il linguaggio non sono solo mezzi che veicolano concetti pre-esistenti, ma sono lo strumento che permette la costruzione del pensiero stesso. Da questo punto di vista l'importanza della comunicazione in matematica non va ad influenzare solo il modo di insegnare, ma anche e soprattutto l'apprendimento nel suo complesso. Nel costruire argomentazioni, gli studenti elaborano e spiegano a se stessi i concetti che stanno giustificando (Baker, 2003), integrando in tal modo nuove informazioni all'interno di esistenti strutture cognitive (Chi *et al.*,1989). Ci si inserisce in tal senso in un dibattito iniziato già negli anni novanta del secolo scorso in cui il concetto di competenza si è imposto per la sua caratteristica di andare oltre la dimensione della semplice conoscenza per mostrare come la soluzione di problemi reali richieda un approccio complesso e trasversale che unisca saperi disciplinari, capacità di comunicare, argomentare e relazionarsi (Varisco, 2004; Rossi, 2005, pp. 133-161). In letteratura è possibile distinguere tra argomentazione e spiegazione. L'argomentazione può intendersi come un discorso finalizzato a convincersi o a convincere della validità di un enunciato un interlocutore alla pari o più esperto e, per questo motivo, la comunicazione avviene in un registro colto, varietà linguistica basata sull'uso (Ferrari, 2004). La spiegazione può essere intesa, invece, come un discorso teso piuttosto a far comprendere un concetto o un ragionamento ad un interlocutore, solitamente meno esperto, e pertanto la comunicazione avviene in un registro colloquiale (Mariotti, 2015). In questo lavoro, tuttavia, non abbiamo interesse a distinguere tra spiegazioni e argomentazioni quanto piuttosto al passaggio da forme di argomentazioni implicite, espresse in un linguaggio quotidiano, verso forme di argomentazione esplicite, rigorose, formali. Nella misura in cui avviene questo passaggio, possiamo dire che c'è stato un progresso nell'apprendimento (Engerström, 1987).

La comunicazione e la costruzione di competenze argomentative è chiaramente favorita in situazioni di apprendimento collaborativo. È noto però che una collaborazione efficace non è spontanea, ma va attentamente progettata (Kuhn, 1991; Laurillard, 2013). Questo è ancor più vero in ambienti digitali (Weinberger *et al.*, 2009). La necessità di pre-strutturare e regolare i processi sociali e cognitivi ha portato i ricercatori a ricorrere a un costrutto, denominato *script*, preso in prestito dalla psicologia cognitiva. Qui lo script è inteso come lo schema di memoria interna corrispondente a una sequenza di azioni che definiscono una ben nota situazione (Schank e Abeson, 1977), dove i ruoli e le azioni di ogni attore sono ben definite, e tale schema viene richiamato alla memoria ogni volta che si presentano ambientazioni simili. Lo script didattico viene imposto esternamente e mira a regolare ruoli e azioni degli studenti che collaborano per indurre opportuni processi cognitivi (King, 2007). Sebbene disegnati da esterni e inizialmente imposti ai discenti, questi diventano una risorsa cognitiva dello studente solo se col tempo vengono interiorizzati attraverso la pratica sociale (Vygotsky, 1980), così da favorire un processo di auto-regolazione. Weinberger *et al.* (2007) distinguono tre tipi di componenti in uno script collaborativo computer supported: componenti epistemiche, componenti argomentative e componenti sociali. Le componenti epistemiche supportano gli studenti nel trovare adeguate strategie risolutive; quelle argomentative supportano la costruzione di argomentazioni formalmente accettabili; le componenti sociali coinvolgono gli studenti in attività collaborative che essi non avvierebbero mai spontaneamente.

3. Le metodologie DIST e DIST-M

Nel seguito definiamo una metodologia, che abbiamo chiamato Digital Interactive Storytelling (DIST), che mira a mediare una competenza specifica, in un ambiente di e-learning, facendo uso dell'approccio proprio dello storytelling, e di un certo grado di interattività, garantita dall'utilizzo di applicazioni che consentono allo studente di manipolare oggetti (grafici, multimediali, ecc.) e di ricevere feedback dall'ambiente. Laddove la competenza mediata sia relativa alla matematica, parleremo di DIST-M (Digital Interactive Storytelling in Matematica).

Il DIST è costituito da vari Frame, ciascuno dei quali consiste di un insieme di script, che a loro volta sono costituiti da uno o più task, da intendere come attività elementari non ulteriormente scomponibili. Il primo Frame, chiamato *Frame di Introduzione*, ha la funzione di introdurre lo studente nell'ambiente del DIST, quindi nella storia, e di presentargli gli strumenti informatici da usare, in maniera analoga a quello che avviene nei videogiochi. Gli altri Frame sono Frame di livello, ovvero mirano a mediare una specifica competenza in successivi livelli di difficoltà.

I task possono essere di tipo individuale, di tipo collaborativo o di tipo misto. Nei primi, lo studente svolge e consegna il proprio lavoro individualmente, senza comunicare con i compagni. Nei secondi, lo studente lavora con i pari, comunicando attraverso gli strumenti disponibili in piattaforma (chat, forum, wiki, ecc.) e la consegna dei lavori è collettiva. Nei task misti, allo studente viene data l'opportunità di comunicare con i compagni (solitamente attraverso la chat) ma egli consegna il risultato del proprio operato individualmente. L'alternanza di task collaborativi ed individuali aderisce al pensiero vygotskiano per cui l'apprendimento sia prima socializzato e poi interiorizzato.

4. Il DIST-M per avviare all'argomentazione

In questa sezione andremo a descrivere il disegno di un DIST-M, che mira ad avviare alla costruzione di argomentazioni verbali in matematica, attraverso la produzione personale, il confronto e la mediazione tra pari per giungere ad un enunciato comune. Il DIST-M non restituisce mai (o quasi) la corretta soluzione del compito, ma spinge lo studente ad interagire con gli altri per raggiungerla. L'obiettivo, infatti, è quello di trasferire al gruppo di pari on-line e alla piattaforma il ruolo vygotskiano dell'esperto. In quest'ottica, le componenti epistemiche non forniscono direttamente strategie risolutive, ma, da un lato cercano di far acquisire a ciascuno i prerequisiti necessari per poter affrontare il compito e, dall'altro, spingono lo studente alla riflessione individuale e di gruppo, attraverso domande metacognitive che avviino processi di autoregolazione. Sono presenti anche componenti argomentative, disegnate con lo scopo di spingere lo studente dapprima a spiegare il proprio ragionamento ai compagni e poi ad argomentare in un registro evoluto. Le componenti sociali spingono lo studente ad interagire con i compagni.

Per implementare il DIST-M, per il caso specifico di studio, abbiamo utilizzato la piattaforma Moodle (https://moodle.org), che mette a disposizione diversi strumenti per la collaborazione: *Chat*, differenziate per gruppi di lavoro o per tutti i partecipanti all'attività; *Forum*, sia di tipo Standard dove chiunque può avviare una discussione e vedere gli interventi degli altri, sia di tipo Domande e Risposte, dove lo studente prima posta il proprio intervento e ha accesso agli interventi degli altri; *Wiki*, per l'inserimento e la modifica di una raccolta di pagine web, in modo collaborativo oppure individuale. Abbiamo usato anche alcune attività di Moodle: *Lesson*, che consente di realizzare percorsi personalizzati, in funzione di scelte o risposte a questionari, a carico dello studente; *Compito*, che consente la sottomissione di un testo, eventualmente multisemiotico e multimediale, sia in maniera individuale sia come consegna di gruppo.

Per implementare la storia, che accompagna i vari script, abbiamo utilizzato i fumetti (per mezzo dell'ambiente on line gratuito *Toondoo* (www.toondoo.com), poiché il rapporto diretto tra parola e immagine può favorire il processo di apprendimento, rendendolo meno faticoso e più piacevole (Marrone, 2005). Abbiamo utilizzato il software di matematica dinamica *GeoGebra* (https://www.geogebra.org) per implementare applicazioni interattive integrate all'interno delle pagine Moodle.

In questo articolo descriveremo rapidamente il *Frame di Introduzione* e ci focalizzeremo sul primo script del *Frame di livello 1*, di cui poi analizzeremo i dati.

Nel Frame di Introduzione lo studente viene catapultato nella storia *Programma Discovery.* Il pianeta Terra è in pericolo ed è previsto un impatto con un meteorite. La NASA lancia una sonda su un nuovo pianeta che può rappresentare la salvezza per l'umanità. Lo studente assume il ruolo di uno scienziato di un'equipe della NASA, il cui obiettivo è quello di analizzare statisticamente i dati provenienti dalla sonda per vedere se il pianeta è in grado di ospitare vita (Figura 1).

Figura 1 – Il Frame Introduzione di Programma Discovery

Durante la fruizione, lo studente si troverà ad affrontare quesiti riguardanti la statistica e la costruzione di grafici statistici, la cui risoluzione è necessaria per poter proseguire nel lavoro dell'equipe. Il contenuto didattico, dunque, per il nostro caso di studio, è la rappresentazione e gestione di grafici di statistica descrittiva. Terminata la fase iniziale, lo studente potrà scegliere se consultare pagine di teoria, riguardanti la costruzione di tabelle o grafici statistici, oppure se accedere alla pagina dei tutorial. Sono applicazioni interattive, realizzate con GeoGebra, che prevedono l'interazione dello studente con un oggetto grafico.

Il Frame di Livello 1 ha come obiettivo quello di mediare la specifica competenza ad un livello base di difficoltà. Nel caso di studio specifico, è costituito da tre script collaborativi, il Capitolo 1, il Capitolo 2 il Capitolo 3. In questo articolo ci limiteremo a descrivere il Capitolo 1.

Il disegno di questo script (Figura 2) si basa su un approccio misto, sia esperienziale, in cui lo studente può manipolare oggetti interattivi per formulare e verificare ipotesi, sia discorsivo nell'apprendimento della matematica, promuovendo il dibattito interno allo studente o tra pari. Lo script è pensato per la partecipazione in gruppi composti da quattro studenti.

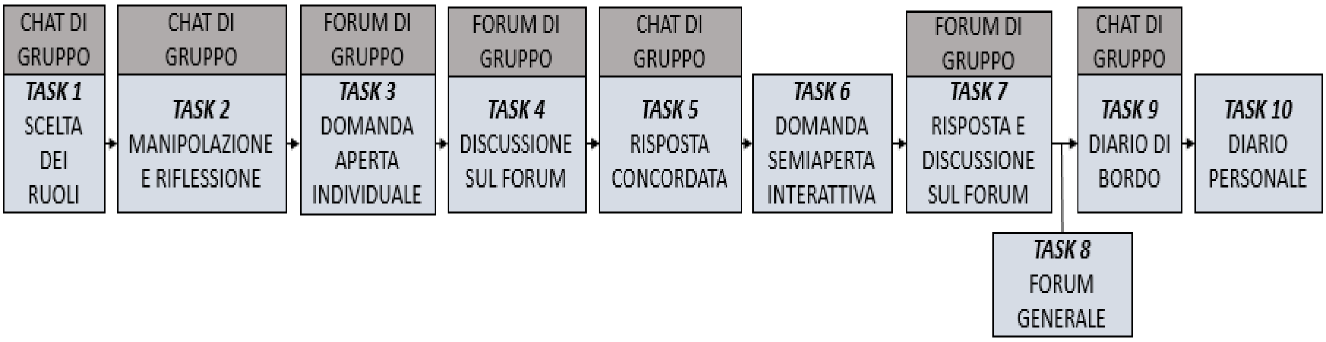


Figura 2 – Disegno dello script Capitolo 1

Per favorire il coinvolgimento di tutti i membri del gruppo, abbiamo disegnato una componente sociale (Task 1 – Scelta dei ruoli) che prevede la negoziazione e la scelta, attraverso la Chat di Gruppo, di un ruolo per ciascun partecipante, tra quattro possibili: Capitano, Ufficiale Scientifico, Ufficiale di Rotta e Ufficiale delle Comunicazioni. In caso di gruppi con un numero di studenti inferiore a 4, uno o più studenti assumeranno più ruoli. Il Capitano media la social literacy, cioè la capacità di gestire il gruppo da un punto di vista sociale. Come leader del gruppo, ha il compito di promuovere la partecipazione di tutti i compagni nelle discussioni e nei processi decisionali. L'Ufficiale Scientifico media la math literacy, ossia la capacità di risolvere i quesiti matematici posti nel corso della storia. Il suo compito non è di farsi carico della risoluzione dei quesiti matematici, ma piuttosto di raccogliere e sintetizzare i contributi di ciascuno alla risoluzione comune. L'Ufficiale di Rotta media la digital literacy, cioè la capacità di utilizzare in modo efficace strumenti ICT e di supportare i compagni nell'utilizzo di tali strumenti. L'Ufficiale delle Comunicazioni media la blog literacy, ossia la capacità di sintetizzare i discorsi dei compagni e formalizzarli attraverso social media, proponendo così un interessante utilizzo didattico del blog (Bruni, 2009). La ripartizione dei ruoli avviene in piattaforma mediante la discussione in chat e una Scelta (di Moodle) limitata (un solo utente per ciascuna opzione) visibile a tutti e modificabile. A seconda del ruolo scelto, allo studente vengono fornite opportune informazioni sui compiti da svolgere nei vari task. La presenza dei ruoli non è legata all'attività argomentativa in senso stretto, ma piuttosto all'efficacia della collaborazione, attraverso la responsabilizzazione di ciascun partecipante, e quindi al coinvolgimento di ciascun attore (Albano, Dello Iacono, Mariotti, 2016).

Il Task 2 (Manipolazione e riflessione) prevede l'interazione con una costruzione GeoGebra interattiva volta a indagare e risolvere un problema posto dalla storia, attraverso una DGI (domanda grafica interattiva) (Dello Iacono, 2015), che prevede l'interazione dello studente con un "oggetto grafico" e la cui risposta consiste nel trovare una opportuna configurazione dell'oggetto, attraverso la manipolazione dello stesso.

Nel caso di studio il quesito riguarda l'invarianza dell'ampiezza dell'angolo di un settore circolare rispetto alla variazione del raggio della circonferenza. Più precisamente, la domanda posta è: "*La sonda ha comunicato che la percentuale di roccia rossa attualmente trovata sul nuovo pianeta è il 20%. In basso trovate questa informazione rappresentata in un aerogramma, ma il raggio della circonferenza è troppo piccolo e, quando ci troveremo ad aggiungere i dati delle altre rocce, il grafico risulterà poco chiaro. Prova ad utilizzare un raggio più grande per rappresentare la stessa percentuale*". La risposta richiede che lo studente manipoli lo slider per la scelta del raggio (Figura 3) . In tal modo il cerchio sarà automaticamente modificato di conseguenza. Lo studente dovrà poi decidere se e in che modo muovere i punti sulla circonferenza per rappresentare la stessa percentuale. Questo richiede che converta il dato 20% nell'ampiezza dell'angolo del settore e stabilisca se l'angolo rappresentato inizialmente resta lo stesso o cambia.

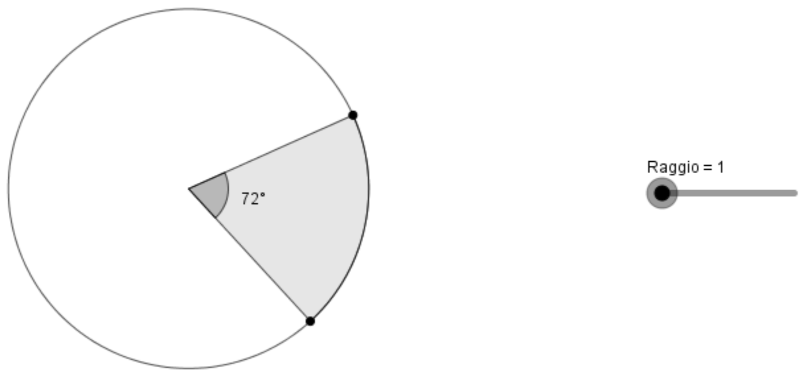


Figura 3 – Costruzione GeoGebra presente nel Task 2

Questo task è una componente prevalentemente epistemica dello script, poiché la manipolazione richiesta supporta il problem solving e suggerisce strategie risolutive. La DGI prevede tre tipi di configurazioni: esatta, errata, semi-esatta, e in funzione di ciò l'applicazione restituisce un codice generato dinamicamente, che lo studente deve inserire nella text box della risposta breve della Lesson. Questo codice viene utilizzato per presentare allo studente un nuovo stimolo, nell'ottica della doppia stimolazione di Vygotsky (1986), che lo aiuti nella risoluzione della situazione problematica, rendendo accessibili i processi interni che restano nascosti quando le risorse esterne non sono mobilitate. Nel task allo studente viene presentata una domanda aperta personalizzata volta a favorire la riflessione. In caso di risposta semi-esatta o errata, l'obiettivo è di portare lo studente a indagare le ragioni delle scelte alla base della sua risposta; in caso di risposta esatta, lo scopo è di focalizzare l'attenzione dello studente sulla non univocità della risposta corretta. La domanda aperta di riflessione, così come è disegnata, è una componente epistemica, poiché, spingendo lo studente verso un meccanismo di autoregolazione, suggerisce implicitamente strategie risolutive.

Nel Task 3 (Domanda aperta individuale) lo studente è chiamato a generalizzare l'esperienza e i risultati precedenti, rispondendo a una domanda aperta: "Come varia l'angolo della parte colorata al variare del raggio? Motiva la tua risposta" (Figura 3). Lo studente dovrà rispondere attraverso il forum Domande e Risposte che, per sua natura, oltre a garantire l'autonomia e la parità di condizioni, incentiva la partecipazione. La richiesta di generalizzazione è un compito che può indurre ad elaborare argomenti a supporto della correttezza di una risposta e favorisce l'emergere di argomentazioni. Anche questo task è una componente sia argomentativa che epistemica. Infatti, se da un lato, cerca di favorire la produzione di argomentazioni individuali, dall'altra avvia processi metacognitivi che implicitamente potrebbero indicare allo studente una strategia risolutiva.

Dopo che tutti hanno fatto il proprio intervento sul Forum, la discussione continua con l'obiettivo di concordare una risposta comune, restando nello stesso forum (Task 4 – Discussione sul forum). Quest'ultima scelta garantisce sia il completamento della fase precedente, perché, se lo studente non posta la propria risposta personale, non può partecipare alla discussione successiva, sia l'avvio a una comunicazione più colta, a differenza della Chat che sottintende un linguaggio più colloquiale. È una componente sociale poiché media l'interazione all'interno del gruppo e la discussione, ma è anche una componente argomentativa ed epistemica poiché mira a favorire attività argomentative da cui possono scaturire processi risolutivi.

La risposta concordata, corredata di motivazione, viene restituita dagli studenti come consegna collettiva di un Compito (Task 5 – Risposta concordata). In tal modo, ognuno può effettuare delle modifiche, ma tutti devono dare il proprio assenso per chiudere la consegna. È una componente sociale poiché va a rafforzare l'interazione nel gruppo.

Nel Task 6 (Domanda semiaperta interattiva), allo studente viene chiesto di riformulare individualmente la risposta argomentata, precedentemente consegnata, attraverso la composizione di tessere rese disponibili: "A quanto pare, ragazzi, gli altri scienziati vogliono una risposta più breve. Vi ricordo la questione. Avete considerato circonferenze di raggio diverso sulle quali rappresentare sempre la stessa percentuale di roccia (nel nostro caso roccia rossa 20%). Vi è stato chiesto cosa potete dire del raggio e perché. Ora, per arrivare ad una risposta breve, come richiesta dagli scienziati, utilizzate i blocchi di parole predefiniti che trovate nella costruzione qui sotto”. La Figura 4 mostra le tessere costruite per il caso in esame.

all'area del cerchio,	dato che	con il raggio,	il cerchio	è inversam. proporz.
con il raggio	proporzionale	è direttam. proporz.	al 20% dell'angolo giro,	siccome
deve avere	l'angolo non varia	alla circonferenza,	l'angolo diminuisce	allora diminuisce
la parte colorata	l'angolo è sempre pari	diventà più grande	la stessa area	allora aumenta
poiché	all'area del cerchio	al 20% dell'angolo giro	l'angolo aumenta	perché
alla circonferenza	è sempre pari	diventa più piccolo	allora non cambia	il cerchio,

Figura 4 – Tessere rese disponibili nel Task 6

L’obiettivo è quello di supportare lo studente nel passaggio verso un registro ancor più evoluto, più vicino ad un linguaggio condiviso dalla comunità scientifica e matematica. Questo è stato possibile grazie ad un’applicazione GeoGebra, denominata DSI (domanda semiaperta interattiva) (Dello Iacono, 2015), che permette la gestione di varie tessere. Ogni congiunzione causale costituisce una singola tessera in modo tale da evidenziare la struttura causale di un’argomentazione. Aggregando opportunamente le tessere, lo studente costruisce un enunciato composto da una proposizione principale (risposta alla domanda), una subordinata (motivazione), unite tra loro da una congiunzione causale (perché, poiché, dato che, siccome, …).

L’applicazione riconosce enunciati di tipo causale, quindi è in grado di stabilire l’equivalenza tra congiunzioni diverse e l’equivalenza tra le seguenti due tipologie di enunciati:

– *proposizione principale - congiunzione causale - proposizione subordinata;*
– *congiunzione causale - proposizione subordinata - proposizione principale.*

Questa varietà possibile da un lato offre allo studente un certo grado di libertà nell’esprimersi e da un altro lato evidenzia il ruolo fondamentale che la congiunzione assume per creare la tessitura di una frase. Nell’ottica della gestione automatica delle domande a risposta aperta, la DSI può essere un’ottima alternativa, a condizione che le tessere vengano scelte quanto più vicine al linguaggio e al pensiero reale dello studente in una situazione simile. Questo task è una pura componente argomentativa.

La piattaforma è in grado di riconoscere in maniera automatica la correttezza dell'enunciato, valutando la correttezza dei blocchi che formano le due proposizioni legate dalla congiunzione causale. Lo studente deve riportare nel Forum di gruppo Domande e Risposte (Task 7 – Risposta sul forum e discussione) la frase costruita con i blocchi-parole, insieme a ulteriori spiegazioni del proprio ragionamento che viene invitato a fornire. Solo in caso di enunciato esatto, la piattaforma fornisce un feedback di correttezza attribuendo allo studente il bollino di Campione e il compito di aiutare i compagni in difficoltà. Questa prima parte del task, quindi, è una componente argomentativa. La successiva discussione di confronto, che viene attivata, può generare una strategia risolutiva e, dunque, si tratta anche di una componente sociale ed epistemica.

A questo punto viene attivato il Forum generale, condiviso tra tutti gli utenti, dove ciascuno può chiedere aiuto e porre domande, mentre i Campioni hanno il compito di aiutare (Task 8 – Forum generale). Come ulteriore supporto, in questo forum è prevista la presenza di un Tutor (che può essere il docente). Il Forum generale resta sempre attivo, anche dopo la fruizione dell'attività, al fine di far avviare in maniera spontanea delle discussioni. L'interazione prevista tra studenti, Campioni e Tutor, allo scopo di chiedere/ricevere spiegazioni e indicazioni per la risoluzione del quesito, supportate da opportune argomentazioni, rende questo task una componente di script epistemico, argomentativo e sociale contemporaneamente.

Tutti collaborano alla redazione del wiki (Task 9 – Diario di bordo*)*: l'Ufficiale delle Comunicazioni coordina i compagni ed è responsabile dell'attività di scrittura collaborativa, l'Ufficiale di Rotta lo aiuta nella compilazione del diario, l'Ufficiale Scientifico sintetizza e il Capitano supervisiona l'intera operazione. Il Diario di bordo di gruppo accompagna il team per l'intera missione e va nella direzione della condivisione e del confronto, in coerenza con lo spirito dell'intero script.

Nel Diario personale lo studente scrive le sue impressioni sull'attività, le difficoltà incontrate e il modo in cui le ha superate (Task 10 – Diario personale). È implementato come una o più domande a testo aperto, incluse nella Lesson, volte a favorire la meta-cognizione, e quindi costituisce una componente di script epistemico.

5. Caso pilota, metodologia e strumenti di analisi

Il Frame di Introduzione e il Capitolo 1 del DIST-M, disegnato per il caso specifico, sono stati sperimentati in uno studio pilota che ha coinvolto una classe seconda del Liceo Classico annesso all'Istituto di Istruzione Superiore "Virgilio" di San Giorgio del Sannio (BN).

Sono stati coinvolti 11 studenti, divisi in 4 gruppi, di cui 3 di 3 membri ed uno di 2 membri. Nei gruppi da 3, uno studente ha assunto 2 ruoli (Task 1), mentre nel gruppo di 2 membri, ogni studente ha giocato 2 ruoli. Gli studenti sono stati suddivisi in gruppi in maniera casuale dal ricercatore, ciascuno studente ha lavorato al proprio pc e i membri di uno stesso gruppo hanno comunicato tra loro solo attraverso gli strumenti della piattaforma. Il ricercatore ha supportato gli studenti nella fase iniziale di accesso alla piattaforma fornendo le indicazioni preliminari ed ha osservato lo svolgersi dell'attività. Ciascuno studente ha avuto accesso alla piattaforma disponendo di username e password in modo da risultare anonimo nello svolgimento dell'attività (in piattaforma è stato visualizzato soltanto il suo username).

Abbiamo scelto di analizzare i protocolli del caso pilota, assumendo un approccio linguistico, dato che il focus del DIST-M implementato è sulla produzione di argomentazioni verbali. Abbiamo quindi guardato innanzitutto all'argomento come a un testo scritto. Nel nostro caso tale testo riguarda una comunicazione scientifica, che è una comunicazione coesa, oltre ad essere coerente in un registro colto (Ferrari, 2004), quindi è ipotizzabile che la costruzione di testi di coesione sia il primo passo verso lo sviluppo di argomenti logicamente accettabili.

La coesione testuale è ciò che consente di creare la trama di un testo, rendendolo tale piuttosto che un insieme disorganizzato di parole e frasi (Halliday & Hasan, 1976). Si tratta, quindi, di legami e connessioni sintattiche e grammaticali che fanno percepire un testo come un'unica entità e non come un insieme di diversi enunciati. Questi strumenti linguistici la rendono una caratteristica oggettiva del testo, a differenza della coerenza che è invece un processo mentale, proprio dei soggetti coinvolti nel discorso. Un testo risulta coerente se c'è continuità di senso tra gli enunciati che lo compongono, e tale continuità di senso, però, dipende da chi scrive e da chi interpreta il testo, a partire dalle proprie conoscenze complessive.

Nell'analizzare la coesione dei testi prodotti dagli studenti siamo andati a osservare la presenza di particolari risorse che aiutano a creare la coesione: le ripetizioni lessicali, le ripetizioni grammaticali e le congiunzioni. La ripetizione lessicale consiste nella ripetizione di parole. È una forma di coesione molto potente e viene utilizzata spesso per sottolineare o rafforzare un concetto, oppure per far capire che le frasi considerate parlano delle stesse cose. È frequente nel discorso spontaneo poiché si ha poco tempo per pianificare l'enunciato. La ripetizione grammaticale può essere di due tipi, riferimento ed ellissi. Il riferimento serve per segnalare se un termine si ripete da qualche parte in precedenza nel testo (vale a dire che già è stato detto) o se non è ancora apparso nel testo (vale a dire che è nuovo). L'ellissi si ha quando la ripetizione di uno o più termini può essere evitata. Può essere di due tipi: propria e sostitutiva. L'ellissi propria si ha quando una parte della frase è semplicemente omessa. L'ellissi sostitutiva si ha quando un'espressione generica ne sostituisce una più lunga. Infine, si parla di congiunzione quando due parti qualunque del discorso sono collegate da parole che hanno quella funzione specifica. La congiunzione può essere esterna, quando riflette uno stato di fatto, interna, quando è riferita esclusivamente all'organizzazione del testo.

6. Analisi di protocolli

Analizziamo i risultati della sperimentazione pilota dello script Capitolo 1, per ciascun gruppo di studenti, confrontando le produzioni nei vari task, così da vedere l'influenza delle diverse componenti di script sulla produzione di argomentazioni. A tal fine, guardiamo le produzioni scritte nel Task 2 – parte 2 (Domanda di riflessione), nel Task 3 (Domanda aperta individuale) e nel Task 7 (Risposta sul forum), sia da un punto di vista quantitativo che da un punto di vista qualitativo. Per ciascuna produzione scritta, vediamo se ci sono argomentazioni e, in tal caso, osserviamo la loro qualità in termini di coerenza e coesione linguistica. Assegniamo un livello ad ogni produzione, secondo la seguente legenda:

0, se non vi è alcuna argomentazione;

1, se c'è un'argomentazione implicita, ma con pochi marcatori di coesione; un'argomentazione è da ritenersi implicita quando richiede, per essere compresa, la collaborazione di un lettore esperto e competente. Sono omessi passaggi argomentativi o non sono esplicitati in maniera chiara ed evidente.

2, se la scrittura è coesa e coerente, ma l'argomentazione rimane in qualche misura implicita, nel senso che non tutti i passaggi argomentativi sono presentati in modo adeguato. Tale livello viene, in questa ricerca, considerato come un livello sufficiente di argomentazione;

3, se la scrittura consiste in un testo, percepito come coerente e ben coeso, e l'argomentazione è esplicita, ossia, per essere compresa, richiede la collaborazione di un lettore non necessariamente esperto.

È chiaro che dire fin dove sia necessaria o meno la collaborazione di un lettore esperto non è facile da definire. Pertanto la differenza tra i livelli 1 e 2 deve ricercarsi principalmente nella formulazione testuale, che in qualche modo aiuta l'esplicitazione degli argomenti.

La tabella 1 riassume i risultati secondo la precedente legenda, per ogni studente, etichettato come S #:

Task\Group	1	2	3	4
2	S1: 1 S2: 2 S3: 0	S4: 0 S5: 0 S6: 1	S7: 0 S8: 1 S9: 0	S10: 1 S11: 1
3	S1: 0 S2: 2 S3: 1	S4: 0 S5: 1 S6: 2	S7: 0 S8: 2 S9: 0	S10: 2 S11: 2
7	S1: 2 S2: 3 S3: 2	S4: 1 S5: 2 S6: 2	S7: 2 S8: 3 S9: 2	S10: 3 S11: 3

Tabella 1 – Livelli di argomentazione per ciascuno studente nei Task 2, 3 e 7

I dati in tabella mostrano un debole miglioramento dal Task 2 al Task 3, cioè nel passaggio tra la riflessione nel caso particolare e la generalizzazione. Solo pochi studenti, nel Task 3, sono in grado di argomentare ad un livello sufficiente (livello 2), alcuni non producono alcun tipo di argomentazione (livello 0) e nessuno produce un'argomentazione esplicita, coerente e coesa (livello 3). Tuttavia, un lieve miglioramento si evince ed è da attribuire alla domanda di riflessione (Task 2 – parte 2), che induce processi metacognitivi nello studente.

Vediamo alcuni protocolli relativi al gruppo 1 (Tabella 2). Tutti gli studenti di questo gruppo hanno risposto in maniera esatta alla Domanda Grafica Interattiva (DGI) (Task 2 – parte 1), che richiedeva di rappresentare graficamente una certa quantità in un aerogramma. Nella fase di riflessione (Task 2 – parte 2) viene chiesto allo studente chiede se cambia qualcosa nell'areogramma scegliendo un raggio diverso da quello preso in considerazione nella DGI.

Task	S#	Protocollo	Analisi
2	S1	Non cambierebbe nulla perché le percentuali e i gradi sono sempre gli stessi.	Argomentazione implicita (lo studente non chiarisce il perché le *percentuali* e i *gradi* sono sempre gli stessi) e una sola congiunzione esterna ("perché")
	S2	Non cambia nulla, perché con l'aumentare del raggio, è soltanto la grandezza della circonferenza crescere, dunque i gradi sono sempre gli stessi.	Due congiunzioni esterne ("perché", "dunque"), argomentazione non del tutto esplicita (lo studente non chiarisce perché *i gradi sono sempre gli stessi)*
	S3	Aumenta il raggio ma l'ampiezza è invariata.	Nessuna argomentazione
3	S1	L'angolo rimane sempre uguale al variare del raggio	Nessuna argomentazione
	S2	La parte colorata aumenta con l'aumentare della circonferenza, ma l'angolo rimane costante (72°) e lo stesso la percentuale (20%)	Due congiunzioni esterne ("ma", "e"), argomentazione più esplicita rispetto alla precedente, ma ancora non chiara (lo studente esplicita i gradi dell'angolo e le percentuali ma non spiega perché *restano costanti*)
	S3	Non cambia nulla in quanto i gradi, all'aumentare o al diminuire della circonferenza restano uguali	Argomentazione implicita (lo studente non chiarisce perché *i gradi restano uguali)* e solo una congiunzione esterna ("in quanto").

Tabella 2 – Protocolli del gruppo 1 nei Task 2 e 3

La Tabella 1 mostra, inoltre, un miglioramento significativo dal Task 3 al Task 7, entrambi richiedenti allo studente di rispondere alla medesima domanda, rispettivamente, prima e dopo le attività esplicitamente sociali (Task 4 e 5) e la DSI (Task 6). Questo miglioramento sembra possa essere attribuito sia alla fase di collaborazione (Task 4 e Task 5) e sia al componente puramente argomentativo dello script (Task 6).

Vediamo alcuni protocolli, sempre del gruppo 1 (Tabella 3). Tutti gli studenti costruiscono argomentazioni ad un livello sufficiente (livello 2) e, in particolare, lo studente S2, che raggiunge un livello 3.

Task	S#	Protocollo	Analisi
7	S1	L'angolo non varia dato che è direttamente proporzionale alla circonferenza dato che all'aumentare della circonferenza la percentuale dell'angolo non varia perché i gradi sono sempre 360.	Lo studente, oltre la frase costruita con le tessere (prima parte), aggiunge ulteriori spiegazioni, anche se con argomenti impliciti (non spiega in maniera chiara perché l'*angolo non varia*), con presenza di due congiunzioni esterne ("dato che", "perché") e due ripetizioni lessicali ("angolo", "circonferenza").
	S2	L'angolo è direttamente proporzionale alla circonferenza e dunque non varia. Con l'aumentare del raggio, vi è un aumento della grandezza della circonferenza, ma non dell'ampiezza dell'angolo all'interno. I gradi della circonferenza sono sempre 360 e la percentuale totale sempre 100. Quindi, qualsiasi cambiamento si voglia apportare alla grandezza della circonferenza, l'angolo rimarrà sempre stabile e fisso.	Lo studente, oltre la frase costruita con le tessere (prima parte), aggiunge spiegazioni riferite ad argomenti espliciti, con presenza di due congiunzioni esterne ("ma", "quindi"), una ellissi sostitutiva ("ma non dell'ampiezza" invece che "ma non c'è un aumento dell'ampiezza"), diverse ripetizioni lessicali ("angolo", "circonferenza").
	S3	l'angolo non varia poiché è direttamente proporzionale all'area del cerchio poiché all'aumentare della circonferenza, l'angolo resta invariato. L'ampiezza dell'angolo non muta poiché il raggio non si muove ma si aumenta solamente.	Lo studente, oltre la frase costruita con le tessere (prima parte), aggiunge ulteriori spiegazioni, anche se con argomenti impliciti (cerca di chiarire esplicitamente il perché l'angolo *non muta*, ma fa riferimento al movimento del raggio piuttosto che all'angolo) con presenza di due congiunzioni esterne ("poiché", "poiché"), una ripetizione lessicale ("angolo")

Tabella 3 – Protocolli del gruppo 1 nel Task 7

Osserviamo che il Task 6 pare abbia fatto rilevare agli studenti la richiesta di esplicitazione del proprio pensiero, come si può vedere dai dialoghi del gruppo 1 nella chat:

S3: la spiegazione?
S1: il ragionamento
S3: che scriviamo?
S2: fammi pensare
S1: vai vai
S2: credo che il raggio è direttamente proporzionale alla ...
NON LO SO :'((((((((

Non sembra casuale che S2 sia lo studente più impegnato nel ragionamento, infatti già nel Task 3 aveva già dato un argomento, seppur implicito. Osserviamo che la crisi di S2, nel non riuscire a esprimere attraverso le tessere il suo pensiero, mette in evidenza delle carenze cognitive, di cui prende consapevolezza grazie dal Task 6, come si può leggere nel suo Diario personale:

Ho avuto delle difficoltà perché la grandezza della circonferenza avrebbe potuto essere qualsiasi. E la risposta dei blocchi, sapevo di averla sbagliata, ma ho giustificato il ragionamento dopo (vedi Tabella 3).

Ci sembra interessante riportare il Diario di Bordo del gruppo 1, perché dà evidenza di un processo metacognitivo frutto del lavoro di gruppo e mostra come questo lavoro abbia in effetti trasferito il ruolo di mediatore tanto allo script quanto ai pari:

"Abbiamo iniziato il capitolo 1 analizzando l'areogramma riportato. Dopo una serie di procedimenti motivati poi da una spiegazione siamo arrivati alla conclusione di una teoria comune ovvero: l'angolo non varia poiché all'aumentare l'angolo non varia poiché è direttamente proporzionale all'area del cerchio. L'angolo è direttamente proporzionale alla circonferenza e dunque non varia. Con l'aumentare del raggio, vi è un aumento della grandezza della circonferenza, ma non dell'ampiezza dell'angolo all'interno. I gradi della circonferenza sono sempre 360 e la percentuale totale sempre 100. Quindi, qualsiasi cambiamento si voglia apportare alla grandezza della circonferenza, l'angolo rimarrà sempre stabile e fisso".

Quanto sopra riportato sembra evidenziare un processo metacognitivo messo in atto dal gruppo durante il lavoro collaborativo. Gli studenti, infatti, guardando all'esperienza pregressa, si rendono conto della necessità di giustificare il proprio ragionamento e la fase collaborativa li porta al raggiungimento di una *teoria comune*.

Possiamo osservare come S2 agisca da esperto del gruppo e le sue interazioni con i compagni favoriscono un miglioramento nella produzione di argomenti da parte di ciascuno.

Lo script, con il focus sulla competenza argomentativa, sembra aver avuto successo. Tuttavia c'è da osservare che il gruppo non è stato in grado di fornire una risposta corretta dal punto di vista matematico. Guardando ai protocolli infatti, sembra che gli studenti abbiano raggiunto una comprensione intuitiva della matematica, ma risultano carenti di alcuni contenuti (come il concetto di proporzionalità diretta).

Altri gruppi mostrano risultati simili a quelli del gruppo 1. Se analizziamo, ad esempio, i protocolli del gruppo 2 relativi al Task 2 e 3 (Tabella 4), possiamo osservare anche in questo caso un leggero miglioramento, ma non significativo.

Task	S#	Protocollo	Analisi
2	S4	non cambia niente perché l'angolo rimane sempre lo stesso.	Nessuna argomentazione, una sola congiunzione esterna ("perché")
	S5	No	Nessuna argomentazione
	S6	No, non cambierebbe perché non importa quanto il raggio sia grande, la percentuale arriva sempre a cento, non aumenta	Argomentazione implicita (pur facendo riferimento alla percentuale, si riferisce al totale e non al settore), una congiunzione esterna ("perché") ed una ellissi propria ("la percentuale").
3	S4	l'angolo della parte colorata al variare del raggio cambia per la misura del raggio	Non c'è argomentazione
	S5	non cambia nulla perché aumenta solo il raggio e i gradi dell'angolo sono sempre gli stessi	Argomentazione implicita (pur facendo riferimento al raggio e ai gradi, non chiarisce il perché l'angolo non cambia), una congiunzione esterna ("perché")
	S6	L'angolo non varia perché il valore è sempre di 360°, quindi la parte colorata rimane costante anche all'aumentare o al diminuire del raggio.	Quattro congiunzioni esterne ("perché", "quindi", "anche", "o"), argomentazione non del tutto esplicita (fa riferimento all'ampiezza dell'angolo giro ma non a quella del settore)

Tabella 4 – Protocolli del gruppo 2 nei Task 2 e 3

I protocolli mostrano un lieve miglioramento, in particolare per lo studente S6, che raggiunge un livello di argomentazione sufficiente (livello 2 nella Tabella 1).

Un miglioramento più significativo, invece, è possibile osservarlo per il gruppo 2 nel passaggio dal Task 3 al Task 7, ossia successivamente alla fase collaborativa e alla DSI (Tabella 5).

Task	S#	Protocollo	Analisi
7	S4	l'angolo rimane costante perché è direttamente proporzionale all'area del cerchio. L'angolo non cambia poiché è sempre proporzionale all'area del cerchio.	Lo studente cerca di andare oltre la frase costruita con le tessere (prima parte), e cerca di aggiungere spiegazioni, ripetendo, in realtà, quanto già affermato. Nella seconda parte, una congiunzione esterne ("poiché"), due ripetizioni lessicali ("angolo", "area del cerchio")
	S5	l'angolo non varia poiché è direttamente proporzionale alla circonferenza. Con l'aumentare della circonferenza l'angolo non cambia. L'ampiezza dell'angolo rimane la stessa perché non si sposta il raggio ma si aumenta solamente.	Lo studente va oltre la frase costruita con le tessere (prima parte), e aggiunge spiegazioni che si riferiscono ad argomenti non del tutto espliciti (non spiega in maniera chiara perché il raggio *aumenta solamente* senza *spostarsi)*. Nella seconda parte, due congiunzioni esterne ("perché", "ma"), una ripetizione lessicale ("angolo")
	S6	ho scritto che l'angolo non cambia poiché è sempre proporzionale all'area del cerchio perché i gradi sono 360, L'angolo non varia perché l'ampiezza è sempre di 360° quindi anche se aumentiamo il raggio del cerchio l'angolo rimane uguale.	Lo studente va oltre la frase costruita con le tessere (prima parte), aggiungendo molte spiegazioni riferite ad argomenti non del tutto espliciti (fa riferimento all'angolo giro, all'aumento del raggio, ma non spiega in maniera chiara perché l'angolo non varia). Nella seconda parte, tre congiunzioni esterne ("perché", "perché", "quindi"), una ellissi sostitutiva ("l'ampiezza è sempre" invece che "l'ampiezza dell'angolo è sempre"), diverse ripetizioni lessicali ("angolo", "cerchio").

Tabella 5 – Protocolli del gruppo 2 nel Task 7

Tutti gli studenti, ad esclusione di S4, costruiscono argomenti ad un livello sufficiente, ma nessuno raggiunge il livello 3 di argomentazione, anche se lo studente S3 si avvicina molto. Come già osservato per il gruppo 1, tale miglioramento sembra essere conseguenza della fase di collaborazione (Task 4 e Task 5) e della componente puramente argomentativa di script (Task 6). Quest'ultima, in particolare, ha fatto osservare che era esplicita la richiesta di argomentazione. Infatti, nella Risposta Concordata (Task 5), l'Ufficiale delle Comunicazioni del gruppo scrive:

l'angolo non varia, rimane costante all'aumentare e diminuire del raggio

senza argomentare.

Nella chat di gruppo, in prossimità del Task 5, possiamo osservare come il gruppo sia arrivato a tale formulazione:

S6: quale risposta diamo?
S7: cosa volete scrivere come risposta comune
S6: forse che il raggio non cambia
S7: troppo corta
S6: e tu che vuoi mettere
S6: weee che vogliamo scrivere
S7: l'angolo non varia, rimane costante anche all'aumentare o al diminuire del raggio.
S7: vi piace
S8: sisn ya
S7: okay allora andiamo avanti
S6: okay

Osserviamo che c'è stata effettiva collaborazione all'interno del gruppo e la risposta è stata realmente concordata tra i membri del gruppo. Nonostante ciò, nessuno all'interno del gruppo ha osservato o fatto osservare che c'era la richiesta esplicita di argomentazione.

È possibile osservare, guardando alla chat relativa al Task 6 (DSI- componente argomentativa di script), che, anche in questo caso, la DSI ha creato negli studenti la necessità di argomentazione:

S6: e ora
S4: come l'avete fatta?
S4: come avete scritto il ragionamento

Osserviamo anche il Diario di bordo del gruppo 2:

la nostra guida ci ha chiesto perché l'angolo di 72° non cambia se l'area aumenta. Io e i miei compagni abbiamo cercato di rispondere in vari modi e dalla discussione affrontata abbiamo concluso che l'angolo non varia perché l'ampiezza del cerchio è sempre di 360° e, inoltre, il raggio aumenta ma l'angolo rimane costante, non dipende dal raggio.

È interessante notare che gli studenti, in questo testo, non parlano più di diretta proporzionalità, concetto ripreso da tutti gli studenti nelle proprie argomentazioni (Tabella 4). Il testo riportato nel Diario di Bordo sembra essere effettivamente risultato della collaborazione all'interno del gruppo ("*Io e i miei compagni...*") e delle discussioni ("*...dalla discussione affrontata abbiamo concluso che*..."), supportate dalle componenti sociali dello script e dallo storytelling ("*la nostra guida ci ha chiesto*...").

Quanto sia stata importante la collaborazione per i membri di questo gruppo è possibile osservarlo anche dai Diari personali (Task 10) e, in particolare, dal Diario di S7:

Con il mio gruppo abbiamo affrontato le varie attività, con alcune difficoltà nella comprensione, ma avendole sempre superate.

7. Conclusioni

In questo lavoro abbiamo presentato una metodologia per l'apprendimento basato su competenze, con particolare riferimento alla matematica, tenendo ben presente le dimensioni comunicative e relazionali, in un ambiente di e-learning, denominata DIST-M. Abbiamo analizzato un caso implementato per favorire in modo particolare la competenza argomentativa. Tale metodologia si basa su un'idea modulare, dove il ruolo fondamentale è giocato dalla progettazione fine di script collaborativi. Abbiamo esaminato nel dettaglio uno script volto a supportare il passaggio da pratiche di problem solving alla produzione di testi argomentativi a supporto della risoluzione del problema, formulati in un registro colto tipico della comunicazione scientifica.

Il DIST-M, sfruttando le potenzialità di Moodle e dell'integrazione tra Moodle e GeoGebra, favorisce fortemente sia la collaborazione tra pari che il lavoro individuale e consente una personalizzazione dell'apprendimento.

Dall'analisi ci sembra interessante notare che le componenti sociali dello script hanno favorito la focalizzazione sul passaggio dall'investigazione all'argomentazione, cioè dal trovare la soluzione a un problema al comunicare tale soluzione corredandola di un argomento. La componente più squisitamente argomentativa (DSI –Task 6) ha permesso il passaggio da testi poco coesi a testi coesi, quindi verso un registro evoluto, che poi gli studenti possono far proprio, come si vede dal Task 7; questo ha favorito la riflessione e la comprensione di concetti matematici.

I protocolli di una sperimentazione pilota, analizzati in un'ottica linguistica, hanno mostrato un miglioramento del livello di argomentazione degli studenti, indipendentemente dalla correttezza matematica della soluzione trovata. È evidente la necessità di arrivare anche alla correttezza matematica e in questa direzione lo script presentato in questo articolo si inquadra come percorso preliminare. Infatti la comunicazione è una componente importante dell'apprendimento in matematica (Sfard, 2001) ed uno strumento essenziale per aiutare gli studenti in difficoltà. Certamente la coesione testuale non è necessariamente coerenza matematica, ma aiuta, anche nel far emergere specifici concetti matematici oggetto di difficoltà per lo studente. L'attività presentata è da considerarsi un passaggio del processo di apprendimento, che fornisce allo studente uno strumento metodologico (la comunicazione matematica) con cui può interagire con il docente per recuperare le proprie carenze di conoscenze in matematica

Il Task 8 dell'attività, che non abbiamo approfondito in questo lavoro, è dedicato proprio agli studenti che hanno prodotto argomenti non corretti dal punto di vista matematico. Tale task è fortemente basato su interazioni comunicative con un esperto istituzionale (tutor/docente) o con pari che hanno risposto correttamente al quesito a cui è stato dato il compito di aiutare gli studenti in difficoltà. Tali interazioni saranno tanto più efficaci dal punto di vista matematico quanto più il livello di comunicazione dello studente è alto, dal momento che la familiarità di uso di produzioni scritte in registri evoluti da parte dello studente favorisce l'acquisizione di un pensiero matematico avanzato (Ferrari, 2004).

Quanto trovato ci spinge proseguire nell'utilizzo della metodologia DIST-M per definire frame di livello successivo che approfondiscano l'acquisizione tanto di competenze argomentative, quanto di altre competenze ad esse correlate.

8. Bibliografia

Albano, G., Dello Iacono, U., Fiorentino, G. (2016). An online Vygotskian learning activity model in mathematics. *Journal of e-Learning and Knowledge Society*, 12(3).

Albano, G., Dello Iacono, U., Mariotti, M. A. (2016). Argumentation in mathematics: mediation by means of digital interactive storytelling. *Form@re*, 16(1), 105-115.

Baker, M. (2003). Computer-mediated argumentative interactions for the co-elaboration of scientific notions. In J. Andriessen, M. Baker, & D. Suthers (Eds.), *Arguing to learn: confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments* (Vol. 1, pp. 1-25). Dordrecht: Kluwer.

Brune, J. S. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge, MA – London: Harvard University Press.

Bruni, F. (2009*). Blog e didattica. Una risorsa del web 2.0 per i processi di insegnamento*. Macerata: EUM.

Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, 13, 145-181.

Dello Iacono, U. (2015). Un modello di attività vygotskijana integrando Moodle e GeoGebra. In Rui *et al.*, *Teach Different! Proc. of EMEMITALIA2015*. Genova: Genova University Press, pp. 243-246.

Engerström, Y. (1987). *Learning by espanding. An Activity Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

Ferrari, P.L. (2004). Mathematical Language and Advanced Mathematics Learning. In Johnsen Høines, M. & Berit Fuglestad, A. (Eds.). *Proceedings 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.383-390). Bergen, Norway: PME.

Halliday, M. A., & Hasan, R. (1976). *Cohesion in English*. London: Longman.

King, A. (2007). Scripting collaborative learning processes: A cognitive perspective. In: F. Fischer, I. Kollar, H. Mandl, & J. Haake (Eds.). *Scripting computer-supported collaborative learning: Cognitive, computational and educational perspectives* (pp. 13-37). New York: Springer.

Kuhn, D., Shaw, V., & Felton, M. (1997). Effects of dyadic interaction on argumentative reasoning. *Cognition and Instruction*, 15(3), 287-315.

Lambert, J. (2002). *Digital Storytelling: Capturing Lives, Creating Community*. Berkeley (CA): Digital Diner Press.

Laurillard, D. (2013). T*eaching as a design science: Building pedagogical patterns for learning and technology.* New York: Routledge.

Mariotti, M. (2015). Spiegare, argomentare e dimostrare: un nodo dell'educazione matematica. *Atti di convegno "La didattica della matematica, disciplina per l'apprendimento"*, Castel San Pietro, 2015.

Marrone, G. (2005). *Il fumetto fra pedagogia e racconto*. *Manuale di didattica dei comics a scuola e in biblioteca* (Vol. 5). Latina: Tunué.

Ohler, J. (2008). *Digital Storytelling in the Classroom*. Thousand Oaks (CA): Corwin Press.

Petrucco, C., & De Rossi, M. (2009). *Narrare con il digital storytelling a scuola e nelle organizzazioni*. Carocci: Roma.

Rossi, P. G. (2005). *Progettare e realizzare il portfolio*. Roma: Carocci.

Schank, R. C, & Abelson, R. P. (1977). *Scripts, plans, goals and understandings*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. In *Proceedings of 21st Conference of PME-NA* (pp. 23-44). Columbus, OH: Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Turner, R., Adams, R. J. (2012). Some drivers of test item difficulty in mathematics: an analysis of the competency rubric. Paper presented at *AERA Annual Meeting*, April 2012, Vancouver, Canada.

Varisco, B. M. (2002). *Costruttivismo socio-culturale. Genesi filosofiche, sviluppi psico-pedagogici, applicazioni didattiche*. Roma: Carocci.

Varisco, B. M. (2004). *Portfolio. Valutare gli apprendimenti e le competenze*. Roma: Carocci.

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. Translation newly revised and edited by Alex Kozulin. Cambridge, Massachusetts; London, England: The MiT Press.

Weinberge, A., Kollar I., Dimitriadis, Y., Mäkitalo-Siegl, K., & Fischer, F. (2009). Computer-supported collaboration scripts. In *Technology-enhanced learning* (pp. 155-173). Springer Netherlands.

Weinberger, A., Stegmann, K., Fischer, F., & Mandl, H. (2007). Scripting argumentative knowledge construction in computer-supported learning environments. In *Scripting computer-supported collaborative learning* (pp. 191-211). New York: Springer.

Zan, R. (2011). The crucial role of narrative thought in understanding story problem. In Kislenko, K. (Ed.) Current state of research on mathematical beliefs, *Proceedings of the 16th MAVI* (Mathematical Views) Conference (pp. 331-348). Tallinn.

Received October 9, 2017
Revision received November 23, 2017 / December 11, 2017
Accepted December 30, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 28-45 – ISSN 2038-1034

Sui processi di modellizzazione e di problem posing nell’insegnamento/apprendimento della Matematica

Cinzia Bonotto

Abstract – *In order to introduce, at an early stage, ideas underpinning the process of realistic mathematical modelling, the activities currently used to create an interplay between mathematics taught in the classroom and everyday life experiences must be replaced with more realistic and less stereotyped problem situations. In this paper we will discuss how these changes can be brought about at primary school level through classroom activities that are more easily related to the experiential world of the pupil and consistent with a sense-making disposition. We will show how an extensive use of cultural or social artifacts could prove to be useful instruments in creating a new interplay between schoolroom mathematics and the real world with its incorporated mathematics, by bringing the pupil’s everyday-life experiences and informal reasoning into play. Finally certain artifacts lend themselves naturally to helping pupils with problem posing activities. The classroom activities are also based on the use of a variety of complementary, integrated, and interactive teaching methods, and on the introduction of new socio-mathematical norms, in an attempt to create a substantially modified teaching/learning environment.*

Riassunto – *Per introdurre precocemente idee che stanno alla base del processo di modellizzazione matematica di tipo realistico, si devono sostituire le attività, ora delegate a costituire un’interfaccia fra la matematica scolastica e la realtà extrascolastica, con attività più significative e meno stereotipate. In questo contributo discuteremo come questi cambiamenti possano essere realizzati a livello di scuola primaria attraverso attività che sono più vicine alla realtà esperienziale del bambino e quindi più significative. Illustreremo come l’utilizzo di opportuni artefatti socio culturali può rivelarsi uno strumento utile nel creare un’interfaccia nuova tra la matematica scolastica e la realtà di ogni giorno, con la sua matematica incorporata, promuovendo l’insorgere di ragionamenti tipici delle esperienze extrascolastiche. Attività con opportuni artefatti possono infine favorire l’insorgere di processi di problem posing. Tali attività sono state caratterizzate anche dall’utilizzo di una varietà di metodologie didattiche tra loro complementari, integrate e interattive, e dall’introduzione di nuove ‘socio-mathematical norms’, al fine di creare un ambiente di apprendimento radicalmente diverso.*

Keywords – mathematical modelling, problem posing, artifacts, teaching experiments, primary school

Parole chiave – modellizzazione matematica, problem posing, artefatti, studi esplorativi, scuola primaria

Cinzia Bonotto è Professore Ordinario presso Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita” dell’Università di Padova per il settore MAT/04. Dopo essersi occupata di Logica matematica, i suoi interessi sono ora rivolti alle problematiche riguardanti l’insegnamento della matematica ai vari livelli scolastici e la formazione (iniziale e in servizio) degli insegnanti. Le sue ricerche sono orientate a indagare da un lato il rapporto tra matematica scolastica e matematica extrascolastica e dall’altro il ruolo che i Fondamenti e la Storia della matematica possono rivestire nell’insegnamento di questa disciplina. Da alcuni anni è direttore di un Corso di perfezionamento post lauream in “Metodologia e didattica della matematica” rivolto a insegnanti di scuola secondaria. Ora è Presidente del Centro Ricerche Didattiche “Ugo Morin” di Paderno del Grappa.

1. Introduzione

Molte ricerche hanno evidenziato una forte discontinuità fra la competenza matematica di tipo scolastico e quella che viene attivata in contesti extrascolastici.

Pur riconoscendo la specificità di entrambi i contesti (Resnick, 1987), ed alcune loro intrinseche ed ineliminabili diversità, riteniamo che altre differenze possano essere ridotte e che, nelle attività in classe, si possano e debbano ricreare, almeno parzialmente, quelle condizioni che rendono l'apprendimento extrascolastico più significativo e spesso più efficace.

Si sono quindi progettati e realizzati alcuni studi esplorativi, al fine di abbattere "*l'impermeabilità della membrana che separa l'esperienza della scuola e dell'aula da quella della vita*" (Freudenthal, 1994). In tali studi si è indagata la possibilità di creare una nuova tensione tra la matematica scolastica e la realtà extrascolastica, con la sua matematica incorporata, attraverso situazioni didattiche in cui oltre a *matematizzare il quotidiano* si cerca di *quotidianizzare la matematica* (Bonotto, 2007b).

In accordo con l'approccio della Realistic Mathematics Education si ritiene che il fulcro di tale cambiamento vada individuato nel concetto di "modellizzazione matematica" o "matematizzazione" della realtà.

Progressive mathematization should lead to algorithms, concepts, and notations that are rooted in a learning history that starts with students' informal experientially real knowledge. The idea is not only to motivate students with everyday-life contexts but also to look for contexts that are experientially real for the students as starting points for progressive mathematization (Gravemeijer, 1999).

L'attività di modellizzazione da un lato permette agli studenti di riconoscere il potenziale della matematica come strumento critico per interpretare e capire la realtà in cui vivono, le comunità di appartenenza e la società in generale, in una prospettiva sempre più situata, dall'altro, essendo simile ad un'attività di ricerca, richiede un approccio costruttivo e una metodologia attiva, partecipativa, collaborativa e, quindi, anche con un elevato potenziale inclusivo.

Essa infine favorisce l'attivazione di processi non solo di *problem solving,* ma anche di *problem posing.* Dopo decenni e decenni di studi sul *problem solving,* si è iniziato a riflettere sul fatto che l'attività di *problem posing* è altrettanto importante.

In questo contributo, basato su molti studi esplorativi condotti soprattutto a livello di scuola primaria (Baccarin, Basso & Feltresi, 2007; Baroni, 2007; Basso & Bonotto, 1996 e 2001; Bonotto, 1999, 2005, 2006, 2007a e 2009; Bonotto e Baroni, 2011a e 2011b; Bonotto, Basso, Baccarin & Feltresi, 2010, 2013 e 2014), illustreremo un nuovo approccio, in cui i processi di modellizzazione e di problem posing sono supportati dall'uso di opportuni materiali/strumenti/artefatti che possono servire a creare dei "contesti ricchi" e fortemente legati alla realtà quotidiana. Qui il termine "contesto" si riferisce a "*quel dominio della realtà che può essere matematizzato*" (Freudenthal, 1994) mentre il termine "ricco" pone l'accento sulle molte opportunità di strutturazione che la situazione può offrire, anche di carattere interdisciplinare, ad esempio con le scienze.

2. Sui rapporti tra matematica scolastica e realtà extrascolastica

Una delle cause delle difficoltà nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica è stata identificata, soprattutto a livello della scuola dell'obbligo, nella separazione tra le pratiche scolastiche e la ricchezza di esperienze e conoscenze che lo studente matura al di fuori della scuola, mentre "*il potere cognitivo, le capacità di imparare e le attitudini all'apprendimento vengono incrementate mantenendo l'ambiente dell'apprendimento legato al contesto culturale... È ben documentato il fatto di bambini e adulti che riescono "matematicamente" bene nel loro ambiente non scolastico, a contare, misurare, risolvere problemi e giungere a delle conclusioni usando arti e tecniche [tics] volte a spiegare, comprendere, far fronte al loro ambito [mathema], che hanno imparato nel loro ambiente culturale [ethno]*" (D'Ambrosio, 1995).

Molti studi mostrano come, ad esempio, gli algoritmi aritmetici, tradizionalmente insegnati a scuola per fornire agli studenti potenti procedure generali, non sempre aiutano questi ultimi nei contesti extra-scolastici e che le strategie sviluppate nella pratica appaiono più efficienti degli algoritmi scolastici.

Certamente alcuni soggetti, particolarmente dotati per gli algoritmi, imparano ad applicare adeguatamente gli algoritmi che sono loro imposti; gli altri (forse la maggioranza) non riescono ad identificare i nuovi algoritmi con quelli... che essi hanno costruito con operazioni di abbreviazione e di ricerca in linea diretta. Non riescono perché nel passato è stato loro chiesto di imparare delle cose che eccedevano le loro capacità mentali. Anche se imparano gli algoritmi senza alcuna lacuna, tuttavia non sono capaci di applicarli nelle situazioni concrete della vita quotidiana… I ricercatori hanno messo in rilievo queste 'ricadute' e si sono meravigliati; ma raramente esse sono diagnosticate come conseguenze dell'insegnamento, perché non si era presa in considerazione alcuna ipotesi di insegnamento alternativo mentre si insegnava il nuovo algoritmo (Freudenthal, 1994).

Nell'usuale prassi scolastica il processo di legare la matematica scolastica con la realtà extrascolastica è ancora sostanzialmente delegato ai classici problemi a parole. Questi, oltre a rappresentare l'interfaccia tra questi due contesti, spesso costituiscono l'unico esempio di problem solving.

I problemi a parole sono racconti, rappresentazioni stilizzate di esperienze ipotetiche, non porzioni di esperienze quotidiane. Secondo Lave i problemi a parole riguardano *"una supposta conoscenza culturale generale che ci si può aspettare abbiano (anche) i bambini. Non riguardano le particolari esperienze dei bambini con il mondo... Le intuizioni dei bambini sul mondo quotidiano sono in effetti costantemente violate nelle situazioni in cui viene chiesto loro di risolvere i problemi in parole. Questa discontinuità da se stessa può contribuire a creare la divisione tra la matematica "vera" e l'"altra" trasmettendo il messaggio che ciò che i bambini sanno sul mondo reale non è valido*" (Lave, 1995).

Queste ed altre considerazioni la portano a concludere che "*le esperienze di questo genere in apparenza quotidiane sono lontane dal riguardare la vita del mondo e i problemi sono progettati per praticare la separazione della matematica dalla esperienza, piuttosto che la sua matematizzazione*".

Invece di creare un ponte tra la matematica scolastica e quella della vita reale, i problemi a parole contribuiscono quindi a creare nel bambino l'idea che l'esperienza scolastica e quella extrascolastica siano nettamente divise, che esista una matematica "vera", trattata a scuola, e una matematica "altra" che è quella utilizzata nella vita quotidiana. Questa separazione può inoltre confermare negli studenti la convinzione che i metodi utilizzati fuori dalla scuola, ad esempio per eseguire dei calcoli, siano sbagliati o non validi, attribuendo così una connotazione negativa all'esperienza quotidiana.

A tale riguardo anche la posizione di Freudenthal (1994), è molto netta: "*Il contesto* [del problema del macellaio, n.d.r.] *è il libro di testo, piuttosto che la realtà, ovvero, in altri termini, dà un'immagine pseudoisomorfa del mondo. Nel contesto del libro di testo ogni problema ha una sola soluzione: non vi è posto per la realtà, con i suoi problemi insolubili, oppure che ammettono più soluzioni. Si suppone che lo scolaro scopra i pseudo-isomorfismi considerati dall'autore del libro di testo, e risolva i problemi, che si presentano come se fossero collegati con la realtà, per mezzo di questi pseudo-isomorfismi. Non vale forse la pena di indagare se e come questa didattica alleva gli atteggiamenti contrari alla matematica, e come mai le reazioni dei ragazzi contro questa deformazione mentale sono così varie*?".

Generalmente i bambini affrontano questi problemi combinando in qualche modo testo, dati, e certi schemi risolutivi interiorizzati nella loro esperienza scolastica; la sola relazione tra la domanda e il contesto sta nel richiedere l'uso dei dati in esso citati; ed è difficile che in questo modo i problemi a parole richiamino alla mente degli allievi esperienze o idee collegate a situazioni realmente vissute. Viene quindi a mancare, nel secondo caso, il riferimento al "senso" della situazione descritta, utile anche a comprendere il "significato" della richiesta (Bonotto, 2007b).

Molte ricerche (si veda Verschaffel, Greer & De Corte, 2000, per una panoramica su tali studi) hanno individuato una delle cause di tale frattura nel carattere stereotipato dei problemi proposti dai libri di testo che, piuttosto che servire da interfaccia fra la matematica e la realtà, finiscono per promuovere negli studenti un'esclusione di considerazioni di tipo realistico ed una "*suspension of sense-making"* (Schoenfeld, 1991).

In tale dinamica, hanno spesso un peso determinante le aspettative degli insegnanti stessi (Bonotto, 2005; Gravemeijer, 1997; Palm, 2008) e le loro convinzioni sugli scopi dell'educazione matematica. Si è infatti notato che l'uso di problemi stereotipati e la relativa pratica scolastica sono connessi alle convinzioni degli insegnanti riguardo alla matematica e agli obiettivi del suo insegnamento.

Tradizionalmente il problema scolastico è infatti considerato un'imitazione non della vita reale, ma di altri problemi scolastici. Tale concezione condivisa crea un circolo vizioso che si esplica nel generare nuovi problemi basandosi sulla struttura di quelli tradizionali.

Frequentemente viene poi utilizzato dagli insegnanti il metodo dell'identificazione delle parole chiave come strategia da fornire agli alunni per risolvere i problemi (come ad esempio "in tutto" oppure "mettere assieme" dovrebbero corrispondere sempre all'operazione di addizione, "restano" che dovrebbe corrispondere sempre all'operazione di sottrazione, e così via). Questa strategia, però, non permette ai bambini di capire veramente il testo del problema e di costruirsi un modello mentale della situazione, con la conseguenza che talvolta la risoluzione risulta scorretta o priva di senso. Emblematiche sono le risposte date dai bambini, ma anche da insegnanti in formazione, al problema "*Quale sarà la temperatura dell'acqua in un contenitore se metti insieme 1 litro di acqua a 40° C e 1 litro di acqua a 20° C?"*, problema che riprende uno di Nesher (1980) sull'attivazione o meno di conoscenze di tipo realistico (Bonotto & Wilczewski, 2007).

La ricerca condotta da Verschaffel, De Corte, e Borghart (1997), e confermata dallo studio in ambito nazionale di Bonotto e Wilczewski, ha evidenziato come alcuni insegnanti non ancora in servizio tendano addirittura a considerare errate risposte ottenute tenendo conto di considerazioni di tipo realistico. Questi insegnanti sembrano ritenere che durante le attività matematiche scolastiche l'attivazione di conoscenze extrascolastiche non dovrebbe essere stimolata, anzi piuttosto scoraggiata.

Un importante fattore responsabile della mancanza di senso che spesso caratterizza le strategie di soluzione dei problemi scolastici è quindi il peso esercitato dalla cultura scolastica dominante e l'instaurarsi di un "contratto didattico", nel senso datone da Brousseau, che condiziona a tal punto la pratica scolastica da imporre regole implicite, ruoli e aspettative del tutto fuorvianti. I bambini fin dai primi anni della scuola primaria, vengono a stabilire con l'insegnante accordi ben precisi, espliciti, su come devono accettare lo schema generale di problema e su quale deve essere la loro attività, una volta assegnato il compito (Bonotto & Baroni, 2011a).

Ma quali sono le regole implicite previste dal contratto scolastico per quanto riguarda i problemi a parole che possono risultare fuorvianti per l'apprendimento della matematica?

– *Ogni problema ha una e una sola soluzione.* Gli studenti imparano fin dai primi anni della scuola elementare che ogni problema ha una sola risposta che si ottiene dalla semplice applicazione meccanica delle quattro operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione). Intere generazioni di autori di libri scolastici scrivono testi in cui sono presenti solo problemi concepiti in questo modo perché così prevede la pratica consueta.

– *I numeri* presenti *nel testo del problema sono tutti indispensabili.* Un'altra idea condivisa dai bambini è che i numeri presenti nei problemi siano tutti necessari (e sufficienti) per la soluzione. Infatti, come dimostrano gli studi di Zan (2000), per la maggioranza dei bambini, il problema scolastico è una struttura linguistica formale, caratterizzata da un testo in cui sono presenti numeri con cui è necessario eseguire delle operazioni.

– *La forma è più importante della correttezza.* Nelle scuole elementari il bambino, anche se ha risolto velocemente e mentalmente un problema semplice, è costretto ad una serie di rappresentazioni e di procedure, che naturalmente perdono in questo caso la funzione di "aiuto", e diventano un inutile rituale che inibisce la creatività matematica e la ricerca di strade alternative; ciò evidenzia la contraddizione fra l'irrazionalità delle strategie utilizzate in contesto scolastico e la consistenza di quelle adottate fuori (Zan, 1991).

Infine la pratica dei problemi a parole è relegata alle attività in classe, ha cioè un suo senso ed una collocazione temporale e spaziale solo all'interno della scuola; raramente gli studenti incontreranno questo tipo di attività fuori dell'ambito strettamente scolastico.

Tutto questo indica una differenza sulla funzione dei problemi a parole nella educazione matematica. I ricercatori, e probabilmente gli estensori di molti nuovi curricula, tra cui quelli italiani, collegano i problemi a parole ad attività di problem solving, di modellizzazione matemati-

ca e di applicazione della matematica stessa. Gli insegnanti invece riconoscono in generale ai problemi a parole un altro ruolo, e cioè quello di essere sostanzialmente degli esercizi nelle quattro operazioni fondamentali (Bonotto, 2007b)[1].

Se, in accordo con molti ricercatori e con gli estensori di molti curricula, tra cui quelli italiani[2], si vogliono

a) problemi reali che nascano da esperienze che i discenti maturano o hanno maturato al di fuori della scuola,

b) situazioni di matematizzazione della realtà ed una vera attività di problem solving,

sono necessari dei cambiamenti.

Una possibilità, che potremmo chiamare di *cambiamento dall'interno*, è quella di modificare la tipologia di problemi proposti a scuola. Secondo questo approccio vengono presentate, anche nei libri di testo, varie tipologie di problemi (ad esempio problemi con più soluzioni possibili, caratteristica tipica dei problemi reali, o problemi irrisolvibili). Ritroviamo questo approccio nel progetto *RME (Realistic Mathematics Education*), sviluppato dal Freudenthal Institute di Utrecht, e nel gruppo di ricerca, diretto da L. Verschaffel, del *Centre for Instructional Psychology and Technology* dell'Università di Leuven.

Un'altra possibilità, che potremmo definire di *cambiamento dall'esterno* (e che si può affiancare alla precedente, in quanto entrambe possono coesistere nella pratica scolastica), è quella di sostituire i classici problemi a parole con un altro tipo di attività, in cui si lavora in "contesti ricchi" e aperti alla matematizzazione (Freudenthal, 1994; Bonotto, 1999 e 2007). Qui il termine "contesto" si riferisce a quel dominio della realtà che può essere matematizzato, mentre il termine "ricco" sottolinea le molte opportunità di strutturazione che la situazione può offrire. Queste attività si possono realizzare utilizzando opportuni materiali/strumenti/artefatti (ad esempio scontrini, etichette, dépliant, articoli di giornale, guide tv, telecomandi, ecc.).

L'idea non è solo quella di motivare gli studenti attraverso contesti presi dalla vita di ogni giorno ma di attingere a contesti che fanno parte delle esperienze reali degli studenti e che possono essere usati come punti di partenza per una matematizzazione progressiva (Gravemeijer, 1999), al fine di favorire anche una disposizione verso una modellizzazione matematica e l'attivazione di processi non solo di problem solving ma anche di problem posing.

Per attuare tale cambio di prospettiva, l'insegnante di matematica deve diventare esperto nel riconoscere la grande quantità di matematica incorporata nella vita quotidiana. Questo richiede di saper integrare tra loro conoscenze pedagogico-didattiche e disciplinari, senza perdere di vista il contesto scolastico particolare e l'ambiente culturale generale in cui si opera.

[1] Basti pensare che spesso nei testi scolastici si trovano problemi come questo "*L'album di Ilenia ha 12* (evidenziato in rosso, ndr) *fogli disegnati e 16* (evidenziato sempre in rosso, ndr*) ancora bianchi. Quanti fogli ha in tutto*? " in una pagina dal titolo "Problemi con l'addizione". Gli esercizi nelle quattro operazioni fondamentali hanno un ruolo, ed una ragionevole collocazione, all'interno dell'insegnamento della matematica, ma certo non quello di favorire un processo di matematizzazione e di modellizzazione del reale.

[2] *"Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola"* (Indicazioni Nazionali per i Piani di Studio Personalizzati nella Scuola Primaria, 2007, considerazione ripresa nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo del 2012).

3. Sulla modellizzazione

Il termine "*modellizzazione matematica*" non si riferisce solamente a un processo in cui una situazione deve essere problematizzata e capita, tradotta in termini matematici, trattata matematicamente, riportata nella situazione originaria reale, valutata e comunicata. Oltre a questo tipo di modellizzazione, che richiede che lo studente abbia già a disposizione qualche modello matematico e strumenti per matematizzare, c'è un altro tipo di modellizzazione, in cui le attività sono usate come veicolo *per lo sviluppo* (piuttosto che *per l'applicazione*) di concetti matematici (Bonotto, 2007; Gravemeijer, 2007). Rientra in questo seconda tipologia l'approccio definito da Gravemeijer "*emergent modelling*", il cui focus è sui processi di apprendimento a lungo termine, in cui un modello si sviluppa da un modello informale e situato ("*un modello di*"), in una struttura matematica generalizzabile (*"un modello per"*).

"*These emergent models are seen as originating from activity in, and reasoning about situations. From this perspective, the process of constructing models is one of progressive reorganizing situations. The model and the situation being modeled co-evolve and are mutually constituted in the course of modelling activity*" (Gravemeijer, 2007).

I *"modelli di"* e i *"modelli per",* quindi, sono per Gravemeijer posti a un livello intermedio tra la conoscenza situata e la conoscenza astratta.

Questa prospettiva nasce come alternativa ai "*didactical models, manipulative materials and visual models that are means to make abstract mathematics more accessible for the student. Especially at the primary and lower secondary level, manipulative materials and visual models are typically used as embodiments of mathematical concepts and objects in mathematics education. The problem of this kind of models, however, is that external representation do not come with intrinsic meaning. From a constructivist perspective, it may be argued that the meaning of external representations is dependent on the knowledge and understanding of the interpreter. This implies that in order to interpret these models correctly, students should already have at their disposal, the knowledge and understanding that is to be conveyed by the concrete models* (Cobb, Yackel & Wood, 1992). "*The emergent-modelling design heuristic tries to circumvent this dilemma, by aiming at a dynamic process of symbolizing and modelling, within which the process of symbolizing and the development of meaning are reflexively related"* (Gravemeijer, 2007).

Anche se è molto difficile, se non impossibile, operare una distinzione netta tra i due aspetti della modellizzazione matematica, è chiaro che essi corrispondono a differenti fasi nel processo di insegnamento/apprendimento. Ad esempio, a livello di scuola primaria il focus deve essere più sul secondo aspetto, a livello di scuola secondaria (specialmente di II grado), il focus può essere spostato sul primo aspetto[3].

Si ritiene, comunque, che un'introduzione precoce alla modellizzazione nel secondo senso sia non solo possibile, ma anzi auspicabile, a tutti i livelli scolastici, come in parte dimostrato

[3] Ora il concetto di modello è presente nelle *Linee Guida* per il *triennio* (indirizzo economico, tecnologico) così come nelle *Indicazioni Generali, triennio* (Linee generali e competenze, e negli Obiettivi specifici di apprendimento).

da alcuni studi esplorativi già condotti (si vedano ad esempio Bonotto 2009, 2010a e 2010b; Bonotto, Basso, Baccarin & Feltresi, 2013 e 2014)[4].

Se, nella pratica scolastica, si vogliono favorire e stimolare processi di modellizzazione matematica, vanno ricercate situazioni problematiche, provenienti dal mondo reale, la cui soluzione non si riduca alla selezione e all'esecuzione di una o più operazioni con i numeri dati.

Gli alunni dovranno essere posti di fronte ad attività in cui devono selezionare le informazioni spogliandole dei dettagli irrilevanti, ricercare ed individuare relazioni e regolarità che poi interpretano e possono descrivere mediante grafici, tabelle, formule. Di solito il prodotto così ottenuto necessita poi di revisioni successive, di aggiustamenti e ristrutturazioni, o raffinamenti, per giungere poi alla risoluzione ritenuta valida, magari in prima approssimazione, per quel contesto (Bonotto, Baccarin, Basso & Feltresi, 2010).

In questo modo la situazione problematica indagata resta sempre in primo piano ed è il riferimento continuo per la qualità della risoluzione ottenuta, nel senso che i dati, le risposte matematiche, vanno interpretati e convalidati nel contesto originale. In questo senso il processo di modellizzazione matematica "*include un numero di cicli iterativi, in cui gli studenti si muovono avanti e indietro dai dati agli obiettivi, tornano indietro, e di nuovo si muovono verso gli obiettivi per testare le proprie ipotesi, per affinare i risultati ottenuti e migliorare le soluzioni trovate*" (Lesh & Doerr, 2003).

Assieme a processi quali organizzare dati, spiegare, giustificare, rappresentare, andranno attivate anche competenze sociali legate alla necessità di confrontarsi e collaborare con gli altri; non vanno infatti trascurati gli aspetti della costruzione sociale delle conoscenze. "*Le descrizioni, le spiegazioni e le giustificazioni degli studenti formano una componente integrante dei modelli che essi producono. A differenza delle molte situazioni problematiche che gli allievi incontrano a scuola, le attività di modellizzazione sono intrinsecamente esperienze sociali*" (Mousoulides, Sriraman & Christou, 2007). Gli studenti lavorano per produrre un risultato che deve essere condivisibile in modo esplicito.

Queste esperienze di lavoro scolastico richiedono infatti momenti di confronto fra pari dove illustrare le proprie proposte mediante descrizioni, spiegazioni e rappresentazioni matematiche. Le discussioni sono occasioni per verbalizzare idee e pensieri, per rendere esplicite conoscenze di contenuto e di processo, ed in cui possono nascere conflitti, necessità di revisioni, di nuove congetture e risoluzioni.

Durante queste fasi gli insegnanti sono posti nella condizione di osservare e valutare i processi di apprendimento dei propri alunni, di registrare i progressi e le difficoltà d'apprendimento dei singoli, e possono intervenire prontamente, sottolineando e riprendendo le osservazioni più rilevanti al fine di condurre il gruppo alla costruzione di conoscenze condivise.

[4] I risultati di uno studio esplorativo da noi condotto evidenziano come i bambini sappiano produrre strategie efficienti di calcolo informale attribuendo senso alle quattro operazioni aritmetiche che essi utilizzano per risolvere le situazioni problematiche presentate (Bonotto Basso, Baccarin & Feltresi 2013 e 2014). Gli alunni risolvono problemi numerici creando modelli alternativi alle usuali procedure di calcolo relative alle quattro operazioni aritmetiche. In accordo con Gravemeijer (2007) noi riteniamo che la costruzione di questi modelli auto-sviluppati possa servire da base per lo sviluppo di conoscenza matematica formale.

L'attività di modellizzazione essendo simile ad un'attività di ricerca, richiede un approccio costruttivo e una metodologia attiva, partecipativa, collaborativa e, quindi, anche con un elevato potenziale inclusivo.

Queste attività, oltre a permettere agli studenti di riconoscere il potenziale della matematica come strumento critico per interpretare e capire la realtà in cui vivono, la loro comunità di appartenenza e la società in generale, in una prospettiva sempre più situata, hanno l'ulteriore vantaggio di favorire naturalmente l'attivazione di processi non solo di *problem solving,* ma anche di *problem posing.*

4. Sul problem posing

Dopo oltre trent'anni di studi sul *problem solving,* si è iniziato a riflettere sul fatto che saper porre dei problemi matematici (*problem posing*) è importante almeno quanto saperli risolvere.

"Problem posing is of central importance in the discipline of mathematics and in the nature of mathematical thinking, and it is an important companion to problem solving" ed ancora *Problem formulating should be viewed not only as a goal of instruction but also as a means of instruction. The experience of discovering and creating one's own mathematics problems ought to be part of every student's education. Instead, it is an experience few students have today – perhaps only if they are candidates for advanced degrees in mathematics"* (Kilpatrick, 1987).

Dalla fine degli anni '80 l'attività di problem posing ha iniziato quindi ad essere considerata una presenza importante nel curricolo di matematica di molti Paesi.

Negli Stati Uniti, ad esempio, *The Principles and Standards for School Mathematics* del 2000 richiedono che gli studenti "*formulate interesting problems based on a wide variety of situations, both within and outside mathematics*".

In Cina *The Interpretation of Mathematics Curriculum* (2001) sottolinea che le abilità degli studenti nel problem solving e nel problem posing dovrebbero essere messe in risalto e che gli studenti dovrebbero imparare a trovare dei problemi e a porsi dei problemi "*in and out of school of the context of mathematics*".

In Italia, nel 2001, l'Unione Matematica Italiana ha riconosciuto il problem posing come una delle attività significative da sviluppare all'interno dei nuclei fondanti del sapere matematico e più recentemente *"Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta ad un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi"* (Indicazioni Nazionali per il curricolo 2007 e 2012).

Il concetto di problem posing è stato esplorato da diversi autori, i quali l'hanno indagato da differenti punti di vista. Secondo Brown e Walter (1988) il problem posing è nato dal problem solving ma si distacca da quest'ultimo perché può fornire un'occasione per sviluppare processi autonomi di pensiero, in quanto aiuta a scoprire fatti matematici nuovi, nuove questioni, ma anche ad approfondire concetti già incontrati. Per questi autori il problem posing stimola inoltre il pensiero creativo.

Anche Silver (1994) ha analizzato il problem posing come processo strettamente correlato al problem solving, che può presentarsi prima, durante o dopo la soluzione di un problema:

(1) *pre-solution posing*: vengono generati problemi originali a partire da una situazione stimolo presentata;

(2) *within-solution posing*: vengono riformulati i problemi che si stanno risolvendo;

(3) *post-solution posing*: vengono modificati gli obiettivi o le condizioni di un problema già risolto per generarne uno nuovo.

Per studiare l'attività di problem posing in matematica i ricercatori hanno proposto delle categorizzazioni sia delle diverse situazioni di problem posing che possono venire proposte, sia della tipologia di problemi che possono essere creati in tali situazioni.

Stoyanova e Ellerton (1996), ad esempio, classificano le attività di problem posing in tre diverse categorie: *free problem posing situations*, *semi-structured problem posing situations* e *structured problem posing situations*.

Per quanto riguarda la prima categoria proposta, una situazione di problem posing è *free* se agli studenti viene chiesto di generare dei problemi senza che siano date loro particolari restrizioni: ad esempio si può chiedere agli studenti di creare dei problemi che siano difficilmente risolvibili per i loro compagni, oppure di creare dei problemi per un test o semplicemente dei problemi divertenti da risolvere.

Per quanto concerne la seconda categoria, una situazione di problem posing è considerata *semi-structured* se agli studenti vengono presentati dei problemi aperti (open-ended o ill-structured problems), o delle situazioni non strutturate, e sono invitati a esplorare la struttura della situazione e a completarla applicando le conoscenze, le abilità e i concetti derivati dalle loro precedenti esperienze matematiche. Si può, ad esempio, chiedere agli alunni di creare dei problemi da una determinata equazione, figura o da uno story problem.

Per quanto riguarda la terza categoria, una situazione di problem posing può considerarsi *structured* quando si basa su uno specifico problema. Esempi di questo tipo possono essere quelli in cui si chiede agli alunni di creare un problema dalla riformulazione di un problema già risolto, con domande mancanti oppure con dati insufficienti o superflui.

Molti studi hanno cercato di incorporare attività di problem posing in classe. Questi studi mettono in evidenza che attività di problem posing hanno avuto una influenza positiva sul pensiero degli studenti, sulle loro abilità nel problem solving, sul loro atteggiamento e fiducia nella matematica e nel problem solving, ed anche sulla creatività (Bonotto 2006, 2013 e 2015; Bonotto & Dal Santo, 2015; English, 1998 e 2003; Leung, 1996; Silver, 1994).

Nei nostri studi noi consideriamo il problem posing come il processo secondo il quale gli studenti, in base alle loro esperienze, costruiscono delle interpretazioni personali di situazioni concrete e le formulano come problemi matematici significativi. Per gli studenti questo processo diventa perciò un'opportunità di interpretazione e di analisi critica della realtà.

Nelle nostre proposte il processo di problem posing è supportato dall'uso di opportuni materiali/strumenti/artefatti che possono servire a creare

– contesti ricchi e fortemente legati alla realtà quotidiana,

– situazioni di tipo semi-strutturato.

Durante queste attività gli studenti devono:

– distinguere i dati significativi da quelli irrilevanti;
– scoprire le relazioni tra i dati;
– decidere se le informazioni in loro possesso sono sufficienti a risolvere il problema;
– ricercare se i dati coinvolti sono coerenti dal punto di vista numerico e contestuale.

Queste attività sono tipiche del processo di modellizzazione, e sono simili alle situazioni da matematizzare che gli studenti hanno incontrato o incontreranno fuori dalla scuola. Esse rientrano poi in quel tipo di situazioni, poco presenti nella realtà scolastica odierna, che possono preparare gli individui a sintonizzarsi adattivamente con il tipo di situazioni naturali che incontreranno fuori della scuola, come auspicato da Resnick (1995).

5. Sugli artefatti culturali

Secondo la prospettiva della psicologia storico-culturale (si veda ad esempio Cole, 1995) l'esperienza, lo sviluppo, e l'apprendimento umano, si realizzano in uno specifico contesto culturale, il quale include tutta una serie di artefatti, considerati come strumenti, sia concreti sia astratti, che permettono all'uomo un'esperienza indiretta del mondo, mediata cioè da tali artefatti. Essi hanno quindi una duplice natura, concettuale e materiale: gli artefatti, infatti, incarnano la storia intellettuale di una cultura e spesso incorporano al loro interno teorie e concetti (Saxe *et al.*, 1996). Possono, quindi, essere risorse per la realizzazione di eventi interattivi, "*strumenti costruiti dall'uomo, dalla storia, dalla cultura, che modificano l'attività umana e che mediano i rapporti che bambini e adulti hanno con il mondo*" (Pontecorvo, 1997). Un artefatto è quindi un rappresentante, un testimone della società in cui viviamo, della cultura cui apparteniamo, dei mezzi e modi di comunicare tipici della nostra epoca.

L'utilizzo di opportuni artefatti in classe è così uno dei modi attraverso il quale si può creare un ponte di collegamento efficace tra il contesto extrascolastico, che è situato, e quello scolastico, spesso decontestualizzato. Incoraggiando i bambini a cercare, riconoscere, interpretare, analizzare e riflettere su "*fatti matematici*" presenti in opportuni artefatti culturali, che altro non sono che materiali concreti, o loro riproduzioni, che i bambini incontrano, e possono manipolare, nella vita di ogni giorno" si può, oltre a *matematizzare il quotidiano,* anche *quotidianizzare la matematica* (Bonotto, 2007).

Molti sono gli artefatti socio-culturali utilizzati in alcuni nostri studi esplorativi per indagare la possibilità di introdurre nuovi concetti matematici o per consolidare la comprensione di alcuni concetti matematici. L'attività in classe con tali artefatti (etichette, orari delle programmazioni televisive, scontrini, tessere raccogli punti, misura lettere, calendari, ecc.) sono intrinsecamente molto diverse dai problemi a parole presenti nei sussidiari o, in generale, nei libri di testo, ed ancora molto utilizzati nella pratica scolastica. La significatività e familiarità del problema "tradizionale" consiste solo nella frequenza con la quale lo studente lo incontrerà nella prassi scolastica; spesso egli è solo addestrato a risolverne alcuni di standard, che rientrano in precise tipologie, dall'uso consolidato (Bonotto, 2007b).

Utilizzando in modo opportuno alcuni artefatti possiamo invece creare dei "*contesti ricchi",* dove il termine "*contesto*" si riferisce a "*quel dominio della realtà il quale… si presenta al di-*

scente per essere matematizzato" (Freudenthal, 1994), mentre il termine "*ricco*" sottolinea le molte opportunità di strutturazione che la situazione offre, anche di carattere interdisciplinare, ad esempio con le scienze.

Chiunque ponga un po' di attenzione, cercando di vedere sotto altri occhi la realtà che lo circonda, può facilmente scoprire che c'è una grande quantità di matematica incorporata nella vita quotidiana. "*Il nostro mondo... è già stato matematizzato ad un tale livello che noi non ce ne accorgiamo neppure più, a meno che la nostra attenzione non sia attirata su questo fatto*" (Freudenthal, 1994).

Non si tratta di spogliare l'artefatto da ciò che sembra impedire l'emergere dei contenuti disciplinari ("*È sbagliato guardare al contesto come ad un rumore che disturba il messaggio chiaro della matematica: il contesto è il messaggio, e la matematica è lo strumento per decodificarlo*", Freudenthal, 1994), si tratta di strutturare l'artefatto, contesto ricco di informazioni, dando organicità alle diverse sezioni e individuando i legami reciproci fra esse.

L'alunno può leggere e decodificare i segni e i simboli contenuti nell'artefatto (frutto di convenzioni e di conoscenze cristallizzate nella società) sulla base delle proprie esperienze e competenze, conservando il legame con la realtà garantito dal contesto; può analizzare e cogliere le relazioni fra i dati, dedurne delle conseguenze, e ritornare all'artefatto, interpretando e valutando i risultati rispetto alla situazione di partenza (Bonotto, Basso, Baccarin & Feltresi, 2010).

La duplice natura di questi artefatti, di essere contemporaneamente "*materiali*" e "*ideali*", in altre parole quella di appartenere sia al mondo della vita sia al mondo dei simboli, rende infatti possibile muoversi in modo significativo tra i due ambiti, dalle situazioni di riferimento ai concetti e, viceversa, dai concetti alle situazioni di riferimento, in un processo di "andate e ritorni" che non può che "rafforzare le rispettive comprensioni" (Bonotto, 1999).

Questo processo viene chiamato dalla scuola di pensiero olandese di "*matematizzazione orizzontale*" (si veda Treffers, 1987, ripreso da Freudenthal,1994). Viene così a crearsi un utile *ponte di collegamento* tra contesto scolastico ed extra-scolastico, in cui i bambini possono costantemente mantenere la significatività dei propri ragionamenti ed il controllo delle proprie inferenze (Bonotto, 2007b).

"*Nello scontrino povero di parole ma ricco di significati impliciti, si ribalta la situazione rispetto all'usuale problema di compra-vendita, che risulta spesso ricco di parole, ma povero di riferimenti significativi*" (Basso & Bonotto, 1996).

Un diverso uso di tali artefatti culturali può offrire lo spunto per fare anche della *'matematizzazione verticale'*, dai concetti sui concetti. Questa si manifesta quando si fanno diventare i simboli, i fatti matematici incorporati, oggetti da mettere in relazione, da modificare o manipolare, su cui riflettere, rilevandone proprietà, facendo congetture (Bonotto, 2007b).

La principale caratteristica degli artefatti utilizzati nelle attività è stata quindi quella di promuovere l'insorgere di ragionamenti tipici delle esperienze extrascolastiche, creando una nuova tensione tra la matematica scolastica e la realtà di ogni giorno, con la sua matematica incorporata. Essi infatti fanno parte della realtà esperienziale del bambino, consentendogli di riferirsi a delle situazioni concrete e permettendogli così di sviluppare dei ragionamenti significativi e nello stesso tempo di monitorarli.

Essi contengono poi una molteplicità di dati reali; i risultati dei calcoli spesso devono essere interpretati e/o arrotondati proprio come avviene nei contesti extrascolastici (Baroni, 2007). I dati, non scelti ad hoc dagli autori (come invece avviene nei testi scolastici), possono quindi stimolare nei bambini curiosità di tipo "anticipatorio", ed offrire così la possibilità di affrontare argomenti non previsti [favorendo un "*apprendimento di tipo anticipatorio*" ("*anticipatory learning*") o per "*organizzazione anticipata*", come descritto in Freudenthal, 1994], e di fare collegamenti significativi.

Freudenthal chiama l'apprendimento "*anticipatorio*" anche "*prospettivo*", e lo considera la controparte di quello da lui definito "*retrospettivo*", che si ha quando si richiamano vecchie nozioni riconsiderandole ad un livello più alto ed in un contesto più ampio, processo tipico dei matematici adulti. "*L'apprendimento in prospettiva dovrebbe essere non soltanto permesso, ma stimolato, così come l'apprendimento retrospettivo dovrebbe essere non soltanto organizzato nell'insegnamento, ma anche attivato come un abito di apprendimento*" (Freudenthal, 1994). Gli apprendimenti prospettivo e retrospettivo mirano quindi ad una integrazione del passato e del futuro dei processi di apprendimento: ciò si ottiene con *il riannodare insieme ed intrecciare localmente i fili dell'apprendimento*, avendo in vista l'intero processo di apprendimento come un tutto unico.

La significatività e l'originalità di artefatti opportunamente scelti può favorire la curiosità, l'interesse e la motivazione, ed aiutare a dissolvere le paure comuni e le ansie che solitamente accompagnano l'apprendimento della matematica, come testimoniato dai commenti di bambini coinvolti negli studi.

"*Questo non è un problema. I problemi sono pieni di parole… e poi quelli non riesco a farli perché non capisco bene. Questi sì perché tutti sanno leggere il menù del ristorante e poi il mio papà ha un ristorante*!" (Baroni, 2007).

La caratteristica non artificiale e complessa di questi materiali e la loro natura extrascolastica, possono inoltre favorire la connessione con le altre discipline (ad es. storia, geografia, scienze, italiano) e quindi attività interdisciplinari.

Essi, infine, si differenziano notevolmente dal materiale strutturato utilizzato comunemente nella pratica didattica: quest'ultimo è uno strumento costruito artificialmente, legato all'ambito scolastico, fortemente semplificato e decontestualizzato.

"I blocchi logici sono un esempio tipico di successi, che possono essere mietuti con materiale fortemente strutturato; successi ben miseri, ottenuti grazie all'amore della facilità. Il materiale ricco, aperto alla strutturazione, che offre più numerose opportunità didattiche, richiede di più e quindi è meno facile da sfruttare" (Freudenthal, 1994).

Non è comunque il materiale in sé ed in isolamento che risulta di supporto per l'insegnante, ma è piuttosto l'uso dell'artefatto ed i significati che da esso si sviluppano come risultato di attività: "*The mathematical goals emerge for children not only in relation to artifacts but even in relation to structure of activity, social interaction and children's prior understanding*" (Saxe, 2002).

Le esperienze da noi condotte sono state quindi caratterizzate dall'utilizzo di una varietà di metodologie didattiche tra di loro complementari, integrate ed interattive (verbalizzazioni scritte, lavori in coppia o di gruppo, discussioni collettive, interventi dell'insegnante in fase di istituzionalizzazione del sapere).

Given the complex interaction between the use of the tools and the development of reasoning and learning, the question that should concern educators is not how powerful or effective cultural tools are in promoting learning, but rather what teaching practices and classroom interactions can promote meaningful learning and understanding of the mathematical principles and relations embedded in cultural tools and representations. (Schliemann, 2002).

E sono state introdotte anche nuove "*socio-mathematical norms*", nel senso datone da Yackel e Cobb (1996); tali norme sono costruite e continuamente modificate attraverso l'interazione tra insegnante, allievi ed artefatti, la cui introduzione in classe importa dal mondo esterno potenziali norme e modi di riflettere che aprono nuove linee di sviluppo concettuale e culturale per gli studenti (Bonotto, 2009).

Invitando infine gli allievi

– a recuperare artefatti culturali presenti nella loro vita di ogni giorno,
– a leggervi la parte di matematica evidenziata,
– a riconoscervi alcuni fatti matematici più o meno nascosti,
– ad interpretarli,
– a vederne analogie e differenze [ad esempio modi diversi di rappresentare i numeri],
– a porsi dei problemi [trovare rapporti tra i dati, anticipare proprietà, e così via],

possiamo far riconoscere loro un'ampia varietà di situazioni esterne alla scuola come *situazioni matematizzabili*.

In questo modo si possono moltiplicare quanto si vuole le occasioni d'incontro tra studenti e matematica, ora relegate alle sole aule e ore scolastiche, dando avvio ad una vera attività di matematizzazione del reale, ed alla formazione di un diverso atteggiamento nei confronti di questa disciplina; essa può quindi essere vista come uno strumento per interpretare e capire il mondo e non come un corpo di conoscenze remoto e staccato dal mondo. Un obiettivo importante della scuola, infatti, è quello di insegnare ai bambini e ai ragazzi ad interpretare criticamente la realtà in cui vivono, a capirne i codici e i messaggi, per non restarne esclusi o fuorviati (Bonotto, 2007b).

Ovviamente le caratteristiche di utilità e pervasività della matematica sono solo due delle molteplici facce di questa disciplina e non possono certo esaurirne le peculiarità, il valore e la rilevanza culturali; ciò non di meno noi riteniamo che questi due elementi possano essere adeguatamente sfruttati dal punto di vista educativo per cercare di cambiare i comportamenti e gli atteggiamenti degli studenti nei confronti della matematica.

6. Conclusioni e problemi aperti

Gestire il tipo di attività, quali quelle brevemente descritte in questo contributo, non è comunque un compito facile, o di immediata implementazione, per gli insegnanti. Da qui la necessità di un cambiamento nella formazione iniziale ed in itinere degli insegnanti di tutti gli ordini scolatici.

Essi infatti devono cercare
– di modificare anche il proprio atteggiamento nei confronti della matematica (che risente del modo attraverso il quale a loro stessi è stata insegnata);
– di rivedere le proprie convinzioni sul ruolo delle conoscenze extrascolastiche nelle attività di problem solving;
– di vedere la matematica incorporata nel mondo reale come punto di partenza per attività da fare in classe, rivedendo così il proprio modo usuale di progettare e gestire le attività scolastiche;
– di conoscere le idee e pratiche presenti nelle comunità culturali, etniche, linguistiche degli allievi.

D'altra parte sempre l'innovazione è un processo di apprendimento per l'intero quadro educativo, preso in tutto il suo complesso (Freudenthal, 1994).

7. Riferimenti bibliografici

Baccarin, R., Basso, M., & Feltresi, M. (2007). Lo scontrino del supermercato come strumento di manipolazione, mediazione e matematizzazione. In Bonotto, C., *Quotidianizzare la matematica* (pp. 135-149). Lecce: Edizioni La Biblioteca Pensa Multimedia.

Baroni, M. (2007). Insegnare i numeri decimali nella scuola primaria via artefatti ed attività di problem posing. In Bonotto, C., *Quotidianizzare la matematica* (pp. 151-168). Lecce: Edizioni La Biblioteca Pensa Multimedia.

Basso, M., Bonotto, C. (1996). Un'esperienza didattica di integrazione tra realtà extrascolastica e realtà scolastica riguardo ai numeri decimali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 19A, 5, 423-449.

Basso, M., Bonotto, C. (2001). Is it possible to change the classroom activities in which we delegate the process of connecting mathematics with reality?. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 32, 3, 385-399.

Bonotto, C. (1999). Sull'uso di artefatti culturali nell'insegnamento/apprendimento della matematica. *L'Educazione Matematica,* Anno XX, Serie VI, Vol. 1(2), 62-95.

Bonotto, C. (2005). How informal out-of-school mathematics can help students make sense of formal in-school mathematics: The case of multiplying by decimal numbers. *Mathematical Thinking and Learning. An International Journal*, 7 (4), 313-344.

Bonotto, C. (2006). Extending students' understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing. In J. Novotná *et al.* (Eds.), *Proceedings of the 30th PME* (II, pp. 193-200). Prague: Prague Charles Univ.

Bonotto, C. (2007a). How to replace the word problems with activities of realistic mathematical modeling. In W. Blum *et al.* (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 185-192). New ICMI Studies Series no. 10. New York: Springer.

Bonotto, C. (2007b). *Quotidianizzare la matematica*. Lecce: Edizioni La Biblioteca Pensa Multimedia.

Bonotto, C. (2009). Working towards Teaching Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing in Italian Classrooms. In Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. & Mukhopadhyay S. (Eds.), *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 297-313), Rotterdam: Sense Publishers.

Bonotto, C. (2010a). Engaging Students in Mathematical Modelling and Problem Posing Activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(3), 18-32.

Bonotto, C. (2010b). Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. In Lesh R., Galbraith P. L., Haines C. & Hurford A. (Eds,). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. (pp. 399-408). New York: Springer.

Bonotto, C. (2012). Mathematical modelling and problem posing: how school mathematics can contribute to critical thinking in the society. *Hellenic Mathematical Society – International Journal for Mathematics in Education*, 4, 122-127.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics,* May 2013, Volume 83, Issue 1, 37-55.

Bonotto, C., Baroni, M. (2011a). I classici problemi a parole nella Scuola Primaria Italiana: si possono sostituire o affiancare con un altro tipo di attività? I Parte, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 34(A), 1, 9-40.

Bonotto, C., Baroni, M. (2011b). I classici problemi a parole nella Scuola Primaria Italiana: si possono sostituire o affiancare con un altro tipo di attività? II Parte, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 34(A), 3, 125-160.

Bonotto, C., Basso, M., Baccarin, F. & Feltresi, M. (2010). Il calendario come veicolo per la modellizzazione matematica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 33(A), 1, 9-45.

Bonotto, C., Basso, M., Baccarin, F., & Feltresi, M. (2013). Sul senso delle operazioni aritmetiche e degli algoritmi. Prima parte. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 36(A), 4, 325-356.

Bonotto, C., Basso, M., Baccarin, F., & Feltresi, M. (2014). Sul senso delle operazioni aritmetiche e degli algoritmi. Seconda parte. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 37(A), 3, 226-256.

Bonotto, C., Dal Santo, L. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving and Creativity in the Primary School. In F. M. Singer, N. Ellerton, and J. Cai (Eds.). *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice Research in Mathematics Education* (pp.103-123), New York: Springer.

Bonotto, C., Wilczewski, E. (2007). I problemi di matematica nella scuola primaria: sull'attivazione o meno di conoscenze di tipo realistico. In C. Bonotto (Ed.), *Quotidianizzare la matematica* (pp. 101-134). Lecce: Edizioni La Biblioteca Pensa Multimedia.

Brown, S. I., Walter, M. I. (1988). *L'arte del problem posing,* Torino: Scuola Viva.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education,* 23(1), 2-33.

Cole, M., (1995). La cultura in una teoria della comunicazione della mente. In O. Liverta Sempio, A. Marchetti (Eds.), *Il pensiero dell'altro* (pp. 97-123), Milano: Raffaello Cortina.

D'Ambrosio, U. (1995). Etnomatematica: teoria e pratica pedagogica. *L'Educazione Matematica*, Anno XVI, Serie IV, 2 (3), 147-159.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106.

English, L. D. (2003). Engaging students in problem posing in an inquiry-oriented mathematics classroom. In F. Lester, R. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp.187-198). Reston, Virginia: NCTM.

Freudenthal, H. (1994). *Ripensando l'educazione matematica*. Milano: Editrice La Scuola.

Gravemeijer, K. (1997). Commentary solving word problems: A case of modelling. *Learning and Instruction,* 7, 389-397.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics, *Mathematical Thinking and Learning. An International Journal*, *1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modeling as a precursor to mathematical modeling. In W. Blum *et al.* (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 137-144). New ICMI Studies Series no. 10. New York: Springer.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lave, J. (1995). I problemi aritmetici. In O. Liverta Sempio, A. Marchetti (Eds.). *Il pensiero dell'altro* (pp.167-168), Milano: Raffaello Cortina.

Lesh, R., Doerr, H. (2003). In what ways does a models and modeling perspective move beyond constructivism? In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 383–403). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mousoulides, N., Sriraman, B., & Christou, C. (2007). From problem solving to modelling – the emergence of models and modelling perspectives. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 12 (1), 23-47.

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1, n.1, 41-48.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58.

Pontecorvo, C. (1997). *Apprendere nei contesti*, Studi e Documenti degli Annali della P.I., 78, Le Monnier, 384-396.

Resnick, L. B. (1987). Learning in school and out. *Educational Researcher, 16*(9), 13-20.

Resnick, L. B. (1995). Razionalismo situato. In O. Liverta Sempio, A. Marchetti (Eds.). *Il pensiero dell'altro* (pp. 73-95), Milano: Raffaello Cortina.

Saxe, B. G. (2002). Children's developing mathematics in collective practices: A framework for analysis. *Journal of the Learning Sciences*, 11 (2/3), 275-300.

Saxe, B. G., Dawson, V., Fall, R., Howard, S. (1996). Culture and children's mathematical thinking. In R. J. Sternberg, T. Ben-Zeev (Eds.). *The Nature of Mathematical Thinking* (pp.119-144). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann, A. D. (2002). Representational tools and mathematical understanding, *Journal* *of the Learning Sciences*, 11 (2/3), 301-316.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss *et al.* (Eds.). *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.

Stoyanova, E., Ellerton, N. F. *(*1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In Clarkson, P. C. (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525), Mathematics Education Research Group of Australasia: The University of Melbourne.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiscobas Project.* Dordrecht: D. Reidel Publ. Co.

Verschaffe, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teacher's conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction,* 7(4), 339-359.

Yackel, E., Cobb, P. (1996). Classroom sociomathematical norms and intellectual autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Zan, R. (1991). I modelli concettuali di "problema" nei bambini della scuola elementare, parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 14A, 9, 807-840.

Zan, R. (2000). Atteggiamenti e difficoltà in matematica*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol. 23A, 5, 442-465.

Received October 10, 2017
Revision received November 11, 2017/December 3, 2017
Accepted December 30, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 46-75 – ISSN 2038-1034

Ripensare la didattica della Matematica nella scuola primaria a partire da un uso formativo dei risultati delle rilevazioni nazionali

Davide Capperucci

Abstract – *The present paper investigates to what extent the results of National Evaluation Service tests can be used at system and school level to promote self-assessment processes designed to improve pupils' performances and renew the teaching of mathematics in primary school. Considering design, structure and frameworks of the national surveys, the strengths and weaknesses related to data reporting are highlighted, in order to develop formative assessment processes and improve the effectiveness of teaching practice. In this connection, some methodological proposals are put forward to rethink mathematics teaching in primary school starting from a critical and reflective use of test items.*

Riassunto – *Il presente articolo indaga in che misura i risultati delle rilevazioni del Servizio Nazionale di Valutazione possono essere utilizzati a livello di sistema e di scuola per la promozione di processi di autovalutazione finalizzati al miglioramento delle prestazioni degli alunni e al rinnovamento della didattica della matematica nella scuola primaria. Considerando il disegno, la struttura e i quadri di riferimento delle rilevazioni nazionali vengono messi in luce i punti di forza e i punti di debolezza legati alla restituzione dei dati, affinché questi possano essere utilizzati dalle istituzioni scolastiche in termini di valutazione formativa e per incrementare l'efficacia delle pratiche didattiche. A riguardo vengono avanzate alcune proposte metodologiche per ripensare la didattica della matematica nella scuola primaria a partire da un uso critico e riflessivo dei quesiti delle prove.*

Keywords – assessment, standardized tests, learning outcomes, mathematics teaching, school effectiveness

Parole chiave – valutazione, prove standardizzate, risultati di apprendimento, didattica della matematica, efficacia scolastica

Davide Capperucci è Ricercatore confermato di Pedagogia Sperimentale e Docente di *Teorie e metodi di progettazione e valutazione scolastica* presso l'Università di Firenze. Per la casa editrice FrancoAngeli co-dirige la collana *peer reviewed* “Ricerca-Formazione”. Tra le sue ultime pubblicazioni: *Prove del Servizio nazionale di valutazione e apprendimento della matematica: migliorare le performance della scuola primaria a partire dai risultati* (in “Studi sulla formazione”, 2017, pp. 43-67); *Certificare competenze attraverso le rubriche di valutazione: un percorso di Ricerca-Formazione realizzato con gli insegnanti del primo ciclo d'istruzione* (in P. Magnoler, A. M. Notti, L. Perla, *La professionalità degli insegnanti. La ricerca e le pratiche*, Lecce, Pensa Multimedia, 2017, pp. 611-632).

1. Introduzione

La ricerca pedagogico-didattica riconosce un legame molto stretto tra didattica e valutazione degli apprendimenti. Per molto tempo la valutazione è stata considerata il momento terminale dell'esperienza didattica, attraverso il quale verificare la qualità degli risultati conseguiti. Questa concezione sommativa della valutazione nel nostro Paese è stata messa in discussione intorno alla fine degli anni Settanta, a vantaggio di altri approcci che ne hanno enfatizzato soprattutto il valore formativo (Vertecchi, Agrusti & Losito, 2010; Vannini, 2009), e che hanno interpretato la valutazione soprattutto come *strumento per l'apprendimento* e non solo per l'insegnamento (Varisco, 2000). La valutazione, infatti, può fornire informazioni importanti non solo sugli esiti del processo formativo ma anche su come implementare, adattare, modificare gli interventi didattici in base al *feedback* che gli alunni restituiscono all'inizio, durante e al termine di un qualsiasi percorso di formazione (Hattie, 2012). Dall'analisi funzionale degli errori che un bambino compie nell'esecuzione di una prova, nella scelta di una risposta, nel fornire una spiegazione del procedimento risolutivo adottato, l'insegnante esperto è in grado di utilizzare la valutazione come strumento formativo almeno in due direzioni. La prima punta ad analizzare in profondità i processi cognitivi, le strategie di ragionamento e *problem solving* messe in atto dall'alunno se posto di fronte ad una situazione-problema; la seconda coinvolge direttamente l'insegnante, o meglio il *team docente*, nella ri-definizione della progettazione didattica e nell'introduzione di possibili varianti in grado di rendere l'insegnamento più efficace e personalizzato rispetto ai bisogni apprenditivi dell'alunno. In tal senso la valutazione viene ad assumere una funzione formativa per l'alunno e regolativa per l'insegnante, elevando il livello di qualità e di risultato dell'intervento didattico.

Questa funzione formativa della valutazione può essere valorizzata attraverso qualsiasi tipo di prova, da quelle tradizionali e quelle oggettive e standardizzate. Il presente contributo si focalizza in modo specifico su questa seconda tipologia, prendendo a riferimento le prove del Servizio Nazionale di Valutazione (dette anche prove SNV o più comunemente prove INVALSI), per il biennio 2015-2017. Il contributo si compone di due parti. Una prima parte in cui vengono analizzati i risultati delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione per gli anni scolastici 2015/2016 e 2016/2017 ed una seconda parte nella quale l'attenzione si concentra sull'analisi degli errori più ricorrenti e su come questi possano essere letti dagli insegnanti in funzione del miglioramento dei risultati di apprendimento degli alunni e di un ripensamento delle metodologie impiegate nella didattica della matematica.

2. Validità e attendibilità delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione: i test di matematica per la scuola primaria

La legge 25 ottobre 2007, n. 176 e la direttiva ministeriale n. 74 del 2008 hanno previsto l'avvio del Servizio Nazionale di Valutazione affidato all'INVALSI (Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione), con il compito di predisporre, dall'anno scolastico 2008/09, prove oggettive standardizzate per rilevare le conoscenze e le abilità in Italiano e Matematica, nelle classi seconde e quinte della scuola primaria.

La somministrazione delle prove SNV oggi è diventata una pratica consolidata all'interno delle scuole. Quello su cui resta ancora molto da fare è come supportare le scuole nella lettura dei dati dei test standardizzati affinché questi possano essere utilizzati per ripensare la didattica e per migliorare i risultati di apprendimento degli alunni. Questi dati, pur con i limiti che presentano, essendo riferiti soltanto ad alcune classi e ad alcune discipline del curricolo, proprio a partire dalla misurazione dei risultati possono aiutare le istituzioni scolastiche a conoscersi meglio, ad indagare i processi didattici e organizzativi messi in atto, ad autovalutare l'efficacia delle pratiche educative, a condividere obiettivi di miglioramento a medio termine.

La comunicazione dei risultati medi nazionali e per macro-area geografica interessa soprattutto la valutazione di sistema e anche i risultati medi di classe e di scuola hanno una ricaduta limitata per le singole scuole, perché la trasmissione del dato statistico non porta a modificare in automatico le pratiche di insegnamento rendendole più efficaci. L'azione culturale da portare avanti è quella di supportare le scuole nell'utilizzo dei risultati della valutazione esterna in chiave formativa per pianificare interventi pensati in funzione dell'elevamento delle prestazioni degli alunni a partire dall'analisi delle risposte ai singoli item delle prove (Trinchero, 2014). Come avremo modo di precisare meglio nella seconda parte del presente contributo, è soprattutto a partire dalla *micro*-analisi delle risposte fornite a livello di singolo alunno, di classe e di scuola che diventa possibile individuare i punti di forza e di debolezza rispetto ai quali predisporre interventi mirati di recupero e potenziamento.

Le prove standardizzate per fornire informazioni attendibili sugli apprendimenti degli alunni dal punto di vista docimologico devono avere un alto grado di validità e attendibilità. Fin dalle prime somministrazioni le prove INVALSI sono state sottoposte ad un rigoroso processo di validazione, finalizzato a rilevarne sia la validità di contenuto che la validità interna. La prima rimanda a quanto le prove sono coerenti con i riferimenti curricolari definiti dalle *Indicazioni Nazionali* (MIUR, 2012) per le conoscenze e le abilità matematiche da sviluppare nei cinque anni della scuola primaria.

A tale scopo gli item delle prove, dopo aver superato un pre-test, vengono selezionati da un gruppo di esperti che ne valutano la significatività rispetto agli ambiti di contenuto e ai processi cognitivi previsti dalle *Indicazioni* prima e dai Quadri di Riferimento SNV poi. Per la validità interna, ovvero se le domande poste sono effettivamente in grado di misurare i costrutti su cui le prove si basano, viene condotta un'analisi fattoriale con approccio delle variabili soggiacenti (*Underlying Variable Approach*), secondo il modello di Moustaki (2000), supportata dal programma MPLUS (Muthén & Muthén, 2010). Sia nell'uno che nell'altro caso, la capacità delle prove di indagare contenuti e processi matematici è risultata psicometricamente buona.

Sul fronte dell'attendibilità invece, facendo riferimento alla Teoria Classica dei Test (CTT), vengono calcolati gli indici di difficoltà, discriminatività e coerenza interna delle domande. Attraverso il computo del coefficiente di attendibilità Alpha di Cronbach (o del coefficiente KR-20 nel caso di item dicotomici) si rileva l'attendibilità della consistenza interna del test, ovvero la cosiddetta "dimensionalità della prova" rispetto alla presenza o meno di item incoerenti con gli altri (Barbaranelli & Natali, 2005).

Prendendo in esame le prove di entrambe le classi di scuola primaria dell'ultimo biennio, nel 2016 in seconda il valore del coefficiente di attendibilità è di 0,83 contro lo 0,85 del 2017; per le prove di quinta del 2016 invece è di 0,88, e 0,882 per quelle del 2017[1].

Nel 2016, in seconda primaria, l'indice di difficoltà delle domande (dato dalla percentuale di risposte corrette a ciascun quesito) varia da 0,23 (23% di risposte corrette, domanda "difficile") a 0,84 (84% di risposte corrette, domanda "facile"), per la prova di quinta esso va da 0,07 a 0,96. Nel 2017 detto indice oscilla tra 0,25 e 0,88 sia in seconda che in quinta.

L'indice di discriminatività (capacità dei singoli item di differenziare i soggetti con maggiori abilità da quelli con minori abilità) presenta valori sempre superiori alla soglia critica di 0,25 in tutte le prove di entrambi gli anni. Nel 2016 nella prova della classe seconda solo un item (D1.b) ha un indice minimo di 0,17; in quinta sono due i quesiti (D2_a e D2_c) che presentano un valore di discriminatività sensibilmente al di sotto della soglia di accettabilità. Nel 2017 in seconda tutte le domande presentano un adeguato potere discriminante, mentre in quinta due quesiti (D11 e D27) hanno un valore di discriminatività al di sotto della soglia di accettabilità (rispettivamente di 0,15 e 0,17). La costanza positiva dei valori connessi all'attendibilità delle prove mostra come queste nel corso del tempo abbiano acquisito una certa robustezza a garanzia della qualità delle informazioni che riescono a fornire sugli apprendimenti degli alunni.

Per analizzare la capacità misuratoria delle prove SNV si fa ricorso anche alla Teoria della Risposta all'Item (IRT) secondo il Modello di Rasch (1980), che consente di stimare l'abilità dei soggetti indipendentemente dalla difficoltà degli item e viceversa, affiancato dalla mappa item-soggetti di Wright (1994). In tutte le prove di matematica dell'ultimo biennio e per tutte le classi coinvolte, il modello di Rasch ha evidenziato una soddisfacente capacità misuratoria degli item, compresa tra 0,90 e 1,13 nella prova di seconda del 2016; tra 0,87 e 1,15 per quella di quinta del medesimo anno; tra 0,86 e 1,13 per la prova svolta dalle classi seconde nel 2017 e nell'intervallo 0,90 - 1,10 per le classi quinte sempre del 2017. Come termine di paragone si ricorda che nel modello in questione le soglie critiche di misurabilità di un item prevedono un campo di variazione compreso tra 0,80 e 1,20, oltre questo *range* l'attendibilità dell'item non può più essere considerata soddisfacente.

Altrettanto è stato confermato dalla mappa di Wright. Quest'ultima consente di rappresentare graficamente e mettere in relazione su un'unica scala gli item della prova in base al loro livello di difficoltà con le abilità dei rispondenti. Nella scala lo 0 corrisponde al livello medio di abilità dei rispondenti del campione, i valori negativi corrispondono agli item più facili e quindi agli allievi che hanno un minor livello di abilità, i valori positivi corrispondono agli item più difficili e dunque agli allievi con un maggior livello di abilità. Dall'esame dei valori della scala, emerge che la maggior parte delle domande di tutte e quattro le prove di matematica per la scuola primaria degli ultimi due anni si colloca nella parte centrale della scala di abilità, rappresentando adeguatamente i livelli di performance da medio-bassi a medio-alti. Un minor numero di domande, invece, si colloca agli estremi della scala, in particolare nell'area corrispondente ai livelli più elevati di abilità degli alunni e di difficoltà degli item, ciò sta ad indicare

[1] Secondo la scala convenzionale dell'Alpha di Cronbach una misura pari o superiore a 0,80 indica un buon grado di consistenza interna della prova.

che le stime ottenute sono più efficienti per i valori di abilità intermedi, mentre l'errore di misurazione tende a essere maggiore per i valori più distanti dalla media.

3. Quadri di riferimento e risultati delle prove SNV di matematica per la scuola primaria (2015-2017)

Le prove del Servizio Nazionale di Valutazione, riguardo alla matematica, partono dall'individuazione di specifici obiettivi di conoscenze e di abilità, indagati dagli item che compongono il test e che sono riportati nei cosiddetti Quadri di Riferimento (QdR).

I QdR definiscono il valore informativo delle prove, chiarendo quali sono gli oggetti della valutazione e la struttura delle prove. Come esplicitato nel QdR di matematica, le prove non intendono valutare le nozioni della disciplina ma si occupano degli aspetti di "formalizzazione matematica", ovvero della capacità di esprimere e usare il pensiero matematico. Ciò che le prove SNV cercano di stimolare, al di là del dato informativo, è la capacità del bambino di ragionare attorno a problemi, questioni e casi matematici, di operare con la matematica grazie al supporto delle conoscenze di base necessarie (Bolondi, 2014).

Per questo le prove si concentrano su due oggetti specifici: 1. i *contenuti matematici*, individuati a partire dagli ambiti della matematica previsti dalle *Indicazioni Nazionali per il curricolo* del 2007 e 2012; 2. i *processi cognitivi* richiesti per la risoluzione delle situazioni-problema proposte, con particolare attenzione ai quadri di riferimento della indagini internazionali IEA-TIMSS (Mullis & Martin, 2013) e OECD-PISA (OECD, 2016)[2].

La prova di matematica per la seconda primaria prende in esame gli ambiti di contenuto riferiti a *Numeri*, *Spazio e figure*, *Dati e previsioni*. Essa mira a valutare la capacità degli alunni di sviluppare e applicare il pensiero matematico in vista della risoluzione di problemi legati a situazioni quotidiane, a partire da elementi forniti esplicitamente nel testo e/o che devono essere inferiti grazie alle informazioni disponibili. I formati dei quesiti sono solitamente due: domande a scelta multipla semplice con tre opzioni di risposta; domande a risposta aperta univoca.

La prova per la classe quinta primaria copre tutti e quattro gli ambiti della matematica, *Numeri*, *Spazi e figure*, *Dati e previsioni*, *Relazioni e funzioni* ed è composta da circa 40 domande, parte delle quali sono a scelta multipla con quattro alternative di risposta, a risposta aperta e a scelta multipla complessa. Il tipo di codifica per ciascuna domanda è sempre dicotomico come per la prova della classe seconda. A seguito delle novità introdotte nella rilevazione dell'a.s. 2015/2016 (INVALSI, 2015), tutti i quesiti sono riferiti ai *Traguardi per lo sviluppo delle competenze* della matematica previsti dalle *Indicazioni* e ricondotti a tre "dimensioni" specifiche delle competenze matematiche, "conoscere", "risolvere problemi", "argomentare" (INVALSI, 2015), come avviene nell'indagine internazionale IEA-TIMSS (Mullis & Martin, 2013).

[2] Per un'analisi dettagliata degli *ambiti di contenuto* e dei *processi* previsti dai QdF delle prove di matematica si rimanda al sito dell'INVALSI, https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_2017_def.pdf, consultato in data 19/08/2017.

Nelle Figure 1, 2, 3 e 4 sono riportati i risultati delle prove di matematica delle classi seconde e quinte degli ultimi due anni (INVALSI, 2016; 2017). Le rilevazioni degli anni scolastici 2015/2016 e 2016/2017 sono particolarmente importanti perché rappresentano le ultime due indagini realizzate prima delle trasformazioni previste dal D. Lgs. n. 62 del 13 aprile 2017 – *Norme in materia di valutazione e certificazione delle competenze nel primo ciclo ed esami di Stato*[3].

Gli estremi della zona bianca al centro di ogni barra corrispondono al 25° e 75° percentile della distribuzione dei punteggi, mentre le due estremità della barra corrispondono al 5° e 95° percentile. La lunghezza totale delle barre indica l'ampiezza della dispersione dei punteggi rispetto a quella complessiva dell'Italia, mentre l'estensione delle barre a sinistra o a destra delle linee verticali che delimitano l'intervallo di confidenza della media nazionale indica se nella distribuzione tendono a prevalere, rispettivamente, i valori al di sotto di essa oppure quelli al di sopra. Nella scala utilizzata dall'INVALSI il punteggio medio nazionale corrisponde convenzionalmente a 200 e la deviazione standard a 40.

Confrontando i risultati delle Figure 1 e 2 per la classe seconda primaria riferiti alle prove svolte nel 2016 e nel 2017, dai dati ottenuti dal campione nazionale si nota come non sussistano particolari differenze tra le due annualità, infatti nessuna macro-area si differenzia in modo significativo dalla media del Paese ad eccezione del Sud e Isole che in entrambi i casi presenta alcune criticità, con uno scarto rispetto alla media nazionale di 5 punti nel 2016 e di 7 punti nel 2017. Nel 2017 il Nord-Ovest si differenzia significativamente in positivo dalla media italiana. Nel 2016 le regioni con il punteggio più alto (206) risultano essere le Marche, il Molise e la Basilicata, seguite dalla provincia autonoma di Trento, il Friuli-Venezia Giulia, l'Abruzzo, la Campania (205), il Piemonte (204). Nel 2017 sono il Piemonte (207), il Molise (213) e la Basilicata (208). La Calabria in entrambe le annualità è la regione con il punteggio più basso (186 nel 2016 e 183 nel 2017).

Come verificatosi già nel 2016, l'omogeneità dei risultati a livello nazionale registrata per le classi seconde non è confermata dai risultati delle classi quinte in nessuno dei due anni qui considerati. Dall'analisi delle Figure 3 e 4, infatti, sono riscontrabili maggiori differenze rispetto alla media nazionale sia tra le macro-aree che tra le regioni. Nel 2016 il Nord-Ovest risulta essere la macro-area geografica con una media significativamente maggiore (207) a 200, mentre il Sud e Isole quella con una media significativamente inferiore (189). Il Nord-Est, il Centro e il Sud non si discostano significativamente dalla media del Paese con valori però in progressiva diminuzione. Nel 2017 la situazione permane la stessa. In quest'ultima rilevazione, quindi, le macro-aree con risultati positivi li hanno confermati, lo stesso dicasi in alcune aree del Sud e soprattutto nel Sud-Isole dove la media delle risposte rimane sempre ad di sotto dei valori nazionali.

[3] Per una disamina delle novità sulle rilevazioni nazionali degli apprendimenti previste dal Decreto si rimanda a quanto indicato agli artt. 4 e 7 dello stesso.

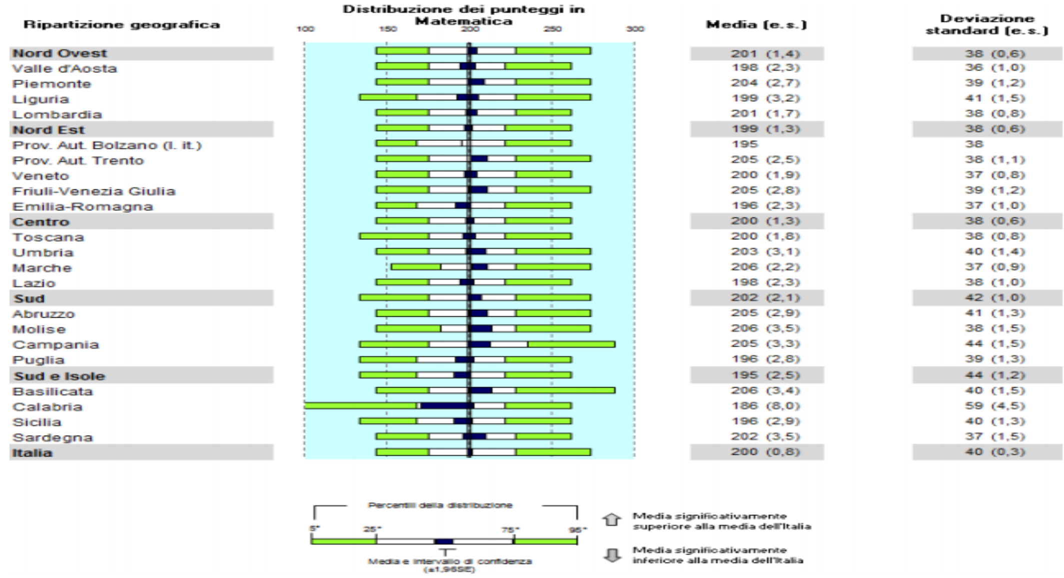


Figura 1 – Distribuzione dei punteggi della prova di Matematica – classe II primaria a. s. 2015/2016 (Fonte: INVALSI, 2016)

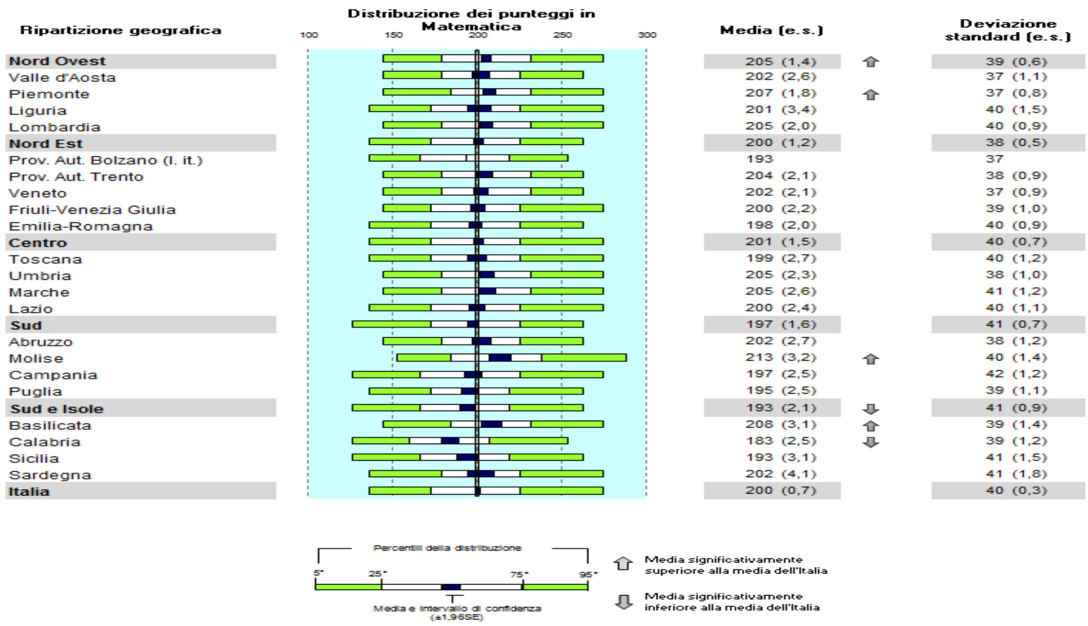
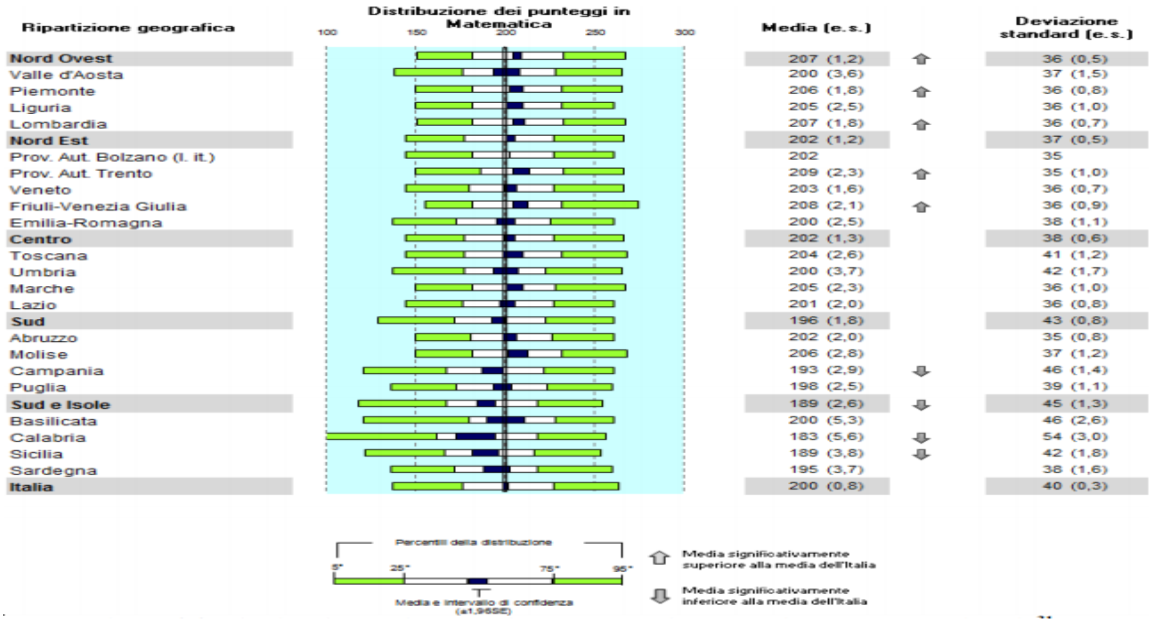
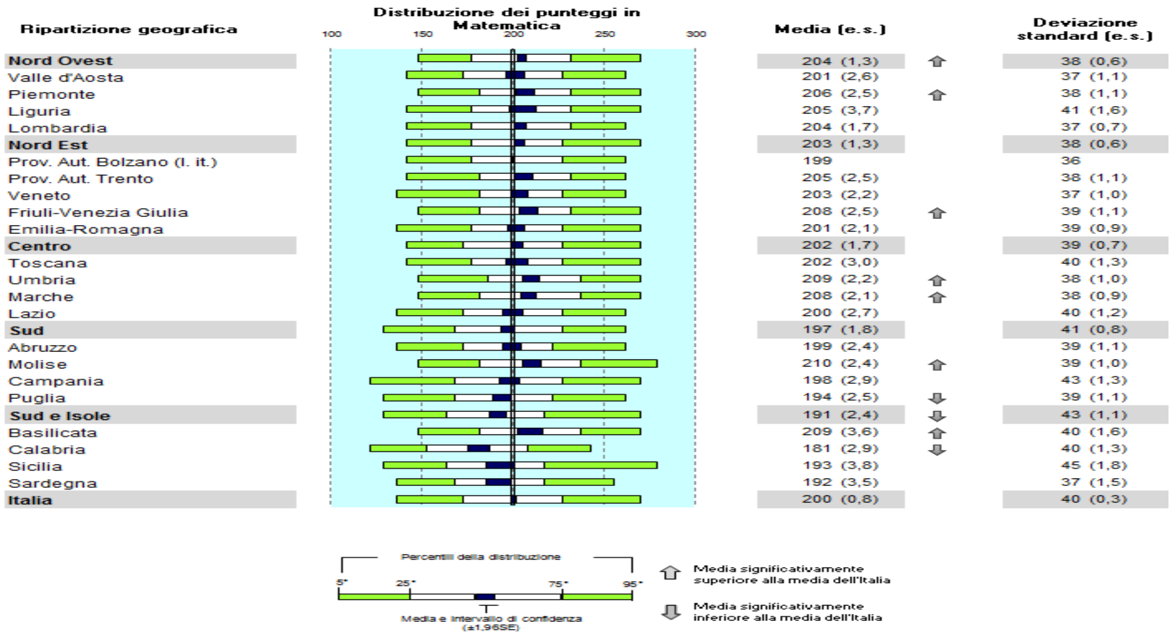


Figura 2 – Distribuzione dei punteggi della prova di Matematica – classe II primaria a. s. 2016/2017 (Fonte: INVALSI, 2017)



Ripartizione geografica	Media (e. s.)		Deviazione standard (e. s.)
Nord Ovest	207 (1,2)	↑	36 (0,5)
Valle d'Aosta	200 (3,6)		37 (1,5)
Piemonte	206 (1,8)	↑	36 (0,8)
Liguria	205 (2,5)		36 (1,0)
Lombardia	207 (1,8)	↑	36 (0,7)
Nord Est	202 (1,2)		37 (0,5)
Prov. Aut. Bolzano (l. it.)	202		35
Prov. Aut. Trento	209 (2,3)	↑	35 (1,0)
Veneto	203 (1,6)		36 (0,7)
Friuli-Venezia Giulia	208 (2,1)	↑	36 (0,9)
Emilia-Romagna	200 (2,5)		38 (1,1)
Centro	202 (1,3)		38 (0,6)
Toscana	204 (2,6)		41 (1,2)
Umbria	200 (3,7)		42 (1,7)
Marche	205 (2,3)		36 (1,0)
Lazio	201 (2,0)		36 (0,8)
Sud	196 (1,8)		43 (0,8)
Abruzzo	202 (2,0)		35 (0,8)
Molise	206 (2,8)		37 (1,2)
Campania	193 (2,9)	↓	46 (1,4)
Puglia	198 (2,5)		39 (1,1)
Sud e Isole	189 (2,6)	↓	45 (1,3)
Basilicata	200 (5,3)		46 (2,6)
Calabria	183 (5,6)	↓	54 (3,0)
Sicilia	189 (3,8)	↓	42 (1,8)
Sardegna	195 (3,7)		38 (1,6)
Italia	200 (0,8)		40 (0,3)

Figura 3 – Distribuzione dei punteggi della prova di Matematica – classe V primaria a. s. 2015/2016 (Fonte: INVALSI, 2016)



Ripartizione geografica	Media (e. s.)		Deviazione standard (e. s.)
Nord Ovest	204 (1,3)	↑	38 (0,6)
Valle d'Aosta	201 (2,6)		37 (1,1)
Piemonte	206 (2,5)	↑	38 (1,1)
Liguria	205 (3,7)		41 (1,6)
Lombardia	204 (1,7)		37 (0,7)
Nord Est	203 (1,3)		38 (0,6)
Prov. Aut. Bolzano (l. it.)	199		36
Prov. Aut. Trento	205 (2,5)		38 (1,1)
Veneto	203 (2,2)		37 (1,0)
Friuli-Venezia Giulia	208 (2,5)	↑	39 (1,1)
Emilia-Romagna	201 (2,1)		39 (0,9)
Centro	202 (1,7)		39 (0,7)
Toscana	202 (3,0)		40 (1,3)
Umbria	209 (2,2)	↑	38 (1,0)
Marche	208 (2,1)	↑	38 (0,9)
Lazio	200 (2,7)		40 (1,2)
Sud	197 (1,8)		41 (0,8)
Abruzzo	199 (2,4)		39 (1,1)
Molise	210 (2,4)	↑	39 (1,0)
Campania	198 (2,9)		43 (1,3)
Puglia	194 (2,5)	↓	39 (1,1)
Sud e Isole	191 (2,4)	↓	43 (1,1)
Basilicata	209 (3,6)	↑	40 (1,6)
Calabria	181 (2,9)	↓	40 (1,3)
Sicilia	193 (3,8)		45 (1,8)
Sardegna	192 (3,5)		37 (1,5)
Italia	200 (0,8)		40 (0,3)

Figura 4 – Distribuzione dei punteggi della prova di Matematica – classe V primaria a. s. 2016/2017 (Fonte: INVALSI, 2017)

A livello regionale il Piemonte (206 punti sia nel 2016 che nel 2017), e il Friuli-Venezia-Giulia (208 sia nel 2016 che nel 2017) continuano ad avere risultati significativamente al di sopra della media del Paese. Positivo nel 2017 anche l'andamento di alcune regioni del centro come Umbria (209) e Marche (208) e del Sud come Molise (210) e Basilicata (209), mentre sono in diminuzione le prestazioni della Puglia (194) ed è sempre la Calabria a far registrare i punteggi più bassi (183 nel 2016 e 181 nel 2017). In linea generale per le classi quinte la lettura dei risultati a livello nazionale presenta un andamento ancora non del tutto soddisfacente con forti differenziazioni nel Paese, ragione per cui continua ad essere prioritario lavorare in funzione di un miglioramento della didattica della matematica nella scuola primaria a partire dalle evidenze fornite sia dai risultati delle rilevazioni nazionali che dalle prove svolte dagli insegnanti.

Relativamente agli ambiti di contenuto, come riportato nella Tabella 1, nelle prove del 2016, gli alunni di seconda primaria hanno incontrato maggiori difficoltà in *Numeri*, mentre gli alunni di quinta primaria in *Spazio e figure* e *Relazioni e funzioni*. Nel 2017 invece gli alunni di seconda hanno avuto punteggi più bassi in *Dati e previsioni*, seguito da *Numeri* e *Spazio e figure*. In quinta maggiori criticità sono state rilevate in *Relazioni e funzioni*, seguito da *Spazio e figure*, *Numeri* e *Dati e previsioni*. È opportuno ricordare come nell'economia di ciascuna prova gli ambiti non abbiano lo stesso peso: ad esempio all'ambito *Numeri* della prova di seconda primaria è dedicata maggiore attenzione che agli altri, mentre la prova di quinta prevede una distribuzione più equa degli item per ambito. Ciò detto la validità statistica dei dati qui riportati è piuttosto limitata, tuttavia essi possono essere utili a livello di sistema per la predisposizione di interventi e piani specifici a supporto dell'apprendimento delle conoscenze/competenze matematiche di base.

Classe II primaria				
Ambito di contenuto	*Difficoltà media*		*Percentuale media risposte corrette*	
	a. s. 2015/2016	*a. s. 2016/2017*	*a. s. 2015/2016*	*a. s. 2016/2017*
Numeri	210,43	198,96	44,02	50,41
Spazio e figure	181,31	183,04	59,71	58,55
Dati e previsioni	168,75	200,20	65,70	48,35
Classe V primaria				
Ambito di contenuto	*Difficoltà media*		*Percentuale media risposte corrette*	
	a. s. 2015/2016	*a. s. 2016/2017*	*a. s. 2015/2016*	*a. s. 2016/2017*
Numeri	193,18	190,91	51,20	54,96
Spazio e figure	208,21	194,25	44,19	52,59
Dati e previsioni	170,43	174,04	62,24	62,74
Relazioni e funzioni	202,71	208,22	46,79	45,22

Tabella 1 – Risultati della prova di matematica di II e V primaria per ambito di contenuto (2015/2016 e 2016/2017) (Fonte: INVALSI, 2016; 2017)

La lettura dei risultati di matematica in base ad alcune caratteristiche socio-demografiche degli alunni, quali il genere, la cittadinanza e la carriera scolastica, permette alle scuole di conoscere meglio i propri studenti e di organizzare l'offerta formativa tenendo presenti questi aspetti, al fine di verificare quella sia il reale valore aggiunto al netto di detti fattori (Corsini, 2015), i quali, come evidenziato dalle indagini internazionali IEA e OECD, incidono in modo rilevante sugli esiti di apprendimento.

Nella scuola primaria l'incidenza di queste caratteristiche personali comincia ad emergere già a partire dai primi anni per poi diventare significativa soprattutto verso la conclusione del ciclo. Rispetto al genere, ad esempio, differenze significative sono riscontrabili sia nelle prove di matematica di seconda che di quinta per entrambi gli anni: i maschi, infatti, si posizionano sopra la media nazionale, le femmine al di sotto (questo dato è confermato anche dalle prove delle classi successive e le differenze tendono ad aumentare nel corso dell'itinerario scolastico). L'analisi dei dati per macro-aree conferma quanto rilevato a livello nazionale. Nelle classi seconde di tutte le macro-aree del Paese i maschi hanno risultati più alti nella prova di matematica, con una differenza significativa pari a +8 punti nel Nord-Est nel 2016 passata a +6 nel 2017, e a +7 nel Nord-Ovest nel medesimo anno. In quinta questa differenza si irrobustisce ulteriormente nelle macro-aree del Nord-Ovest, Nord-Est e Centro, dove nel 2017 l'incremento è rispettivamente di +8, +8 e + 10 punti rispetto ai valori medi conseguiti dalle femmine. A livello regionale questo andamento è più evidente in Liguria (+14), Piemonte (+9), Lombardia (+8), Veneto (+8), Emilia-Romagna (+8), Lazio (+14), Puglia (+9) e Basilicata (+9)[4].

Come noto anche la provenienza e le origini degli alunni rappresentano una caratteristica personale che incide pesantemente sui risultati di apprendimento, soprattutto nella scuola primaria che fra tutti gli ordini e gradi scolastici è quello che nel corso degli ultimi anni ha accolto il numero più alto di alunni stranieri (Fondazione Ismu, 2017).

Per quanto riguarda i risultati di apprendimento degli alunni di origine e/o provenienza diversa da quella italiana è normale pensare che questi presentino un rendimento scolastico più basso rispetto agli alunni italiani. Nonostante ciò è fondamentale conoscere, sia a livello nazionale che di scuola, l'entità di tale *gap*. Individuare cioè in quali ambiti della disciplina questa differenza di risultati è maggiore e quali sono le difficoltà specifiche che gli alunni stranieri presentano. In generale, le differenze tra alunni italiani e alunni stranieri tendono a essere maggiori nelle aree dell'Italia dove i processi migratori hanno una portata maggiore e dove più alti sono i risultati di apprendimento. Come mostrano i dati della Tabella 2, esistono differenze di risultato visibili tra gli alunni stranieri di prima e seconda generazione, e tra le classi iniziali e quelle terminali della scuola primaria per effetto della scolarizzazione. Gli alunni stranieri di seconda generazione presentano una differenza rispetto agli alunni italiani di 15 punti nella prova di seconda e di 13 punti in quella di quinta, di poco più bassa rispetto ai 17 punti e ai 13 punti del 2016. Nel 2017 in entrambe le prove le differenze di risultato tra alunni italiani e alunni stranieri si sono ridotte rispetto agli anni precedenti pur rimanendo significative.

[4] L'andamento dei risultati procede in senso contrario nelle prove di Italiano, dove le alunne femmine delle classi quinte hanno risultati significativamente superiori ai loro compagni maschi soprattutto in Veneto e nel Lazio nel 2016 e in Lombardia e Sardegna nel 2017.

Classe II primaria					
Macro-area geografica	*Alunni Italiani*	*Alunni Stranieri di I generazione*	*Alunni Stranieri di II generazione*	*Differenza tra Italiani e Stranieri I generazione Matematica*	*Differenza tra Italiani e Stranieri II generazione Matematica*
Nord-Ovest	208	191	191	17	17
Nord-Est	206	177	181	29	24
Centro	203	182	188	21	15
Sud	197	183	191	14	6
Sud e Isole	194	170	185	24	10
Italia	202	182	187	20	15

Classe V primaria					
Macro-area geografica	*Alunni Italiani*	*Alunni Stranieri di I generazione*	*Alunni Stranieri di II generazione*	*Differenza tra Italiani e Stranieri I generazione Matematica*	*Differenza tra Italiani e Stranieri II generazione Matematica*
Nord-Ovest	208	177	191	30	16
Nord-Est	207	177	186	30	21
Centro	204	181	192	23	12
Sud	197	182	186	15	11
Sud e Isole	191	167	190	25	2
Italia	202	177	189	24	13

Tabella 2 – Punteggi medi degli alunni italiani e stranieri di I e II generazione presenti nelle rilevazioni delle classi seconde e quinte per macro-aree geografiche, a. s. 2016/2017 (Fonte: nostra elaborazione)

Le prove SNV ci permettono di rilevare anche le differenze di rendimento di alunni in regola con il percorso di studi, e di coloro che sono in anticipo o in ritardo. Questo tema è strettamente collegato all'utilità o meno delle ripetenze, in merito al quale è in atto un ampio dibattito che coinvolge il mondo dell'educazione sia nazionale che internazionale. Le posizioni restano contrastanti, sia a livello pedagogico (Alexander, Entwisl & Dauber, 2003; Frabboni, 2010) che amministrativo-ordinamentale, infatti a riguardo tra i Paesi UE le soluzioni adottate variano da paese a paese.

Dalla Tabella 3 si evince come nella scuola primaria l'incidenza degli alunni anticipatari e posticipatari sia poco significativa sul totale di coloro che partecipano alle prove SNV. Il fenomeno dell'anticipo è maggiormente diffuso nel Sud e Sud-Isole, dove le percentuali sono in ogni livello scolare più alte di quelle che si registrano nel Nord e nel Centro.

Classe II primaria				
Macro-area geografica	*alunni anticipatari*		*alunni posticipatari*	
	a. s. 2015/2016	*a. s. 2016/2017*	*a. s. 2015/2016*	*a. s. 2016/2017*
Nord-Ovest	0,3	0,3	1,4	1,2
Nord-Est	0,3	0,2	1,7	1,8
Centro	1,3	0,7	1,2	1,0
Sud	3,3	3,5	0,8	0,9
Sud e Isole	3,2	4,0	1,0	1,4
Italia	1,5	1,6	1,2	1,3

	Classe V primaria			
Macro-area geografica	*alunni anticipatari*		*alunni posticipatari*	
	a. s. 2015/2016	*a. s. 2016/2017*	*a. s. 2015/2016*	*a. s. 2016/2017*
Nord-Ovest	0,3	0,4	2,1	2,7
Nord-Est	0,3	0,3	2,9	2,7
Centro	1,1	0,6	2,5	2,6
Sud	2,3	3,7	1,4	1,4
Sud e Isole	2,8	3,1	2,0	2,0
Italia	1,3	1,5	2,1	2,3

Tabella 3 – Percentuali di alunni anticipatari e posticipatari presenti nelle rilevazioni delle classi II e V per macro-aree geografiche, a.s. 2015/2016 e 2016/2017 (Fonte: nostra elaborazione)

Sul fronte dei risultati di apprendimento, dalle prove SNV di matematica di entrambi gli anni scolastici per gli alunni anticipatari e regolari, a livello nazionale e in riferimento alle macro-aree geografiche, sia in seconda che in quinta primaria, risulta che le differenze tra i punteggi non sono statisticamente significative. A livello nazionale per il 2016, infatti, il punteggio degli alunni regolari è pari a 200 nella classe seconda e 201 nella classe quinta. Lo stesso si verifica nel 2017. Per gli anticipatari esso ammonta a 201 nella classe seconda e a 199 nella classe quinta nel 2016, a 199 punti in seconda e 197 in quinta nel 2017.

Diversi invece sono i risultati che emergono dal confronto tra gli alunni regolari e quelli posticipatari o in ritardo a causa delle ripetenze. Pur trattandosi di un fenomeno marginale nella scuola primaria (che coinvolge a livello nazionale, poco più dell'1% degli alunni di seconda e del 2% di quelli di quinta), emerge una correlazione stretta tra alunni posticipatari e scarsi risultati di apprendimento misurati attraverso le prove SNV. I punteggi degli alunni posticipatari infatti sono sistematicamente al di sotto di quelli degli alunni regolari, con differenze statisticamente significative per quasi tutte le regioni, con punteggi che per i primi risultano essere più bassi anche di 20-30 punti rispetto a quelli conseguiti dagli alunni regolari.

4. Dai risultati all'innovazione didattica: proposte di riflessione per gli insegnanti

Oggi le conoscenze e le competenze matematiche ricoprono una ruolo centrale sia per la formazione personale di ogni cittadino che per la società e la competitività a livello economico. Per questo lo sviluppo di buone competenze matematiche a partire dalla scuola è diventato un obiettivo prioritario delle politiche europee per l'istruzione, come previsto dalla Strategia Europa 2020 (European Commission, 2010). Nella prospettiva dell'Unione Europea ciò che interessa accertare è se le conoscenze veicolate dalla scuola, sono saldamente ancorate ad un insieme di concetti di base che pur nella loro essenzialità trovano applicazione in molteplici contesti scolastici e extrascolastici (European Commission, 2011).

La didattica della matematica rappresenta quindi un laboratorio in costante evoluzione dove confluiscono e si integrano sia i contributi della ricerca scientifico-accademica che la saggezza della pratica degli insegnanti. Questa costante costruzione e de-costruzione di modelli, strumenti, pratiche, attività, ecc. può prendere avvio anche dall'analisi delle prove SNV, prestando attenzione alle risposte fornite dagli alunni a livello individuale, di classe e di scuola. Se dette risposte diventano oggetto di riflessione da parte dei docenti, di lavoro in classe, di ripensamento delle strategie didattiche, senza scadere nel *teaching to the test*, è possibile attribuire a queste prove non solo una funzione misuratoria ma anche formativa. In tal senso esse possono rappresentare efficaci strumenti per porre situazioni-problema sfidanti, scoprire informazioni, dati, procedure e soluzioni da sperimentare in maniera autentica e situata (Capperucci, 2011).

Come sostiene Fandiño Pinilla (2014), l'apprendimento della matematica chiama in causa molteplici aspetti e processi cognitivi che devono essere considerati a livello didattico. Esso infatti si struttura a partire dall'acquisizione di conoscenze e abilità che devono integrarsi tra loro per dare modo alla competenza matematica di esprimersi in situazione. La matematica fin dalla scuola primaria richiede la comprensione di nozioni e concetti; l'apprendimento algoritmico (calcolare, operare, ecc.); la costruzione di strategie (impostare un problema, pianificare, risolvere, elaborare congetture, ecc.); la capacità di comunicare i dati (dire, riferire, argomentare, validare, dimostrare, ecc.); la gestione delle trasformazioni semiotiche (riconoscere, scegliere, usare e gestire diversi registri semiotici nei quali esprimere le proprie conoscenze e competenze matematiche). Tutte queste azioni prevedono compiti cognitivi di complessità diversa da svilupparsi in maniera graduale, tassonomica, intenzionale all'interno di un percorso di insegnamento-apprendimento fondato su obiettivi chiari da esplicitare prima all'interno della progettazione didattica e da mettere in atto poi in classe (D'Amore & Frabboni, 2005; Bolondi, 2013).

Lo sviluppo di azioni cognitive così complesse attraverso l'insegnamento della matematica chiama in causa le teorie legate alla didattica della matematica. A fronte dei molteplici contributi presenti in letteratura (Bolondi, 2003), in questo frangente viene preso a riferimento soprattutto il modello euristico-costruttivista elaborato da Guy Brousseau (1986), poi in seguito ripreso anche a livello italiano (D'Amore, Sbaragli, 2011). Detto modello cerca di operare un superamento dell'approccio trasmissivo-deduttivo della didattica della matematica centrato sulla divulgazione delle idee e dei saperi matematici, in base a come questi si sono stratificati secondo una prospettiva storico-evolutiva della disciplina.

Il modello euristico-costruttivista qui richiamato prevede:

a) *uno spostamento dell'attenzione dagli oggetti della matematica ai processi di co-costruzione dell'apprendimento* che ne sottendono l'acquisizione. Ci si concentra soprattutto sull'epistemologia dell'apprendimento della matematica a partire dalle diverse strategie di mediazione didattica con cui certi principi, concetti e costrutti matematici possono essere presentati agli alunni;

b) *il ricorso ad una didattica laboratoriale* che non si limita alla predisposizione di ambienti artificiali, centrati sul potenziamento degli aspetti matematici connessi ad alcune attività, procedure e strumenti. Quello che molti studi hanno evidenziato (McMillan & Schumacher, 2010), infatti, è la difficoltà degli alunni nel mettere in atto processi di *transfer cognitivo*, ovvero nel trasferire il sapere appreso in un contesto strutturato, artificiale, situato in un'altra situazione più o meno simile. La scelta di un approccio laboratoriale alla didattica della matematica pertanto non deve ridursi alla semplice esperienza di tecniche, algoritmi e procedimenti bensì al rafforzamento di processi di *problem posing* e *problem solving* applicati a situazioni note e inedite;

c) *il ruolo dell'allievo come agente euristico*: grazie ad una didattica laboratoriale, a partire dall'esperienza diretta, l'allievo costruisce in modo attivo la sua conoscenza, interrogando l'ambiente che lo circonda, formulando ipotesi, organizzando le sue costruzioni mentali, sperimentando soluzioni e verificandole per via empirica. L'istruzione influenza ciò che l'allievo apprende, ma non determina tale apprendimento; l'allievo non è posto nella condizione di recepire passivamente le informazioni dell'insegnante, ma rielabora costantemente in maniera autonoma ogni proposta confrontandola con i punti di vista degli altri;

d) *l'interazione sociale in aula:* la conoscenza matematica è il risultato di un processo di co-costruzione che si basa sulla condivisione di conoscenze, lo svelamento di misconcezioni, l'interazione tra più soggetti attorno ad una situazione problematica da risolvere. Tali interazioni possono avvenire tra pari, gli alunni, o tra questi ultimi e l'insegnante. In tal caso è importante tenere sotto controllo il fenomeno del *contratto didattico*, ripreso anche nelle pagine successive, affinché il comportamento degli alunni non sia condizionato da quelle che questi pensano essere le aspettative dell'insegnante.

e) *il ricorso a situazioni a-didattiche:* secondo la classificazione di Brousseau (1986), in ambito scolastico possono verificarsi *situazioni didattiche*, *a-didattiche* e *non-didattiche*. Le situazioni didattiche sono quelle previste in modo esplicito e intenzionale dall'insegnante, con lo scopo di fare apprendere agli alunni una certa conoscenza stabilita in precedenza. L'alunno ha la consapevolezza che sta imparando ciò che l'insegnante sta insegnando e si impegna non tanto ad apprendere la matematica ma a comprendere come soddisfare le attese dell'insegnante in merito ad uno specifico contenuto. Le situazioni a-didattiche invece sono quelle in cui è la situazione-problema stessa a suggerire all'alunno l'esigenza di acquisire alcune conoscenze che in quel momento non possiede. L'alunno, da solo o in gruppo, provoca la situazione-problema dopo averla analizzata procedendo per tentativi dopodiché verifica se questi sono andati a buon fine e se hanno sortito l'effetto desiderato. Se ciò non si verifica negozia ulteriormente con il gruppo dei pari le azioni da intraprendere per giungere alla risoluzione del problema. In questo caso si arriva alla produzione di conoscenza, non esplicitamente richiesta e condizionata dalle attese del docente, frutto del percorso di ricerca e di riflessione che il bambino ha operato da solo o con i compagni. In questo caso l'intenzionalità didattica dell'insegnante non viene meno, poiché egli conduce comunque la regia delle fasi di lavoro (*devoluzione*, *implicazione*, *costruzione di conoscenza privata*, *validazione*), ma in modo meno diretto rispetto al primo caso. Il suo compito è soprattutto quello di proporre situazioni apprenditive significative, costruire ambienti di ricerca, predisporre compiti di realtà funzionali a stimolare le conoscenze e competenze da promuovere negli alunni. Nel terzo tipo di situazione, invece, quella non-didattica, insegnante e alunni non hanno un rapporto specifico con il sapere in gioco, ovvero le attività proposte non rimandano ad un'intenzionalità didattica del docente pur essendo comunque in grado di sviluppare apprendimenti. L'informalità che connota questo genere di esperienze formative le rende anche meno controllabili e implementabili.

f) *il potenziamento della riflessività e della metacognizione:* l'impiego di situazioni a-didattiche ed il ricorso a compiti di realtà favorisce non solo la costruzione di conoscenza ma anche la messa in atto di processi metacognitivi e metariflessivi relativi all'impostazione del problema, alle informazioni disponibili e a quelle da ricercare, alle strategie e agli strumenti da impiegare per la risoluzione della situazione-problema, all'analisi e validazione dei risultati conseguiti.

Nelle pagine che seguono, prendendo spunto da alcuni quesiti contenuti nelle prove SNV degli ultimi anni, sono avanzate alcune proposte di riflessione didattica limitatamente agli ambiti di contenuto e ai processi matematici di *Spazio e figure* e *Numeri*. A partire dall'analisi delle risposte fornite ai quesiti, sia a livello di classe che a livello di scuola, possono essere condotte molteplici analisi sui punti di forza e di debolezza degli apprendimenti in matematica nonché individuare possibili soluzioni metodologiche in grado di intervenire sulla qualità dei risultati.

4.1. Spazio e figure: aspetti concettuali e figurali della geometria

Il ragionamento geometrico, secondo quanto sostenuto da Fischbein (1993), è caratterizzato da due componenti: una concettuale e una figurale. I concetti geometrici, infatti, sono entità astratte, ideali e determinabili formalmente come i numeri o altri oggetti matematici, ma hanno anche proprietà che possono essere colte solo con l'intuizione spaziale, ad esempio la forma (Paoli, 2014, p. 206). L'interazione di queste due componenti dovrebbe portare a una conoscenza adeguata ma, in realtà, essa è spesso fonte di conflitti.

Nella Figura 5 è riprodotto un quesito della prova SNV del 2016 per la classe seconda primaria, in cui questi aspetti sono ben evidenziati[5].

[5] I quesiti proposti sono ripresi dalle *Guide alla lettura Prova di Matematica classe II primaria e classe V* del 2016, https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2016-GUIDA-L02.pdf e https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2016-GUIDA-L05.pdf, consultati in data 20/08/2017.

Per rispondere correttamente l'alunno deve innanzitutto mantenere il controllo sul numero e sul tipo dei pezzi assegnati. In questo caso la percentuale di studenti che ha risposto correttamente è stata del 33,7%. La difficoltà sottesa all'item proposto è legata a quello che viene definito "senso dello spazio", inteso come la capacità di visualizzare oggetti e di compiere trasformazioni mentali su di essi. Come sostiene Fandiño Pinilla, in casi come questo si prevede un "uso della geometria senza calcoli, basta solo saper vedere" (2016, p. 5).

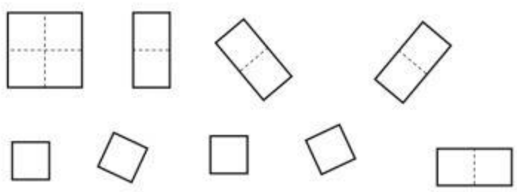
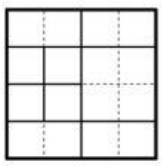
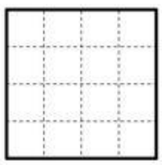
<table>
<tr><th>Domanda</th><th>Caratteristiche</th></tr>
<tr><td>D4. Questi sono i pezzi per comporre un quadrato.

Aldo ha composto il quadrato in questo modo:

Componi il quadrato in modo diverso, utilizzando gli stessi pezzi.
</td><td>AMBITO PREVALENTE
Spazio e figure
SCOPO DELLA DOMANDA
Tassellare una figura piana
PROCESSO PREVALENTE
Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione
Indicazioni nazionali: TRAGUARDO
Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.
DIMENSIONE
Conoscere</td></tr>
</table>

Figura 5 – Quesito D4 "Spazio e figure" – Prova di Matematica classe seconda (2016)

Una situazione analoga viene proposta anche nella prova della quinta primaria (Figura 6). Per rispondere correttamente alla domanda l'alunno deve aver raggiunto i primi tre livelli della comprensione del pensiero geometrico secondo Van Hiele (Crowley, 1987):

– *visualizzazione*: lo studente riconosce le forme geometriche per la loro forma e come un tutto, ma non per le proprietà;

– *analisi*: lo studente inizia a conoscere le proprietà delle figure ma le relazioni tra le figure e le definizioni non sono ancora comprese;

– *deduzione informale*: lo studente studia le relazioni logiche tra proprietà, e le definizioni e le interrelazioni tra figure prendono significato ma non è ancora in grado di organizzare sequenze logiche di affermazioni per giustificare le argomentazioni.

In questo caso, quindi, l'alunno deve essere in grado di riconoscere che le due figure sono composte da figure congruenti e, di conseguenza, hanno la stessa area. Gli studenti che rispondono A o C dimostrano di non aver colto questa uguaglianza. Nel caso della risposta A non "vedono" l'equiscomponibilità delle figure ma si limitano solo alla loro diversa dimensione; nel caso della risposta C, invece, si lasciano "trarre in inganno" dal diverso perimetro, deducendo che due figure che hanno perimetro diverso debbano avere anche area diversa.

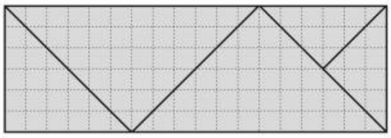
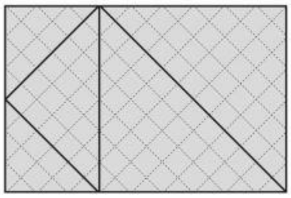
Domanda	Caratteristiche
D19. Osserva le seguenti figure.  Figura A  Figura B **Le due figure hanno la stessa area?** A. ☐ No, perché le due figure hanno dimensioni diverse B. ☐ Sì, perché i triangoli che formano la figura A sono gli stessi che formano la figura B C. ☐ No, perché le due figure hanno perimetro diverso D. ☐ Sì, perché ciascuna delle due figure è composta da triangoli rettangoli	**AMBITO PREVALENTE** Spazio e figure **SCOPO DELLA DOMANDA** Riconoscere la giustificazione corretta in un problema di equiscomponibilità di figure piane. **PROCESSO PREVALENTE** Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri. **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule.* **DIMENSIONE** Argomentare

Figura 6 – Quesito D19 "Spazio e figure" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

L'insegnante, in questo caso, può decidere di lavorare sui concetti di area e perimetro, riproponendo agli studenti un quesito simile attraverso l'uso del *tangram*: modificando la posizione delle tessere gli alunni potranno comprendere, attraverso l'esperienza diretta, che l'area resta invariata mentre ciò che si modifica di volta in volta, a seconda della composizione dei vari "pezzi", è il perimetro.

Il quesito proposto di seguito, rivolto sempre ad alunni di quinta primaria, prevede lo stesso tipo di ragionamento (Figura 7). L'ambito prevalente cui si riferisce l'item è quello dei *Numeri* poiché all'alunno è richiesta la capacità di riconoscere e utilizzare una frazione. Per poter dare la risposta corretta, però, deve analizzare le parti in cui è divisa la figura e osservare, ad esempio, che la parte grigia può essere scomposta in quattro triangoli rettangoli congruenti ed individuare, di conseguenza, l'equivalenza tra l'area colorata e quella non colorata. In questo caso solo il 34% degli alunni ha risposto correttamente. Il 25% degli studenti ha scelto la risposta B, probabilmente perché non ha considerato l'equivalenza delle parti e si è limitato a contare le quattro parti da cui è composta la figura. Un altro 18% ha, invece, scelto la risposta D, probabilmente perché, avendo individuato gli 8 triangoli rettangoli da cui è composta la figura si è concentrato sulla frazione perdendo di vista la richiesta della domanda.

Un'ulteriore difficoltà in questo caso potrebbe essere data dalla conversione semiotica: l'alunno per rispondere correttamente deve infatti convertire la rappresentazione geometrica del quesito in una rappresentazione in termini algebrici, in particolare in frazioni. La capacità di usare più registri per rappresentare uno stesso oggetto è alla base della costruzione cognitiva dei concetti matematici, ma proprio per questo è anche la causa principale di parte delle difficoltà connesse alla matematica (D'Amore, 2001).

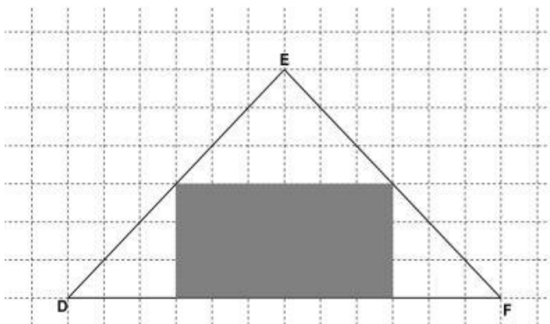
Domanda	Caratteristiche
D11. Osserva la seguente figura.  **A quale frazione dell'area del triangolo DFE corrisponde il rettangolo grigio?** A. ☐ $\frac{1}{6}$ B. ☐ $\frac{1}{4}$ C. ☐ $\frac{1}{2}$ D. ☐ $\frac{1}{8}$	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Data una figura riconoscere la frazione corrispondente a una frazione dell'area di questa. **PROCESSO PREVALENTE** Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Operare con le frazioni e riconoscere frazioni equivalenti.* **DIMENSIONE** Conoscere

Figura 7 – Quesito D11 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

Il quesito D1 per la seconda primaria offre uno spunto di riflessione su quelle che vengono definite "misconcezioni geometriche" (Figura 8). Nell'attività didattica quotidiana bisogna sempre tenere presente che l'allievo interpreta i messaggi dell'insegnante secondo le proprie conoscenze, convinzioni ed esperienze e sono proprio queste che possono condurre a interpretazioni distorte. Queste ultime, tuttavia, pur essendo concetti errati che l'alunno costruisce nel tempo, non devono essere considerati necessariamente in senso negativo, dal momento che è possibile che l'alunno necessiti di una misconcezione momentanea per poter giungere alla costruzione corretta di un concetto. L'insegnante ha comunque una grande responsabilità relativamente alla costruzione di "modelli primitivi", ossia le prime "immagini" proposte durante l'insegnamento, poiché sono proprio questi, nella maggior parte dei casi, a contribuire alla formazione di misconcezioni in seguito difficili da superare.

In questo caso all'alunno viene chiesto di individuare il numero di rettangoli presenti nel disegno e alcuni di questi sono posti in posizione non standard. Nonostante la percentuale di risposte corrette sia del 47%, il fatto che più della metà degli alunni non abbia risposto correttamente ad un quesito apparentemente semplice ci induce a riflettere proprio sul peso ricoperto dai "modelli primitivi". Sia gli studenti che rispondono 6 che quelli che rispondono 3, molto probabilmente vengono tratti in inganno proprio da quei rettangoli che non si presentano nella posizione in cui generalmente sono abituati a vederli. La figura prototipica del rettangolo è quella appoggiata sulla base orizzontale più lunga e con l'altezza verticale più corta. L'alunno quindi, se non entra in contatto anche con immagini di rettangoli poggiati sulla base più corta o con la base non parallela al margine del foglio, si creerà un'immagine errata del concetto di rettangolo che, prima o poi, entrerà in conflitto con le immagini di nuovi concetti geometrici.

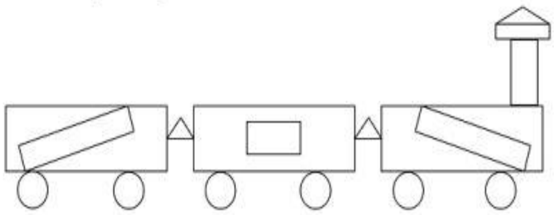
Domanda	Caratteristiche
D1. Osserva questa figura.  **a. Quanti rettangoli ci sono nella figura?** A. ☐ 6 B. ☐ 8 C. ☐ 3 **b. Quanti triangoli ci sono nella figura?** **Risposta:** .... triangoli	**AMBITO PREVALENTE** **Spazio e figure** **SCOPO DELLA DOMANDA** Riconoscere e contare triangoli e rettangoli in una figura complessa **PROCESSO PREVALENTE** Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo. **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Contare oggetti o eventi, a voce e mentalmente, in senso progressivo e regressivo e per salti di due, tre, ...* *Riconoscere, denominare e descrivere figure geometriche.* **DIMENSIONE** Conoscere

Figura 8 – Quesito D1 "Spazio e figure" – Prova di Matematica classe seconda (2016)

4.2. Numeri: contratto didattico, proporzionalità, abilità di calcolo e uso delle frazioni

Passiamo adesso dall'ambito di contenuto *"Spazio e figure"* a quello dei *"Numeri"*. La domanda che segue (Figura 9) può rappresentare un buon esempio di quello che alcuni autori hanno definito "contratto didattico". Il quesito ripropone un noto problema di Alan Schoenfeld degli anni '80 a cui meno di un quarto degli studenti era riuscito a rispondere correttamente. La stessa situazione-problema è stata poi riproposta nel 1997 da D'Amore e Martini (D'Amore & Frabboni, 2005), che, a seguito delle loro ricerche, hanno interpretato il comportamento degli alunni come una delega formale del "contratto didattico".

Il contratto didattico può essere definito come "l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante. Spesso queste "attese" non sono dovute ad accordi espliciti… ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità" (D'Amore, 2001, p. 14).

Domanda	Caratteristiche
D18. Il camion che vedi in figura può trasportare al massimo 10 automobili.  **In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare.** **Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?** A. ☐ 6 B. ☐ 7 C. ☐ 6,2 D. ☐ 10	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Dare significato a una divisione con resto. **PROCESSO PREVALENTE** Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria. **DIMENSIONE** Risolvere problemi

Figura 9 – Quesito D18 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

Nel caso delle prove INVALSI solo il 35% degli alunni ha dato la risposta corretta ma, il dato interessante riguarda il 40% che ha scelto la risposta C proprio in virtù di questa delega formale. Gli alunni che hanno risposto 6,2, infatti, svolgono il problema dal punto di vista algebrico salvo poi non effettuare un controllo semantico della risposta. In base agli studi sul contratto didattico è emerso che in una situazione-problema di questo tipo l'alunno non si sente "autorizzato" a rispondere 7, ossia il risultato semanticamente corretto, poiché avendo svolto correttamente la divisione necessaria, in base alla delega formale, ritiene che non sia più suo compito ragionare e controllare il risultato che viene così semplicemente trascritto.

Come confermato dagli studi di Zan (2007) sui problemi in ambito matematico, in questo caso la difficoltà degli studenti sta nella rappresentazione, ossia nella mancata ricostruzione della situazione problematica. Di conseguenza, la dimensione narrativa del problema viene fatta prevalere sul contesto che perde di autenticità: lo studente dà quindi la risposta numerica corretta se si considera solo la domanda, ma di per sé errata poiché in questo caso doveva prevalere il contesto per poter rispondere correttamente. Probabilmente la risposta sarebbe stata diversa se il problema fosse stato posto a livello esperienziale, chiedendo al bambino di eseguire realmente o in maniera simulata l'operazione richiesta.

Un altro tema centrale negli studi attuali in didattica della matematica è quello della proporzionalità. L'analisi del ragionamento proporzionale richiederebbe uno studio più approfondito che non è possibile fare in questa sede, dove ci si limiterà a fornire una visione d'insieme. In questo caso sono stati selezionati due quesiti: uno dalla prova di seconda primaria (Figura 10) e uno da quella di quinta primaria (Figura 11).

Nel caso della seconda primaria gli alunni devono individuare una proporzionalità semplice, il doppio, mentre nel caso della quinta devono prima individuare la proporzionalità delle dosi e poi riconoscere quale di queste non la rispetta, indicando di conseguenza la dose corretta. L'item per la seconda primaria era stimato come il più difficile e, in effetti, ha ottenuto la percentuale più bassa di risposte corrette (23%). L'item per la quinta primaria era, invece, stimato come il terzo più difficile e, anche in questo caso, la percentuale di risposte corrette (26%) è stata coerente con quanto indicato dall'indice di difficoltà.

<table>
<tr><th>Domanda</th><th>Caratteristiche</th></tr>
<tr><td>D11. Un barista per preparare 3 panini ha usato:
– 6 fette di pane
– 3 fette di pomodoro
– 1 mozzarella

Per fare 6 panini ha bisogno di:

– .... fette di pane
– .... fette di pomodoro
– .... mozzarelle</td><td>AMBITO PREVALENTE
Numeri
SCOPO DELLA DOMANDA
Individuare una relazione
PROCESSO PREVALENTE
Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure
Indicazioni nazionali: TRAGUARDO
L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.
DIMENSIONE
Conoscere</td></tr>
</table>

Figura 10 – Quesito D11 "Numeri" – Prova di Matematica classe seconda (2016)

<table>
<tr><th>Domanda</th><th>Caratteristiche</th></tr>
<tr><td>D10. Osserva la tabella che riporta gli ingredienti per tre e per cinque pizze.
Nella colonna degli ingredienti per cinque pizze c'è un errore.
Fai una crocetta sull'errore e scrivi accanto il valore corretto.
<table>
<tr><th></th><th>Ingredienti per tre pizze</th><th>Ingredienti per cinque pizze</th></tr>
<tr><td>Lievito di birra</td><td>30 g</td><td>50 g</td></tr>
<tr><td>Olio d'oliva</td><td>60 ml</td><td>100 ml</td></tr>
<tr><td>Farina</td><td>750 g</td><td>1500 g</td></tr>
<tr><td>Acqua</td><td>450 ml</td><td>750 ml</td></tr>
<tr><td>Passata di pomodoro</td><td>600 g</td><td>1000 g</td></tr>
</table></td><td>AMBITO PREVALENTE
Relazioni e funzioni
SCOPO DELLA DOMANDA
Riconoscere la relazione esistente tra i dati, individuare gli errori e saperli correggere.
PROCESSO PREVALENTE
Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico.
Indicazioni nazionali: TRAGUARDO
Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.
DIMENSIONE
Argomentare</td></tr>
</table>

Figura 11 – Quesito D10 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

Il ragionamento proporzionale è un'abilità fondamentale in matematica ed è considerato da alcuni autori la chiave di volta della matematica nella scuola primaria (Parish, 2010). Proprio per questo motivo non può e non deve limitarsi all'applicazione di regole mnemoniche o algoritmi ma deve, invece, coinvolgere l'abilità di sistemare e gestire mentalmente un insieme di informazioni (Beck McIntosh, 2013). La proporzionalità è percepita dagli alunni in maniera intuitiva, prima ancora del suo studio formale a scuola; è inoltre strettamente collegata con la progressione dei concetti moltiplicativi (Pesci, 2002). Proprio questa sua iniziale caratteristica intuitiva però, fa sì che le difficoltà si presentino nel momento in cui la proporzione viene presentata in classe enunciandone termini e proprietà. Il "contratto didattico", precedentemente citato, influisce sugli alunni che vanno così ricercando la "regola" da applicare piuttosto che ragionare criticamente sul contesto specifico del problema. Il ragionamento proporzionale, infatti, non riguarda l'applicazione di una moltiplicazione per trovare il numero mancante, ma necessita di un uso intenzionale di relazioni moltiplicative per confrontare quantità e prevedere il valore di una quantità basata sul valore di un'altra.

Per questo motivo è fondamentale che gli alunni comprendano il concetto di proporzionalità attraverso una sua costruzione diretta e attiva. La metodologia costruttivista del *problem based learning* (Hung, Jonassen & Liu, 2008), in questo caso, si rivela utile per un primo approccio a un concetto matematico così complesso e strettamente collegato a molti altri quali le frazioni, i numeri decimali, le percentuali, ecc. L'approccio costruttivista per la risoluzione dei problemi mette gli alunni in condizione di dover ricercare informazioni e strategie per risolvere il problema e, di conseguenza, giustificarle. L'importanza di abituare gli alunni a fornire spiegazioni delle risposte date è così giustificato da Van de Walle e collaboratori: "perché i bambini sono portati ad accettare per autorità le spiegazioni dell'insegnante, mentre quelle dei compagni vengono naturalmente messe in discussione, sfidate, passate al vaglio della critica e del dubbio" (2017: 63).

La prossima domanda (Figura 12), inserita nel fascicolo della prova per la seconda primaria, può fornire interessanti spunti connessi allo studio delle operazioni. In questo caso solo il 37% degli alunni ha fornito la risposta corretta. Il quesito richiedeva di mettere in relazione il linguaggio verbale, con il quale era espressa la domanda, con quello figurale con cui erano forniti i dati per la risoluzione.

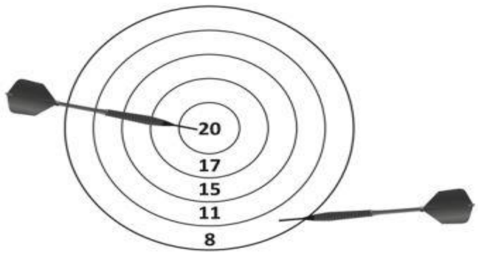
Domanda	Caratteristiche
D15. Giorgio ha ottenuto 39 punti con il lancio di tre freccette. **L'immagine mostra i punti fatti da Giorgio con due delle freccette.**  **Quanti punti ha fatto con la terza freccetta?** **Risposta**:	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Risolvere un problema a struttura additiva diretta e inversa **PROCESSO PREVALENTE** Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria. **DIMENSIONE** Risolvere problemi

Figura 12 – Quesito D15 "Numeri" – Prova di Matematica classe seconda (2016)

L'alunno doveva sottrarre dai punti totali, la somma dei punti ottenuti col lancio delle prime due freccette. La difficoltà del quesito sta nel fatto che ciò che deve essere trovato non è lo "stato" iniziale o finale, bensì una trasformazione tra stati. Gli alunni, secondo quanto emerso dagli studi a riguardo, tendono a ricercare le operazioni da effettuare nelle parole-chiave del testo del problema: "aggiungere", "vincere", "ottenere" o "togliere", "perdere" sono generalmente gli "indizi" utilizzati a giustificazione di addizioni o sottrazioni richieste dal problema. In questo caso specifico, però, dal momento che parte del problema è espresso attraverso una figura, il linguaggio non influenza l'alunno che, probabilmente, proprio per questo motivo, non riesce ad individuare l'operazione corretta da svolgere. I problemi aritmetici, però, non dipendono dall'operazione da eseguire ma dalla struttura logica che essi presentano. La didattica tradizionale, infatti, è solita presentare l'addizione attraverso problemi di unione e la sottrazione attraverso problemi di separazione, è fondamentale invece presentare ai bambini fin dalla scuola primaria problemi sottrattivi di unione e problemi additivi di separazione, evitando in tal senso di indurre fissità di ragionamento e difficoltà risolutive (Carpenter & Moser, 1983; Gutstein & Romberg, 1995).

Qui di seguito, nelle Figure 13 e 14, vengono presi ad esempio due item per la quinta primaria nei quali si richiede agli alunni di riconoscere e utilizzare diverse rappresentazioni dei numeri, in particolare i numeri decimali, le percentuali e le frazioni per operare confronti tra di essi.

Domanda	Caratteristiche
D25. Osserva le seguenti rappresentazioni di numeri. 50% $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{5}{10}$ **Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.**	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Riconoscere rappresentazioni diverse dello stesso numero. **PROCESSO PREVALENTE** Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane.* **DIMENSIONE** Conoscere

Figura 13 – Quesito D25 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

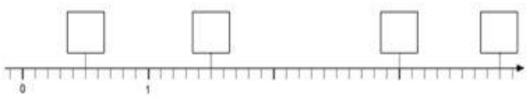
Domanda	Caratteristiche
D30. Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri: 1,5 | $\frac{6}{2}$ | 3,8 | $\frac{1}{2}$ 	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Conoscere le diverse rappresentazioni dei numeri e saperli posizionare sulla retta dei numeri. **PROCESSO PREVALENTE** Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta e utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica.* **DIMENSIONE** Conoscere

Figura 14 – Quesito D30 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

Nel caso della prima domanda le risposte corrette sono state pari al 37%, mentre per la seconda il 42%. Uno dei prerequisiti necessari per comprendere la nozione di frazione è quello della frazione come partizione, ossia uno o più oggetti che vengono divisi in parti uguali. Per poter rispondere correttamente al quesito, in questo caso, gli alunni dovevano possedere anche le nozioni di:

– frazione come quoziente, ossia il valore numerico che si ottiene dividendo numeratore per denominatore
– frazione come rapporto, necessaria per l'equivalenza tra frazioni.

Solitamente il primo costrutto a cui si fa riferimento è quello di frazione come parte-tutto, che è anche quello più semplice da comprendere. Una delle strategie che vengono scoperte per prime è quella del "dimezzamento": i bambini *dimezzano* gli oggetti finché non possono fare la divisione in parti uguali. Van de Walle e Lovin (2017) suggeriscono di iniziare con problemi in cui il numero delle parti, ovvero il denominatore della frazione, sia una potenza di 2 (2, 4, 8...) per passare poi a problemi con denominatore 3 o 6. È sbagliato credere che il problema sia tanto più difficile quanto più cresce il denominatore. Il denominatore 8, per esempio, è più facile del 3, perché nel primo caso la strategia del dimezzamento funziona, mentre nel secondo si dovrà ricorrere a strategie alternative.

Dopo aver lavorato sulle frazioni attraverso la manipolazione concreta, si possono introdurre i simboli convenzionali della frazione, ossia numeratore, denominatore e linea di frazione. Comprendere i simboli frazionari permetterà agli alunni di operare con essi e su di essi. Anche in questo caso, però, è opportuno che i problemi non producano fissità operativa, ma favoriscano una comprensione delle frazioni non come quantità assoluta ma come rapporto fra le parti. I problemi più comuni sono, infatti, quelli in cui dati l'intero e la frazione bisogna trovare la parte. Proporre anche problemi in cui, date la parte e la frazione, deve essere trovato l'intero, realizzando una discussione in classe per trovare la strategia di risoluzione più efficace, potrebbe evitare questo genere di rigidità.

Il passaggio ancora successivo è quello del confronto tra frazioni al fine di ordinarle o individuare equivalenze, ossia quanto richiesto dai quesiti presi ad esempio. Un errore comune fra gli alunni è credere che una frazione con denominatore 7, essendo maggiore di 3 o 4, sia più grande. In questo caso, quindi, è opportuno che l'insegnante non si soffermi sull'enunciazione dei concetti formali ma, al contrario, predisponga attività di esplorazione informale delle frazioni, tralasciando l'aspetto algoritmico, che potrà essere affrontato anche in un secondo momento.

5. Conclusioni

Le prove del Servizio Nazionale di Valutazione restituiscono alle scuole dati quantitativo-qualitativi che possono essere utilizzati sia in funzione del miglioramento degli apprendimenti degli alunni che in funzione della ridefinizione delle pratiche didattiche adottate dagli insegnanti.

Esse pertanto, come affermato nelle pagine precedenti, possono essere utilizzate sia come strumenti autovalutativi che come risorse per ripensare la didattica della matematica nella scuola primaria in modo da proporre concetti, problemi, situazioni matematiche sfidanti tali da sviluppare negli alunni l'interesse a "pensare matematicamente la realtà" e sviluppare competenze trasversali (riflessive, diagnostiche, elaborative, risolutive, ecc.) che vadano ben oltre il contesto scolastico e i contenuti di insegnamento.

Un buon sistema interno di valutazione, curvato sempre più in funzione di uso formativo della valutazione (Scriven, 1967) e ancorato ad una prospettiva *evidence-based* (Hattie, 2012; 2002; Calvani & Vivanet, 2014), deve fondarsi su un dialogo strettissimo tra didattica e valutazione, affidandosi ad una molteplicità di strumenti che contemplino sia le prove standardizzate che quelle elaborate dagli insegnanti, così da valorizzare a pieno gli aspetti positivi delle une e delle altre.

Questa consapevolezza sta lentamente penetrando all'interno dei singoli contesti scolastici, e rappresenta un passo importante per lo sviluppo di una sensibilità inclusiva rivolta a tutti gli alunni a vantaggio di una didattica sempre più consapevole, efficace e attenta alla qualità dei processi e dei risultati di apprendimento.

6. Bibliografia

Alexander, K. L., Entwisle, D. R., & Dauber, S. L. (2003). *On the success of failure: A reassessment of the effects of retention in the primary school grades*. Cambridge: Cambridge University Press.

Barbaranelli, C., & Natali, E. (2005). *I test psicologici: teorie e modelli psicometrici*. Roma: Carocci.

Beck McIntosh, M. (2013). *Developing proportional reasoning in middle school students.* Disponibile da http://csme.utah.edu/wp-content/uploads/2013/06/Marcie-McIntosh.pdf, consultato in data 17/08/2017.

Bolondi, G. (2003). Visioni della matematica e curricoli. *L'Educatore*, *LI*(24), 14-17.

Bolondi, G. (2013). Come usare in classe le prove Invalsi. *L'insegnamento della matematica*, *33*(6), 686-701.

Bolondi, G. (2014). *Le valutazioni esterne in matematica (prove Invalsi, TIMSS, OCSE-Pisa): utilità, limiti, ricadute.* In B. D'Amore (a cura di), *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire*. Disponibile da http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/8-18%20Atti%20Tricase%20e%20Prefazione.pdf, consultato in data 17/08/2017.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 33-115.

Calvani, A., & Vivanet, G. (2014). Evidence Based Education e modelli di valutazione formativa per le scuole. *ECPS. Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies*, 9/2014, 127-146.

Capperucci, D. (a cura di) (2011). *La valutazione degli apprendimenti in ambito scolastico. Promuovere il successo formativo a partire dalla valutazione*. Milano: FrancoAngeli.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 7-44). Orlando, FL: Academic Press.
consultato in data 17/08/2017.

Corsini, C. (2015).*Valutare scuole e docenti.* Roma: Nuova Cultura.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 1-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

D'Amore, B. & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base di Didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2001). *Didattica della matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare.* Milano: Bruno Mondadori.

European Commission (2010). *Europa 2020 Strategy*. Disponibile da https://ec.europa.eu/info/strategy/european-semester/framework/europe-2020-strategy_en, consultato in data 17/08/2017.

European Commission (2011). *L'insegnamento della matematica in Europa: sfide comuni e politiche nazionali*. Disponibile da http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132IT.pdf, consultato in data 17/08/2017.

Fandiño Pinilla, M. I. (2016). Prove INVALSI di matematica classe II. *La Vita Scolastica*, maggio 2016, 1-21.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fondazione Ismu (2017). *Ventiduesimo Rapporto sulle migrazioni 2016.* Milano: FrancoAngeli.

Frabboni, F. (2010). *La scuola rubata.* Milano: FrancoAngeli.

Gutstein, E., & Romberg, T.A. (1995). Teaching children to add and subtract. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(3), 283-324.

Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning.* London, UK-New York, NY: Routledge.

Hung, W., Jonassen, D. H., & Liu, R. (2008). Problem-based learning. *Handbook of research on educational communications and technology*, *3*, 485-506.

INVALSI Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione (2014). *Quadro di riferimento primo ciclo di istruzione. Prova di matematica.* Disponibile da https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/autori/QdR_Mat_I_ciclo.pdf, consultato in data 17/08/2017.

INVALSI Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione (2015). *Integrazione al quadro di riferimento delle prove INVALSI*. Disponibile da https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/Integrazione_QdR_Matematica.pdf, consultato in data 17/08/2017.

INVALSI Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione (2016). *Rilevazioni nazionali degli apprendimenti 2015-16. Rapporto risultati.* Disponibile da https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/07_Rapporto_Prove_INVALSI_2016.pdf,

INVALSI Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione (2017). *Rilevazioni nazionali degli apprendimenti 2016-17. Rapporto risultati.* Disponibile da https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/07_Rapporto_Prove_INVALSI_2017.pdf, consultato in data 17/08/2017.

McMillan, J. H. & Schumacher, S. (2010). *Research in Education: Evidence-Based Inquiry.* New Jersey: Pearson Education.

MIUR Ministero dell'Istruzione, dell'università e della Ricerca (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione*, numero speciale, Le Monnier, settembre 2012.

Mullis, I.V.S., & Martin, M.O. (Eds.) (2013). *TIMMS 2015 Assessment Frameworks*, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

OECD Organisation for Economic Co-operation and Development (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing Service.

Paoli, F. (2014). *Didattica della matematica dai 3 agli 11 anni*. Roma: Carocci.

Parish, L. (2010). *Facilitating the Development of Proportional Reasoning through Teaching Ratio.* Disponibile da https://www.merga.net.au/documents/MERGA33_Parish.pdf, consultato in data 17/08/2017.

Pesci, A. (2002). *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe.* Bologna: Pitagora Editrice.

Rasch, G. (1980). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests.* Chicago: The University of Chicago Press.

Scriven, M. (1967). *The methodology of evaluation.* In R.W. Tyler, R.M. Gagné & M. Scriven (Eds.), *Perspectives of curriculum evaluation* (pp. 39-83). Chicago: Rand McNally.

Trinchero, R. (2014). Il Servizio Nazionale di Valutazione e le prove Invalsi. Stato dell'arte e proposte per una valutazione come agente di cambiamento. *Form@re - Open Journal per la formazione in rete*, *14*(4), 34-49.

Van de Walle, J. A., Lovin, L. H., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2017). *Teaching Student-Centered Mathematics: Developmentally Appropriate Instruction for Grades Pre-K-2* (Vol. 1). London: Pearson.

Vannini, I. (2009). *La qualità nella didattica: metodologie e strumenti di progettazione e valutazione*. Trento: Edizioni Erickson.

Varisco, B. M. (2000). *Metodi e pratiche della valutazione. Tradizione, attualità e nuove prospettive*. Milano: Guerini Studio.

Vertecchi, B., Agrusti, G., & Losito, B. (2010). *Origini e sviluppi della ricerca valutativa.* Milano: FrancoAngeli.

Wright, B. D., Linacre, J. M., Gustafson J. E., & Martin-Lof P. (1994). Reasonable mean-square fit values. *Rasch Measurement Transactions*, *8*(3), 370. Retrieved December 16, 2014.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* New York: Springer Science & Business Media.

Received September 23, 2017
Revision received November 27, 2017/December 10, 2017
Accepted December 30, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 76-90 – ISSN 2038-1034

Il problem solving come strategia per una diversa gestione dell’errore nell’educazione matematica al primo ciclo

Cristina Coppola
Pietro Di Martino

Abstract – *Errors in the context of school mathematics are often considered as something to be avoided at all costs: there is a sort of identification between difficulties in mathematical learning and errors and between errors and failure of the teaching strategies. Research into mathematics teaching has for some time brought this widespread “epistemology” of error into question. Taking the seminal work of Borasi as their starting point, maths educators have developed a new epistemology of error in line with a growing attention toward productive thinking in mathematical teaching and learning as well as the role of errors in the development of mathematics.*

Riassunto – *L’errore in matematica nel contesto scolastico è considerato come qualcosa da evitare assolutamente. Questo perché c’è una implicita identificazione tra errore e difficoltà, e tra errori degli allievi e fallimento dell’insegnamento. Questa diffusa “epistemologia” dell’errore è stata, da tempo, messa fortemente in discussione dalla ricerca in didattica della matematica. A partire dai lavori di Raffaella Borasi, nella ricerca in didattica della matematica si è sviluppata una nuova epistemologia dell’errore coerente con la crescita dell’attenzione allo stimolo del pensiero produttivo nell’insegnamento e apprendimento della matematica e con il ruolo che gli errori hanno avuto nello sviluppo della matematica.*

Keywords – error in mathematics, assessment, problem solving, productive thinking

Parole chiave – errore in matematica, valutazione, problem solving, pensiero produttivo

Cristina Coppola è Ricercatrice a tempo determinato presso il Dipartimento di Matematica dell’Università degli Studi di Salerno. La sua ricerca in didattica della matematica riguarda principalmente il ruolo dei fattori linguistici in educazione matematica, in particolare le relazioni tra sviluppo di competenze linguistiche e sviluppo di abilità logiche in ambito di problem solving. La ricerca si occupa anche del ruolo dei fattori affettivi in educazione matematica. Ha pubblicato diversi contributi in riviste e libri nazionali e internazionali.

Pietro Di Martino è Professore Associato MAT/04 presso il Dipartimento di Matematica dell’Università degli Studi di Pisa. La sua ricerca in didattica della matematica si è sviluppata principalmente sullo studio delle difficoltà in matematica e su come si costruiscono ed evolvono emozioni, convinzioni e atteggiamenti negativi nei confronti della matematica. Ha pubblicato diversi contributi in riviste e libri nazionali e internazionali.

1. L'errore in educazione matematica

L'errore ha un ruolo particolare nel percorso educativo: non è un caso che di errore e gestione dell'errore si parli in diversi scritti pedagogici. Proprio in ambito pedagogico, la visione, molto radicata, di errore come aspetto allarmante da evitare è stata messa in discussione negli anni ottanta del secolo scorso da approcci che prevedono analisi fini (che differenziano l'errore a seconda della natura dello stesso e delle attività da cui emerge) e dalla considerazione di nuovi modelli del processo di apprendimento/insegnamento, come il modello socio-costruttivista (Nigris, 2009). A questo proposito, molto nota è la bellissima citazione da "Il libro degli errori" di Gianni Rodari: "Gli errori sono necessari, utili come il pane e spesso anche belli: per esempio la torre di Pisa".

Dal punto di vista dell'insegnamento scientifico, la cosa forse più interessante di questa rivisitazione pedagogica del ruolo e dello status dell'errore in aula è il fatto che nasca da una rilettura del pensiero di Popper. Nella visione di Popper la scienza non è il tentativo di sviluppare teorie certe: obiettivo irraggiungibile vista la fallibilità umana. Questa consapevolezza sottolinea l'importanza del controllo sulle teorie esistenti per scoprirne i limiti. In questo quadro, l'apprendimento dall'errore è alla base di qualsiasi progresso scientifico: "La scienza non ha niente a che fare con la ricerca della certezza, della probabilità o dell'attendibilità. Non siamo interessati allo stabilimento di teorie scientifiche in quanto sicure, certe o probabili. Consapevoli della nostra fallibilità, siamo soltanto interessati a criticarle e a controllarle con la speranza di scoprire dove sbagliano, di apprendere dagli errori e, se abbiamo fortuna, di pervenire a teorie migliori" (Popper, 1969, pp. 392-393).

L'ottica di Popper quindi, seppur riferita all'epistemologia e non direttamente all'insegnamento, ribalta completamente la visione degli approcci che tendono ad evitare le occasioni di errore. È lo stesso Popper ad esplicitare, con toni forti, la condanna a simili approcci, ritornando sull'assunto della fallibilità umana: "Evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l'errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza. In effetti, è dalle nostre teorie più ardite, incluse quelle che sono erronee, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa più grande è imparare da essi" (Popper, 1972, p. 242).

Queste parole (confermate dai tanti esempi nella storia della matematica di errori *rivelatori*[1]) evidenziano un aspetto sicuramente molto rilevante per l'educazione matematica: l'importanza dell'errore, della sua gestione e interpretazione per sviluppare la conoscenza. Federigo Enriques, nel saggio dal titolo eloquente *Il significato della storia del pensiero scientifico*, scrive: "Il maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante della sua arte didattica… E degli errori propriamente detti… nei casi più caratteristici si presentano come tappe naturali del pensiero nella ricerca della verità, il maestro sa valutare il significato educativo: sono esperienze didattiche che egli persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire

[1] Non approfondiamo questo aspetto – che d'altra parte è stato trattato a più riprese da diversi storici della matematica – in questo articolo. Alcuni esempi, tra i più noti, si possono trovare anche nel lavoro di Borasi (1996) di cui parliamo in seguito.

da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche ad errare per imparare a correggersi. Tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere" (Enriques, 1936, p. 12).

Trasporre questo approccio all'errore nella pratica didattica si è rivelato non per niente banale. Quali i motivi? In contesto matematico giocano sicuramente un ruolo molto importante le convinzioni epistemologiche degli insegnanti sull'errore in matematica. Tra quelle più diffuse, vi è l'idea che l'errore in matematica non solo sia oggettivo, ma che sia anche un indicatore oggettivo di difficoltà e come tale qualcosa da cercare di evitare.

L'oggettività dell'errore, così come l'identificazione errore-difficoltà, sono due posizioni da diversi decenni messe in crisi dai risultati della ricerca didattica (Zan, 2007). Purtroppo, come sottolineato da Bruno D'Amore nel suo intervento al Convegno UMI-CIIM di Salerno (2014)[2], la diffusione di tali risultati alla comunità educativa, e talvolta anche alla comunità matematica, è spesso faticosa e molto lenta.

L'epistemologia, molto diffusa, dell'errore in matematica che abbiamo discusso sopra sembra essere la principale causa del divario netto tra la pratica didattica, nel quale l'errore è prevalentemente demonizzato, e le indicazioni provenienti dalla ricerca didattica, che sottolineano la necessità e l'importanza di un approccio costruttivo all'errore nel processo di costruzione della competenza matematica.

Già nel 1980, Radatz (1980) sottolinea, sulla base di numerosi studi, l'importanza dell'errore in educazione matematica ed in particolare come l'interpretazione dell'errore stesso sia una risorsa preziosissima per studenti e insegnanti (similmente a quanto sostenuto da Enriques). L'assunto che l'interpretazione dell'errore in matematica sia univoca è messo magistralmente in discussione da Rosetta Zan (2007): attraverso numerosi esempi tratti dalla ricerca didattica, la ricercatrice italiana spiega e mostra la fondamentale differenza tra osservazione e interpretazione dell'errore, mettendo in crisi l'idea di oggettività dell'errore e della sua gravità.

D'altra parte, è Raffaella Borasi (1996) che propone una visione radicalmente differente dell'errore nel contesto dell'apprendimento matematico, a tutti i livelli. La ricercatrice italo-americana va oltre l'idea dell'errore come strumento didattico per l'interpretazione di difficoltà e, sulla base anche di paralleli con la storia della matematica, teorizza ed esemplifica un approccio all'errore come "trampolino per la scoperta" nel processo di apprendimento e insegnamento della matematica. In particolare, Borasi introduce la metafora del "perdersi" per mostrare come il valore dato all'errore dipenda dal contesto, dallo scenario: se ho fretta e ho bisogno di arrivare velocemente in un luogo, perdermi potrebbe essere una *tragedia*; se mi perdo la prima volta che torno a casa dalla nuova sede di lavoro, potrei essere infastidito dall'aver sbagliato strada, ma allo stesso tempo potrei imparare strade alternative; se sto visitando una città, anche con una precisa destinazione, potrei non essere dispiaciuto nel perdermi e avere la possibilità di visitare luoghi imprevisti.

[2] Il testo dell'intervento è scaricabile al seguente URL: http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/12/VF-_DAmore_Testo-Conferenza-per-Salerno.pdf.

Ebbene, con in mente questa metafora, ci sembra che nel percorso di apprendimento della matematica la maggior parte degli scenari dovrebbe essere del secondo e del terzo tipo, mentre in realtà sappiamo che nella pratica didattica spesso non è così.

Borasi (1989; 1996) sviluppa una vera e propria tassonomia delle tipologie di uso costruttivo in classe degli errori degli studenti. Riconosce (ed illustra con diversi esempi di diversi livelli scolari) in particolare tre macro-situazioni legate alla metafora del perdersi, riuscendo comunque a costruire un approccio costruttivo all’errore anche nel primo caso:

– Si richiede di analizzare direttamente gli errori prodotti rispetto ad una domanda della quale si conosce già la risposta (può essere stata data anche alla fine dell’attività). In questo modo lo studente, cercando di identificare gli errori commessi, compie un lavoro attivo nel comprendere la natura del problema e della sua soluzione;

– Si propone una domanda, un problema che ammette più risposte. In questo caso, l’analisi degli errori può portare a trovare risposte diverse da quelle emerse dalle produzioni corrette;

– Si propone una domanda aperta (ad esempio le congetture di regolarità, molto usate in educazione matematica) per la quale non c’è in partenza una risposta nota. In questo caso, proprio dall’analisi degli errori molto spesso nascono proprio le esplorazioni più fruttuose.

Borasi però non si limita a fare la tassonomia delle tipologie di uso costruttivo degli errori, ma, partendo da alcuni errori tipici – e quindi particolarmente rilevanti dal punto di vista didattico – degli studenti dei vari livelli scolari, sviluppa attività significative dal punto di vista matematico. In poche parole, esemplifica l’approccio costruttivo all’errore che va oltre alla mera costruzione, ma che utilizza l’errore come fonte di costruzione di nuova conoscenza e indagine.

Un esempio tipico (tratto da Borasi, 1996) è la semplificazione sbagliata nel trattamento di numeri espressi come frazioni:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

Il tipico intervento in classe si limita a mostrare con un controesempio (o più controesempi) che tale semplificazione è errata. Borasi invece suggerisce di sviluppare tutta una serie di domande che portano ad analizzare il concetto di frazione (e di frazione equivalente) e quindi lavorano più in profondità. Ad esempio chiede: “Come mai questo procedimento errato porta in questo caso ad un risultato giusto?” oppure “Ci sono altre frazioni con numeratore e denominatore di due cifre che semplificate in questo modo portano ad un risultato corretto?”.

Se è abbastanza evidente che il protrarsi di un errore come quello brevemente discusso può compromettere lo sviluppo di nuovi concetti e procedimenti matematici, la considerazione interessante dal punto di vista didattico è che la ricerca ha dimostrato come l’intervento puramente correttivo di solito non funziona, nel senso che non ottiene l’effetto desiderato: la maggioranza degli allievi che fanno quell’errore in maniera sistematica, continuano a farlo anche dopo diversi interventi correttivi. Il lavoro proposto da Borasi ha molto più effetto anche rispetto al solo obiettivo di superare quel tipo di errore.

L'approccio suggerito da Borasi ha una chiara complessità: richiede una competenza matematica elevata sia dal punto di vista epistemologico che didattico; ed evidenzia una delle caratteristiche più importanti dell'insegnamento: quella di saper porre *buone* domande.

A parte la complessità di cui sopra, la distanza tra pratica e ricerca sembra essere fortemente condizionata anche dagli obiettivi di apprendimento: in un approccio (molto diffuso nell'insegnamento della matematica in Italia) mirato all'addestramento, e quindi all'attivazione di processi riproduttivi, l'errore è sicuramente sintomo di fallimento e, quindi, qualcosa da evitare. Si genera così un fenomeno allarmante: quello della diffusione della "paura di sbagliare", che più in generale diventa paura della matematica (Di Martino & Zan, 2013).

In un approccio che punta a mettere in gioco il pensiero produttivo, invece, l'errore non solo va messo nel conto, ma può essere veramente decisivo per raggiungere l'obiettivo (Zan, 2007). Un approccio per problemi all'insegnamento della matematica necessita infatti di scelte e pratiche didattiche coerenti e, in particolare, del superamento della paura dell'ignoto, del "non controllato" anche da parte dell'insegnante.

2. Problem solving: pratica didattica, Indicazioni Nazionali e l'importanza di spostare l'attenzione educativa sull' affrontare problemi

Il fatto che gli insegnanti tendano a evitare, se possibili, occasioni di errore ai propri studenti è provato dallo sbilanciamento enorme nella scuola italiana e, in particolare, nell'insegnamento della matematica al primo ciclo, in favore di richieste di tipo riproduttivo (esecuzione di procedure note) rispetto a richieste di tipo produttivo (problemi nuovi). Tipicamente l'insegnante, prima di proporre un quesito su uno specifico contenuto matematico, mostra *come si fa* presentando diversi esempi, prova a immaginare e a illustrare tutte le varianti possibili in cui può capitare di mettere in gioco quel concetto matematico (non facendo emergere, tra l'altro, l'importante idea matematica di struttura e alimentando la convinzione che in matematica sia necessario ricordarsi moltissime cose) e poi propone agli allievi attività simili. Da questo punto di vista è indicativo il fatto che molti insegnanti, a commento delle prove INVALSI, esplicitino la loro contentezza quando accade che un quesito proposto da INVALSI sia stato già proposto in classe durante l'anno.

Come sottolinea Zan (2007, p. 27): "Implicita nella preoccupazione di evitare domande 'troppo difficili' c'è spesso la valorizzazione della correttezza dei prodotti, che viene considerata più importante dell'attivazione di processi di pensiero significativi, anche se, come già detto, tale correttezza si può ottenere banalizzando le richieste e di per sé non garantisce un effettivo apprendimento".

È evidente che il peso dell'errore dipenda dal tipo di attività proposta e dall'obiettivo dell'attività. Una prima demarcazione in questo senso può essere proprio tra richieste di tipo riproduttivo (esercizi) e richieste di tipo produttivo (problemi): se nel primo caso l'errore ha un peso evidente – proponendo tali attività si vorrebbe verificare il controllo su algoritmi noti e appunto la capacità di riproduzione corretta – nel secondo caso, l'errore non solo va messo nel conto, ma può essere fonte di approfondimento e apprendimento.

D'altra parte ridurre l'insegnamento della matematica alla riproduzione di algoritmi o fatti noti è sicuramente fortemente discutibile, seppur molto diffuso a livello di primo ciclo: in questo senso significativi sono anche gli esercizi e i cosiddetti problemi a disposizione sui libri di testo di scuola primaria, ma anche di scuola secondaria di primo e secondo grado.

È discutibile perché è quantomeno epistemologicamente limitato, se siamo d'accordo con quanto sottolinea Halmos (1975): "Di cosa si occupa realmente la matematica? Di risolvere problemi", e ancora: "Qual è il miglior modo per imparare a risolvere problemi? Affrontare problemi".

È discutibile perché trasmette una idea di successo e di *bravo* in matematica pericolosa: fa credere ai ragazzi che si è bravi in matematica quando si riesce a dare risposte corrette in poco tempo ad esercizi ripetitivi.

È discutibile perché in aperto contrasto con quanto richiesto dalle *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*, che sottolineano: "Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive" (MIUR, 2012, p. 49).

Per proporre una didattica della matematica diversa, fondata sulla problematizzazione e sui problemi, l'insegnante deve innanzitutto vincere la sua paura dell'errore: la paura che gli studenti sbaglino *troppo*. È un risultato tutt'altro che banale, che passa dal superamento dell'idea che gli errori degli studenti in matematica siano un fallimento dell'insegnante e del suo insegnamento, e anche del superamento dell'idea *duale*, ovvero la convinzione che l'insegnamento della matematica che produce risposte corrette sia un insegnamento che *funziona*, a prescindere dalla qualità delle domande poste e dei processi che hanno portato a quelle risposte ("funzionare" è, a nostro avviso, una parola molto pericolosa in ambito educativo).

Una volta vinta la paura di cui sopra, e, dunque, dopo essersi convinto dell'importanza di proporre questioni difficili agli allievi in matematica, l'insegnante ha un'altra necessità, anche matematicamente molto complessa: *tradurre* didatticamente quel "difficile" in base al contesto classe; in particolare, calibrare la difficoltà in modo che i suoi allievi possano affrontare il problema.

L'uso del verbo "affrontare" non è casuale: è probabilmente la chiave di volta del cambiamento di prospettiva importante che suggeriamo. L'obiettivo didattico nel proporre (veri) problemi di matematica agli allievi non dovrebbe essere tanto e solo quello di risolvere lo specifico problema assegnato di volta in volta, ma quello di *imparare ad affrontare i problemi*, coerentemente con quanto espresso nelle Indicazioni Nazionali ("Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche").

Da questo punto di vista, particolarmente significative ci sembrano le parole del matematico Israel Nathan Herstein nell'introduzione al suo libro *Algebra* (1982), un libro pensato per introdurre l'algebra astratta agli studenti universitari dei primi anni dei corsi di laurea in Matematica, con la consapevolezza che quei contenuti e concetti erano stati fino ad allora considerati troppo avanzati per i primi anni; un libro nato dopo l'esperienza di Herstein in un corso di Algebra con gli studenti migliori del secondo anno della Cornell University. Queste informazioni sono tutt'altro che secondarie: il libro – a nostro avviso bellissimo – è sviluppato avendo in mente una specifica categoria di studenti ai quali, si presume, la matematica piace e che hanno sempre avuto successo in matematica. Come sa chi ha avuto il piacere di usarlo nella preparazione ad un corso di Algebra a livello universitario, ogni paragrafo è corredato da una lista di problemi, mai banali, alcuni dei quali (spesso indicati con asterischi dall'autore) particolarmente complessi. Nell'introduzione, Herstein tocca la questione della delicatezza e soggettività della valutazione della difficoltà di un problema. Tale questione è ancor più complessa a livello di insegnamento di base visto che, come abbiamo sottolineato, in tale contesto deve essere trattata non in assoluto, ma rispetto al contesto classe. Scrive Herstein (1982, p. XIV): "Quelli che per qualche motivo mi sembrano difficili sono contrassegnati con un asterisco (a volte con due). Anche qui sono certo che non ci sarà accordo tra i matematici: molti penseranno che alcuni problemi con l'asterisco non dovrebbero averlo, altri penseranno che problemi senza asterisco dovrebbero, invece, averlo".

D'altra parte, la parte a nostro avviso più bella dell'introduzione, Herstein la dedica allo scopo dei problemi inseriti nel volume: "Due parole sui problemi. Ve ne sono molti, e solo uno studente eccezionale potrebbe risolverli tutti. Alcuni servono solo a completare dimostrazioni del testo, altri hanno lo scopo di illustrare i risultati ottenuti e far pratica su di essi. Molti non vengono proposti *tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati. Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione, quanto nelle idee che fa sorgere in chi la affronta e nei tentativi messi in atto*" (Hernstein, 1982, p. XIV).

Se quello di affrontare i problemi è l'obiettivo per chi si presume abbia già una certa padronanza della matematica e comunque ha scelto di fare un percorso matematico a livello universitario, ci sembra debba esserlo a maggior ragione per chi sta iniziando il suo confronto con la matematica. È piuttosto evidente tra l'altro come l'obiettivo primario che l'insegnante (di qualsiasi livello scolare) identifica – affrontare o risolvere il problema – possa incidere fortemente sulla scelta dell'attività: quanto difficile, quanto un vero problema o un esercizio.

3. Problem solving: necessità e attività

Come abbiamo cercato di illustrare, l'insegnamento per problemi, di cui molto spesso si parla, ma che raramente è effettivamente messo in pratica (e che, dunque, in un certo senso sarebbe fortemente innovativo a livello di primo ciclo), è un approccio che mira ad obiettivi significativi dell'educazione matematica, in linea con quelli fissati nelle *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* (MIUR, 2012) e che contribuisce a sviluppare una diversa epistemologia e considerazione dell'errore in matematica.

Un approccio efficace per problemi in educazione matematica necessita però di scelte e pratiche didattiche coerenti.

Abbiamo parlato del necessario cambiamento di prospettiva dell'insegnante che dovrebbe non identificare l'assenza di errori dei suoi studenti come equivalente al successo del suo insegnamento; dovrebbe superare per primo la paura dell'ignoto e del "non controllato"; dovrebbe proporre problemi "non tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati". Queste sono le condizioni preliminari. Poi ci sono gli aspetti relativi alla scelta dei problemi, alla gestione dell'attività di *problem solving* e alla valutazione di ciò che emerge, valutazione in senso epistemologico, cioè al dare valore – a cosa, come e perché – non ad assegnare un voto.

Per quanto riguarda la scelta del problema, Zan e Di Martino (2017) identificano, tra le altre, le seguenti tre caratteristiche come indicatori di un *buon* problema:

– è veramente un problema per gli allievi, ovvero non è collegabile immediatamente a schemi risolutivi visti in precedenza;

– mette in gioco obiettivi di apprendimento significativi per il livello scolare;

– è inclusivo, ovvero permette l'esplorazione a diversi livelli e diversi approcci risolutivi.

Nella gestione dell'attività di problem solving, sempre Zan e Di Martino (2017) sottolineano l'importanza che l'insegnante dedichi sufficiente tempo all'attività di soluzione di un problema, e di conseguenza dia tempo agli allievi per affrontarlo e discutere con gli altri i processi di pensiero attivati; consideri l'errore come naturale nell'attività di soluzione di problemi nuovi e complessi, e perciò lo utilizzi come occasione di costruzione della conoscenza; incoraggi, attraverso le proprie scelte valutative, un'idea di successo in matematica non legata al dare velocemente risposte corrette, ma alla qualità dei processi di pensiero attivati e alla capacità di condividerli con gli altri (pari e insegnante).

Coerentemente con questo quadro, l'insegnante dovrebbe curare con attenzione un altro aspetto: evitare di dare risposte agli allievi nei momenti di difficoltà – comportamento coerente con l'obiettivo di arrivare in fondo al problema, di far sì che gli allievi arrivino alla risposta corretta, non con quello di lasciare che lo affrontino con le loro forze e imparino anche ad uscire dalla difficoltà – e invece porre continuamente domande che facciano da stimolo sia durante la fase di risoluzione che, eventualmente, a posteriori.

Qui di seguito presentiamo una delle tante attività di osservazione, ricerca, descrizione e spiegazione di regolarità che abbiamo sperimentato nei nostri gruppi di ricerca. L'attività scelta è volutamente al livello di scuola dell'infanzia, per mostrare come si possa e si debba lavorare su consegne aperte da subito, in un'ottica verticale.

L'attività descritta (ricerca di regolarità e argomentazione) rientra in un tipo di attività, non a caso molto studiata a livello nazionale e internazionale in educazione matematica (Ferrari, 2004; Radford, 2011) per le sue peculiarità, rispondenti a ciò che abbiamo descritto precedentemente:

– innanzitutto chiedere di osservare e trovare regolarità è di per sé una richiesta di scoperta e non riproduttiva (quindi un vero problema);

– la ricerca di regolarità, matematiche o non matematiche, è legata all'idea di struttura, concetto centrale in matematica;

– la richiesta è aperta e veramente inclusiva: non esiste un'unica risposta giusta e ci possono essere osservazioni di regolarità di diversa natura e profondità;

– la richiesta di descrizione e di spiegazione finale (con il confronto in gruppo) lavora sulla competenza argomentativa e può aiutare a sviluppare, già con i più piccoli, l'idea che la matematica si interessa molto al *perché* e non solo al *come*;

– è un'attività dalle potenzialità enormi in ottica anche di continuità verticale tra livelli scolari[3].

In questo tipo di attività, come vedremo, il ruolo dell'insegnante è centrale, non solo nella scelta del contesto e nello sviluppo dell'esperienza osservativa, ma anche nella conduzione della discussione, durante la quale non vengono date risposte pronte, ma chieste spiegazioni, proposti nuovi interrogativi e instillati dubbi.

4. Le proprietà della conta

L'attività che descriviamo è stata proposta alla Scuola dell'Infanzia dell'Istituto Comprensivo Follonica II all'interno di un percorso biennale di formazione insegnanti focalizzato sulla proposizione in classe (o sezione nel caso della Scuola dell'Infanzia) di problemi e di osservazioni di regolarità per la scoperta di proprietà/strutture.

Lo schema di attività è stato sempre il solito: osservazione ripetuta di un *fenomeno* (talvolta nel corso di pochi giorni, talvolta per tutto l'anno scolastico) e al termine dell'osservazione richiesta ai bambini di esplicitare cosa secondo loro caratterizza il fenomeno osservato, ovvero quali regolarità hanno notato nella ripetizione del fenomeno.

Una di queste attività di osservazione di regolarità, dedicata alla sezione dei grandi (i bambini di 5 e 6 anni) si è focalizzata sul conteggio, a partire dalla conta dei presenti ad inizio di ogni giornata. I bambini in fila si contavano e segnavano il numero di presenti. Ogni giorno la richiesta di conteggio era fatta a più bambini.

Alla fine dell'anno si è proposto ai bambini la seguente consegna: "*Quali proprietà ha la conta (dei presenti)? Se tu dovessi raccontare qualche cosa della conta ad un tuo compagno che non l'ha mai fatta cosa gli diresti*?"

Riportiamo un breve stralcio di alcuni interventi dei bambini e dell'interazione con la maestra, suddividendo i vari momenti e sottolineando come l'attività sarebbe potuta continuare con nuove domande e nuovi problemi da affrontare.

Un primo bambino, Tommaso, esplicita subito quello che Gelman e Gallistel (1978) chiamano il principio dell'irrilevanza dall'ordine nel contare: l'ordine in cui gli oggetti sono contati è irrilevante. Tommaso dice: "*Se contiamo da un amico, oppure da un altro, siamo sempre dello stesso numero*". Volendo essere pignoli possiamo affermare che Tommaso si è accorto che è irrilevante l'inizio: essendo disposti i bambini in fila, gli ordini possibili (non è che Tommaso

[3] A questo proposito è stato proposto un interessantissimo laboratorio alla Scuola estiva UMI/CIIM-AIRDM di Bardonecchia da Ketty Savioli. I materiali sono disponibili al seguente URL: http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2016/09/Savioli_1.pdf

salta da un bambino all'altro, anche perché sarebbe molto poco strategico) sono essenzialmente due. Ad ogni modo, l'osservazione di Tommaso tocca uno degli aspetti più delicati del conteggio: come sottolineano le ricerche condotte da Gelman e Gallistel, la scoperta di Tommaso è tutt'altro che scontata.

Tommaso sembra svolgere il ruolo che Maria Mellone (2007) definisce di "precursore (apparentemente) inascoltato": gli altri bambini sembrano non essere ancora pronti ad accogliere l'osservazione di Tommaso, ma non è detto che le sue parole non siano ascoltate e non abbiano effetto alcuno. Maria Vittoria infatti, visto che Tommaso sembra riferirsi ad una certa libertà nella scelta del punto di partenza, sottolinea la sua convinzione che la fine abbia una regola ben precisa: "*La conta deve finire al compagno vicino, prima del compagno dove abbiamo iniziato la conta*". L'osservazione di Maria Vittoria, seppur più legata ad *aspetti operativi* e meno generalizzabile di quella di Tommaso (in teoria si potrebbe finire dove vogliamo a contare, se non seguissimo l'ordine suggerito dalla fila), sembra mostrare sia una certa attenzione a ciò che è stato detto dal compagno, che la capacità di immaginare la situazione. I bambini, infatti, tipicamente contavano a partire da una delle due estremità della fila: Maria Vittoria sembra provare ad immaginarsi cosa si deve fare se si parte da un altro bambino "nel mezzo della fila", come Tommaso dice si possa fare.

La maestra chiede allora un perché di questa regola della conta (regola che sembra fissare un obbligo: *deve finire*) enunciata da Maria Vittoria. Il motivo sembra condiviso, tanto che i bambini in coro dicono: "*Non si può contare chi si è già contato*".

Emerge come una conquista consapevole e condivisa quello che Gelman e Gallister (ibidem) identificano come il principio dell'iniettività nel conteggio: appaiare ad ogni oggetto da contare segni distinti (ad esempio i nomi dei numeri, se si conoscono) in modo che uno e un solo segno sia usato per ogni oggetto dello schieramento. L'acquisizione di questo principio comporta la coordinazione di due processi, come sottolineato da Bartolini Bussi (2008):

– la ripartizione, per distinguere cosa è stato contato e cosa no;

– l'etichettatura, per gli adulti tipicamente corrispondente alla sequenza dei numeri naturali.

Questo comporta tre difficoltà:

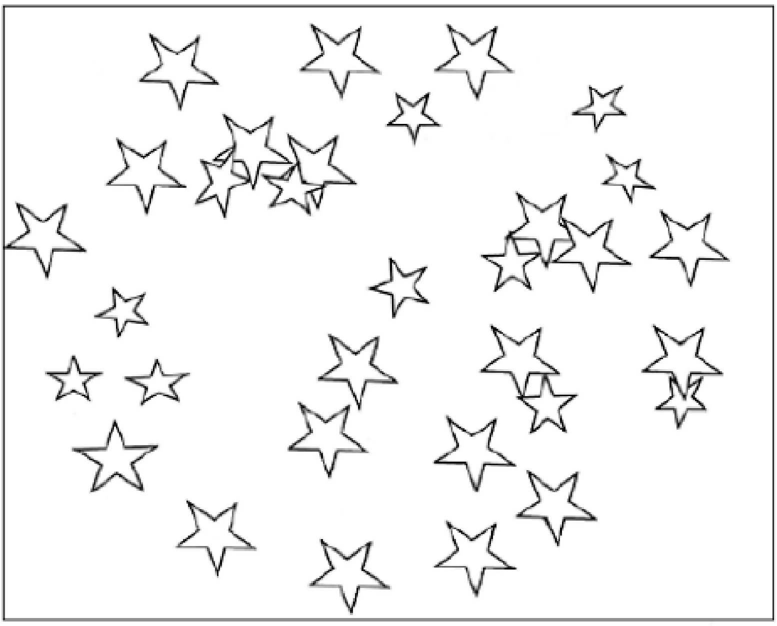
– nella ripartizione: si conta due volte lo stesso oggetto o non si contano oggetti da contare;

– nella etichettatura: si usa due volte la stessa etichetta, non si ha abbastanza etichette, si salta un'etichetta da un elenco noto ("uno, due, quattro, cinque");

– nel coordinare le due cose: si continua o si smette di etichettare non in fase con il ripartire.

Che ci siano delle difficoltà evidenti in tutto questo, anche per bambini più grandi, è provato anche dal seguente quesito INVALSI, proposto nel 2013 in seconda primaria:

D1. Conta le stelle.



Quante sono in tutto le stelle?

Risposta: ………………

Si chiede di contare un insieme di oggetti non spostabili e disposti in ordine caotico. Ebbene, a testimonianza delle difficoltà di cui stiamo parlando, la percentuale di risposte sbagliate del campione nazionale a livello di seconda primaria è del 42,6%.

A seguito della risposta in coro alla domanda della maestra, interviene Alessandro che ricollegandosi all'attenzione sul dove si deve finire di contare dice: "*Il numero che si dice per ultimo ci dice quanti siamo*". Evidentemente non è chiaro se Alessandro sia consapevole che quello che ha detto vale al di là della specifica esperienza di conteggio di bambini presenti (principio di astrazione), ma sicuramente ha esplicitato un altro dei principi del conteggio di cui stiamo parlando, quello della cardinalità, ovvero che l'etichetta numerica finale ha un significato speciale, rappresenta una proprietà dell'intero insieme: la sua cardinalità. Questo duplice ruolo dell'etichetta finale è spesso enfatizzato nel conteggio dei bambini, conteggio nel quale spesso viene ripetuto l'ultimo numero: "*uno, due, tre,..., sedici, diciassette, diciotto. Diciotto!*".

Dopo aver raccolto queste e altre regolarità esplicitate dai bambini, la maestra introduce la richiesta di spiegazione: "*Come mai valgono queste proprietà secondo voi?*". E qui si apre un mondo di argomentazioni, confronti, dubbi e errori che è superfluo sottolineare come sia ricco e fecondo.

Tommaso basa la sua spiegazione sulla verifica del caso (e quindi seppur la sua congettura è basata sull'esperienza e su osservazioni ripetute, si deve riferire al presente, al caso sotto controllo): "*La prima regola è vera perché, anche oggi, siamo diciotto sia se si conta da un compagno, sia se si inizia a contare da un altro*".

Ma Elia, vedendo la prova di Tommaso – che fa vedere come venga diciotto sia a partire da un capo della fila che dall'altro – ha un interessante dubbio: "*Però se si comincia sempre da quello che sta all'inizio lì (della fila) ci credo che siamo sempre diciotto. Però se si conta da qui (nel mezzo della fila) non lo so mica!*".

La maestra propone di contare partendo dal mezzo della fila e i bambini convengono che, anche in questo specifico caso, sono sempre diciotto i presenti. A questo punto la maestra, riprendendo lo spunto di Maria Vittoria, chiede: "*dove deve finire la conta in questo caso?*". La risposta di Tommaso e Maria Vittoria è interessante: "*Deve finire al compagno vicino...ma vicino prima del compagno dove abbiamo iniziato la conta*". Emerge, senza una richiesta di precisazione da parte della maestra o di nessun altro, la consapevolezza della necessità di spiegare un termine introdotto in maniera ambigua. È evidente che, da un certo punto di vista, l'uso del *prima* non sembra risolvere l'ambiguità, ma, da una parte la consapevolezza della necessità di spiegare il termine "vicino" è di per sé un traguardo significativo, dall'altra il prima è legato alla direzione di conteggio scelta, che gli altri bambini vedono. Quindi, in quello specifico contesto (per gli altri bambini) il *prima* è probabilmente condiviso come riferimento, e comunque sicuramente più informativo del *vicino*.

Un altro dubbio *spontaneo* (non emerso da un adulto) sorge a Lorenzo, che pone un altro problema: "*ma perché da un giorno all'altro cambia il numero* [dei presenti]*?*".

Elia ha una risposta pronta: "*Perché viene un compagno di meno... perché l'8 viene prima del 9*". La risposta di Elia, da una parte conferma la tendenza ad argomentare sulla base della situazione contingente (il giorno precedente il cartellone delle presenze segnava 19 presenze), dall'altra mette in gioco un altro aspetto che la maestra può appuntarsi: Elia sembra far riferimento alle proprietà della notazione posizionale, astraendosi dal conteggio. Non dice infatti il diciotto viene prima del diciannove, ma si focalizza sulle unità.

Osservando quanto è emerso, altri possibili problemi *argomentativi* da porre ai bambini (evocazione di dubbi dall'esterno) sarebbero potuti essere i seguenti:

– Perché la conta deve finire al compagno vicino, prima del compagno dove abbiamo iniziato la conta? Possiamo contare senza finire al compagno vicino? Qui la maestra potrebbe far vedere un conteggio con un ordine diverso che non finisce al compagno vicino e osservare la reazione dei bambini legati ad una precisa strategia di conteggio, effettivamente piuttosto efficiente (l'ordine è chiaro);

– Perché il numero che si dice per ultimo ci dice quanti siamo? Può succedere che il numero che si dice per ultimo non ci dica quanti siamo?

5. Conclusioni

Abbiamo sottolineato come l'errore, nel processo di insegnamento e apprendimento della matematica, sia spesso visto come qualcosa da evitare assolutamente, come sintomo di difficoltà da parte degli allievi e talvolta di fallimento dell'insegnamento. Questa visione porta a scelte didattiche coerenti con l'obiettivo di "evitare errori": evitando di affrontare questioni difficili e soprattutto stimolando unicamente il processo riproduttivo in matematica. Il risultato è la costruzione diffusa di un'immagine della matematica e di cosa sia il successo in matematica *epistemologicamente distorta* e lontana dal valore dell'errore nel progresso matematico.

Se guardiamo alla storia della matematica infatti, gli errori e i fallimenti sono parte non solo inevitabile, ma importante e proficua delle tappe del percorso dello sviluppo della conoscenza in generale e della matematica in particolare. Ed è dai periodi di crisi e dagli errori che, nel corso della storia, è venuta fuori nuova matematica oppure si è deciso di abbandonarne o modificarne parti di essa. E così in ambito educativo, l'errore andrebbe utilizzato come una occasione di esplorazione e scoperta per costruire nuova conoscenza, a partire dalle convinzioni degli studenti. Come sottolinea Lolli (2006): "La matematica è un laboratorio di pensiero – questa potrebbe essere una sua definizione – e ogni tanto nel laboratorio gli esperimenti danno esiti insoddisfacenti, inaspettati o incontrollabili".

Tuttavia, se è l'insegnante stesso ad avere paura di sbagliare e di "perdere il controllo" sui percorsi risolutivi degli studenti, è comprensibile da una parte che questa paura si trasmetta allo studente, dall'altra che influenzi le scelte didattiche. In particolare, l'insegnante eviterà di proporre problemi "difficili", eviterà probabilmente di dare problemi, rifugiandosi nella "sicurezza" della richiesta di ripetizione di procedure note. In questo modo però, uno degli obiettivi a nostro avviso più importanti e interessanti dell'educazione matematica – l'educazione al problem solving – viene meno.

D'altra parte, il fatto che gli studenti italiani trovino spesso difficoltà nelle prove nazionali ed internazionali (INVALSI, OCSE-PISA) è anche dovuto alla scarsa educazione ad affrontare situazioni nuove, a risolvere problemi (Zan, 2016). Si preferisce, nella maggior parte dei casi, chiedere agli studenti di ripetere e riprodurre algoritmi noti, piuttosto che affrontare situazioni nuove, proprio per minimizzare il "rischio" di errori. Tutto ciò è legato all'idea (che dagli insegnanti passa agli studenti) che avere successo in matematica significhi dare sempre risposte corrette in poco tempo. Ed è legato, dunque, ad un'idea riduttiva di valutazione. Con le parole di Rosetta Zan (2016): "da un lato bambini e ragazzi si sentono sempre sotto valutazione e quindi non esplorano, non osano: sono ingessati nella ricerca della risposta corretta. Dall'altro lato l'insegnante per paura di ottenere brutti risultati semplifica le richieste".

Un cambiamento di visione, dunque, presuppone un cambiamento metodologico sostanziale nella pratica didattica, presuppone che un approccio mirato "all'addestramento" venga sostituito con approcci mirati a stimolare un pensiero produttivo. L'insegnamento per problemi è un approccio che mira ad obiettivi significativi dell'educazione matematica, e questo anche in linea con quanto scritto nelle *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* (MIUR, 2012).

Usando le parole di George Polya: "Un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale" (Polya, 1945, tr. it., p. 7).

Dare compiti aperti, mettere nel conto gli errori, chiedere di argomentare stimolano quella varietà e apertura di pensiero che caratterizzano la matematica, il suo studio ed il suo sviluppo, ma che spesso non caratterizzano quella scolastica. Farlo fin da subito non solo è possibile – come dimostra l'esempio discusso in questo contributo – ma è fondamentale per costruire, in verticale, un certo tipo di approccio alla matematica.

6. Bibliografia

Bartolini Bussi, M. (2008). *Matematica, i numeri e lo spazio*. Reggio Emilia: Junior Edizioni.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex.

Borasi, R. (1989). Students' Constructive Uses of Mathematical Errors: A Taxonomy. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Francisco, Ca.

Di Martino, P. & Zan, R. (2013). Where does fear of maths come from? Beyond the purely emotional. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Ankara: Middle East Technical University.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. MA. Harvard University Press, Cambridge.

Halmos, P. (1975). The problem of learning to teach. *The American Mathematical Monthly*, 82 (5), 466-47.

Herstein, I. N. (1982). *Algebra*. Roma: Editori Riuniti [tr. it. di Antonio Machì di *Topics in Algebra*, 1975].

Lolli, G. (2006). La questione dei fondamenti tra matematica e filosofia" In: Albeverio, S., Minazzi F. (a cura di), *Matematica e filosofia*, nn. 14-15 di *Note di Matematica, Storia, Cultura* (Pristem/Storia, Università Bocconi, Milano), 2006, pp. 17-35.

Mellone, M. (2007). *Un progetto didattico innovativo sulle strutture aritmetiche*. Tesi di dottorato di ricerca in scienze matematiche – Università Federico II di Napoli. Disponibile http://www.fedoa.unina.it/2017/1/Mellone_Scienze_Matematiche.pdf

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma.

Nigris, E. (2009). *Le domande che aiutano a capire*. Milano: Bruno Mondadori Editore.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Popper, K. (1969). *Scienza e filosofia: problemi e scopi della scienza*. Torino: Giulio Einaudi Editore.

Popper, K. (1972). *Conoscenza oggettiva. Un punto di vista evoluzionistico*. Roma: Armando Editore.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.

Radford, L. (2011). Sullo sviluppo del pensiero matematico nei giovani studenti: la graduale armonizzazione di percezione, gesti e simboli. In *Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica*. Castel San Pietro: Pitagora Editrice.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Convergenze, Springer Italia.

Zan, R. (2016). Matematica e studenti italiani: tutto da rifare?. *La vita scolastica.* Giunti-Scuola.

Zan, R. & Di Martino, P. (2017). *Insegnare e apprendere matematica con le indicazioni nazionali*. Firenze: Giunti Scuola.

Received October 12, 2017
Revision received December, 2017/December 24, 2017
Accepted December 30, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 91-107 – ISSN 2038-1034

Promuovere strategie di valutazione formativa in Matematica con le nuove tecnologie: l’esperienza del progetto FaSMEd

Annalisa Cusi
Francesca Morselli
Cristina Sabena

Abstract – *This contribution describes a research work within the European project FaSMEd (Improving Progress through Formative Assessment in Science and Mathematics Education) aimed at investigating, through a design-based research approach, the use of technology to foster formative assessment strategies in primary and lower secondary school. The project (2014-2016) was carried out by eight European universities (for Italy, the University of Turin) and one university from South Africa. The theoretical framework refers to formative assessment, with a specific focus on different levels of feedback. By analyzing data from our teaching experiments, we identify strategies employed by the teacher to provide feedback during class discussion and investigate the effect of such strategies on the enactment of formative assessment.*

Riassunto – *In questo contributo si presentano e discutono le metodologie didattiche sviluppate attraverso una ricerca design-based sull’utilizzo delle nuove tecnologie per promuovere strategie di valutazione formativa in matematica in classi di scuola primaria e secondaria di primo grado. La ricerca si situa all’interno di un progetto finanziato dall’Unione Europea denominato FaSMEd (Improving Progress through Formative Assessment in Science and Mathematics Education), che nel triennio 2014-2016 ha coinvolto otto Università dell’Unione (per l’Italia l’Università di Torino) e il Sudafrica. Facendo riferimento a un quadro teorico centrato sulle strategie di valutazione formativa e sui diversi livelli di feedback che possono essere forniti durante discussioni di classe su attività matematiche ad alto contenuto argomentativo, proponiamo una classificazione di possibili azioni didattiche dell’insegnante, mettendo in luce gli effetti di tali azioni rispetto all’attivazione di strategie di valutazione formativa.*

Parole chiave – matematica, valutazione formativa, strategie di feedback, nuove tecnologie, ruolo dell’insegnante

Keywords – mathematics, formative assessment, feedback strategies, new technologies, role of the teacher

Annalisa Cusi si è laureata in Matematica nel 2001 presso l’Università di Modena e Reggio Emilia, dove ha conseguito il titolo di Dottore di Ricerca nel 2009. È docente di ruolo di Matematica e Fisica presso il Liceo Aldo Moro di Reggio Emilia. Nel triennio 2014-2016 è stata Assegnista di ricerca presso l’Università di Torino nell’ambito del progetto FaSMEd. I suoi principali interessi di ricerca riguardano: la didattica dell’algebra; l’analisi dei processi di insegnamento e apprendimento, con focus particolare sul ruolo svolto dal docente; early algebra e strategie per promuovere lo sviluppo del pensiero algebrico negli allievi; metodologie per la formazione degli insegnanti e analisi dei processi di lavoro collaborativo tra insegnanti e ricercatori; valutazione formativa in Matematica.

Francesca Morselli si è laureata in Matematica presso l'Università di Genova nel 2002 e ha conseguito il Dottorato di Ricerca presso l'Università di Torino nel 2007, con una tesi sui fattori culturali nei processi dimostrativi. Dal 2015 è Professore Associato di *Matematiche Complementari* presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, dove si occupa di formazione iniziale e continua degli insegnanti. I suoi interessi di ricerca riguardano i seguenti temi: argomentazione e dimostrazione matematica; la valutazione formativa in matematica; l'interazione tra fattori affettivi e cognitivi nell'insegnamento e apprendimento della matematica.

Cristina Sabena si è laureata in Matematica presso l'Università di Torino nel 2002 e ha conseguito il Dottorato di Ricerca presso l'Università di Torino nel 2007. È Professore Associato di *Matematiche Complementari* presso il Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione dell'Università di Torino, dove si occupa di formazione iniziale degli insegnanti di scuola dell'infanzia e primaria. L'attività di ricerca scientifica verte principalmente sui seguenti temi: l'insegnamento-apprendimento della matematica in ottica multimodale e con strumenti semiotici; la valutazione formativa in matematica; il networking di approcci teorici nella ricerca in didattica della matematica.

1. Introduzione

La valutazione nella scuola gioca un ruolo importante per il percorso di apprendimento degli studenti e nel lavoro dei docenti. Accanto a una valutazione dell'apprendimento o valutazione sommativa, finalizzata ad attestare e accertare il raggiungimento di determinati obiettivi educativi secondo una logica del controllo, c'è una valutazione per l'apprendimento, finalizzata a migliorare il processo educativo stesso secondo una logica di sviluppo (Castoldi, 2012): in altri termini una valutazione formativa, secondo l'espressione coniata nel Regno Unito dal gruppo di lavoro ministeriale per la riforma della valutazione, ovvero l'Assessment Reform Group (1999).

Questa prospettiva mette in luce la necessità di recuperare le potenzialità formative dei processi di valutazione, che possono essere considerati tra gli strumenti più efficaci per migliorare gli apprendimenti stessi. La valutazione formativa si configura quindi come un vero e proprio metodo di insegnamento, nel quale "elementi di evidenza relativi ai risultati degli studenti vengono raccolti, interpretati ed utilizzati da insegnanti, studenti e loro pari – i compagni – per prendere decisioni sui passi successivi da fare nel processo di istruzione, che possano essere migliori, o meglio fondate, rispetto alle decisioni prese in assenza di tali elementi di evidenza" (Black & Wiliam, 2009, p. 7, traduzione delle autrici). Attività tipiche dei processi di valutazione formativa sono quindi quelle attraverso le quali gli studenti hanno modo di verificare i propri livelli di apprendimento, pianificare e attuare, in interazione con l'insegnante e i compagni di classe, le strategie necessarie per raggiungere gli obiettivi di apprendimento prefissati. Questa prospettiva è in linea anche con le recenti Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012), secondo cui la valutazione "precede, accompagna e segue i percorsi curricolari. Attiva le azioni da intraprendere, promuove il bilancio critico su quelle condotte a termine. Assume una prevalente funzione formativa, di accompagnamento dei processi di apprendimento e di stimolo al miglioramento continuo" (p. 13).

La valutazione formativa in matematica e scienze è stata oggetto di un recente progetto finanziato dall'Unione Europea, denominato FaSMEd (Improving Progress through Formative

Assessment in Science and Mathematics Education, https://research.ncl.ac.uk/fasmed/).

In particolare, all'interno del progetto FasMEd è stato indagato l'uso delle tecnologie nelle pratiche di valutazione formativa in classe, per mettere in luce se e in che modo esse consentono agli insegnanti di rispondere ai bisogni degli studenti in matematica e scienze, motivandoli all'apprendimento di queste discipline. Il progetto ha coinvolto otto Università di Paesi dell'Unione (per l'Italia l'Università di Torino) e il Sudafrica nel triennio 2014-2016 e attraverso una *design-based research* (DBRC, 2003) ha prodotto un "toolkit" per insegnanti e formatori, ossia un insieme di materiali per il curricolo e di metodologie di intervento pedagogico (https://microsites.ncl.ac.uk/fasmedtoolkit/) che sfruttano le potenzialità delle nuove tecnologie per attuare la valutazione formativa in matematica e scienze.

All'interno di FaSMEd, il lavoro del team italiano facente capo all'università di Torino (composto dalle tre autrici) ha elaborato metodologie didattiche basate sull'utilizzo di tecnologie di classe connessa per promuovere strategie di valutazione formativa in matematica in classi di scuola primaria e secondaria di primo grado. Seguendo il paradigma italiano della ricerca per l'innovazione (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998), l'elaborazione delle metodologie innovative si è basata sull'intreccio di componenti teoriche e di sperimentazioni in aula, con la collaborazione degli insegnanti di classe nelle varie fasi della ricerca.

Il lavoro di design è stato condotto a partire da specifiche assunzioni teoriche e metodologiche, riguardanti in particolare l'importanza di portare gli studenti stessi a riflettere sui processi di insegnamento-apprendimento e spingerli a rendere il loro pensiero visibile (Collins, Brown & Newmann, 1989), condividendo quindi le loro idee con l'insegnante e con i compagni di classe. Queste assunzioni hanno anche guidato le specifiche scelte compiute in relazione alla tecnologia da adottare, alla metodologia di lavoro da proporre in classe e alle attività stesse.

Nel seguito dell'articolo presenteremo i principali riferimenti della base teorica, le motivazioni che hanno condotto alla scelta della tecnologia di classe connessa e i principali elementi della metodologia didattica elaborata. Attraverso un esempio, tratto dalle sperimentazioni condotte e analizzato mediante metodi qualitativi, ci concentreremo su tre aspetti: il ruolo cruciale del feedback (anche in riferimento allo specifico contenuto disciplinare), le strategie che l'insegnante può mettere in atto per fornire feedback ed i legami tra tali strategie e i processi di valutazione formativa che vengono attivati.

2. La valutazione formativa e le nuove tecnologie

Nel caratterizzare le pratiche di valutazione formativa, Black e Wiliam (2009) evidenziano cinque diverse *strategie di valutazione formativa*, attivate dai diversi protagonisti del processo di valutazione (insegnante, studente, compagni):

A. Chiarire/capire/condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di valutazione;

B. Progettare discussioni di classe efficaci e attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti;

C. Fornire feedback che consentano allo studente di migliorare;

D. Attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri;

E. Attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento.

Black e Wiliam sottolineano in particolare la centralità del *feedback* nei processi di valutazione formativa. Un feedback è "un'informazione, fornita da un soggetto (ad esempio l'insegnante, un compagno, il libro di testo, un genitore, l'individuo stesso, l'esperienza), relativa alla performance o alla comprensione" (Hattie & Timperley, 2007, p. 81, traduzione delle autrici). Il feedback fornito dall'insegnante ha l'obiettivo di monitorare i progressi compiuti dagli allievi, consentendo loro di diventare consapevoli degli obiettivi di apprendimento, delle problematiche evidenziate e di ciò che possono fare per superarle. Discutendo le caratteristiche del feedback al fine di avere effetti positivi sull'apprendimento, Hattie e Timperley osservano che un feedback efficace dovrebbe consentire allo studente di rispondere a tre domande chiave:

– Dove sto andando? (ovvero, quali sono gli obiettivi dell'attività?);

– Come vi sto andando? (ovvero, quale progresso ho fatto verso l'obiettivo prefissato?);

– Qual è il passo successivo da fare? (ovvero, cosa devo fare per migliorare/progredire?).

Hattie e Timperley distinguono inoltre quattro tipologie di feedback, in base ai domini ai quali si riferiscono:

– *feedback sul compito*, mirato a focalizzare l'attenzione su problematiche connesse all'interpretazione del testo della consegna o alla correttezza della risposta fornita;

– *feedback sullo svolgimento del compito*, relativo ai processi necessari per comprendere ed affrontare efficacemente il compito;

– *feedback per l'autoregolazione*, focalizzato sulla capacità dell'individuo di automonitorarsi e dirigere consapevolmente le proprie azioni;

– *feedback sull'individuo in quanto persona*, che riguarda questioni relative alla valutazione dell'individuo e include aspetti affettivi.

Dare feedback non è di per sé positivo o negativo, al contrario molti fattori possono contribuire al buon successo di un feedback sull'apprendimento: sulla base di un'estesa meta-analisi, Hattie e Timperley evidenziano l'efficacia dei feedback sul compito (tipo a) e sul suo svolgimento (tipo b), mentre gli effetti minori sono riscontrati sui feedback sulla persona, come ad esempio complimenti e rimproveri (tipo d).

Il ruolo delle nuove tecnologie nel promuovere i processi di valutazione formativa è stato oggetto di diversi studi (Quellmalz *et al.*, 2012). Come evidenziato dalla ricerca, le tecnologie digitali possono contribuire a creare contesti di apprendimento che consentano di svolgere alcune funzioni fondamentali dei processi di valutazione formativa, quali: mettere in evidenza ciò che gli allievi stanno facendo e pensando (Roschelle, Penuel & Abrahamson, 2004), promuovere la partecipazione attiva degli studenti nelle discussioni (Roschelle & Pea, 2002), monitorarne i progressi e fornire immediato supporto per rispondere ai loro bisogni (Irving, 2006) o un feedback immediato che possa incoraggiarli a riflettere sui propri progressi (Roschelle *et al.*, 2004).

Sulla base di queste considerazioni sull'utilizzo della tecnologia per promuovere i processi di valutazione formativa, all'interno del progetto FaSMEd è stata messa a punto un'estensione del modello di Wiliam e Thompson (2007), che contenga anche le funzionalità della tecnologia per la valutazione formativa. Tali funzionalità sono:

– *Inviare e mostrare*, quando la tecnologia è utilizzata come supporto per la comunicazione e per attivare discussioni di classe

– *Elaborare e analizzare*, quando la tecnologia è utilizzata per analizzare i dati e le informazioni raccolti durante le lezioni

– *Creare un ambiente interattivo*, quando la tecnologia è utilizzata per creare un ambiente di lavoro condiviso, in cui gli studenti lavorano individualmente o collaborativamente, oppure un ambiente di apprendimento in cui esplorare i contenuti matematici.

Ne risulta un modello a tre dimensioni che comprende: (1) le cinque strategie di valutazione formativa introdotte da Wiliam e Thompson (2007), illustrate sopra; (2) i tre principali protagonisti dei processi di valutazione formativa (l'insegnante, i compagni, lo studente stesso); (3) le funzionalità attraverso cui la tecnologia può sostenere gli agenti nell'attivazione delle strategie di valutazione formativa (si veda anche Aldon, Cusi, Morselli, Panero & Sabena, 2017, e Cusi, Morselli & Sabena, 2016). Il modello costituisce il quadro di riferimento entro cui si sono declinate le scelte teoriche e metodologiche specifiche del team italiano, che saranno descritte in seguito.

3. Il ruolo chiave dell'argomentazione

L'attenzione ai processi argomentativi è riconosciuta dalle Indicazioni nazionali (MIUR, 2012), che sottolineano come la matematica possa contribuire a "sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri" (p. 49), ed è un promettente filone di ricerca in didattica della matematica, sia a livello italiano che internazionale (si veda Stylianides, Bieda & Morselli, 2016 per una sintesi delle ricerche più recenti). In particolare, è stato studiato il rapporto tra argomentazione e dimostrazione, evidenziando l'esistenza di un'unità cognitiva tra i due processi (Boero, Garuti & Mariotti, 1996) e arrivando così a indicare l'argomentazione come processo importante per promuovere l'ingresso nella "cultura dei teoremi" (Boero, 2007). Altri autori si sono concentrati sul rapporto dialettico tra argomentazione e dimostrazione, mostrando che le attività argomentative possono favorire il passaggio dai concetti quotidiani ai concetti scientifici (Douek, 2006) ed evidenziando così che l'argomentazione ha un valore educativo in sé, e non solo come processo che avvicina e preparare alla dimostrazione matematica. D'altro canto, partendo dal presupposto secondo cui l'interazione sociale ha un ruolo decisivo nell'educazione matematica e l'argomentazione può favorire la concettualizzazione, diversi studi si sono interessati alle dinamiche di classe durante le attività argomentative e hanno sottolineato il ruolo chiave di mediazione del docente durante le discussioni di classe (Azmon, Hershkowitz & Schwarz, 2011).

La scelta di coniugare la valutazione formativa con l'argomentazione matematica ha a nostro avviso una duplice valenza. Il primo aspetto riguarda l'utilizzo dell'*argomentazione come risorsa per la valutazione formativa*. La scelta di realizzare attività ad alta componente argomentativa, con la richiesta costante di accompagnare ogni risposta con opportune motivazioni, ha in primo luogo lo scopo di rendere lo studente più consapevole del proprio ragionamento e quindi responsabile in prima persona del proprio processo di apprendimento. In secondo luogo, il processo di pensiero "reso visibile" (Collins, Brown & Newmann, 1989) diventa più facilmente oggetto di feedback da parte dei compagni e dell'insegnante. Questo ci ha condotto a focalizzare l'attenzione degli studenti su domande del tipo "*Motiva la tua risposta*", "*Spiega ciò che hai fatto*", "*Spiega perché il tuo metodo funziona*", richiedendo quindi spiegazioni con funzioni diverse, secondo la classificazione introdotta da Levenson e Barkai (2013). Abbiamo inoltre proposto questioni mirate a stimolare un confronto continuo e lo sviluppo di competenze di tipo meta, come, ad esempio, "*Cosa hanno in comune queste risposte?", "Che differenze possiamo evidenziare?*". In questo senso, l'argomentazione è intesa come strumento per meglio attuare la valutazione formativa.

Allo stesso tempo, abbiamo promosso la *valutazione formativa su attività ad alto contenuto argomentativo*, avendo posto come obiettivo d'apprendimento anche il miglioramento delle competenze argomentative stesse. Attraverso discussioni di classe si è cercato di mettere in luce e condividere con gli studenti aspetti chiave delle diverse argomentazioni proposte, in particolare i criteri di correttezza, chiarezza e completezza. Il criterio della correttezza fa riferimento alla mancanza di errori di tipo matematico nella risposta e nella giustificazione data; il criterio della chiarezza fa riferimento al piano comunicativo e alla comprensibilità della risposta da parte di un interlocutore (i compagni, l'insegnante); il criterio della completezza fa riferimento all'esplicitazione dei vari passaggi che conducono alla conclusione dell'argomento.

L'identificazione di criteri espliciti e condivisi tra insegnanti e con gli studenti per valutare argomentazioni e testi matematici è un aspetto cruciale condiviso anche da altri progetti che hanno a cuore lo sviluppo di competenze argomentative come parte fondamentale per lo sviluppo del pensiero matematico, come il progetto canadese "Comunicazione e apprendimento" di Radford e Demers (2006), i progetti "Bambini Maestri Realtà" e "Linguaggio e argomentazione" del DIMA-Università degli Studi di Genova (http://didmat.dima.unige.it/; http://pls.dima.unige.it/azione1/argomentazione/azione1_argomentazione.php) e il progetto Avimes-Piemonte (De Luca *et al.*, 2008).

4. La scelta della tecnologia e la metodologia didattica

All'interno del progetto FaSMEd, i diversi partner hanno condiviso i presupposti teorici e le finalità del progetto, mentre ogni team ha proceduto in modo autonomo nella scelta della tecnologia da utilizzare. Per quanto riguarda il team italiano, la scelta è stata effettuata sulla base di specifiche esigenze individuate a priori. Nello specifico, una prima esigenza è stata quella di identificare una tecnologia che potesse favorire i processi formativi nella prospettiva sopra delineata, ossia che potesse contribuire alla condivisione dei processi e dei prodotti degli studenti, al fine di renderli disponibili per il feedback dei compagni e dell'insegnante. Una seconda esigenza è stata quella di individuare uno strumento che potesse supportare il docente nel:

– Raccogliere le opinioni degli studenti *durante* l'attività, sia sul piano matematico (*es: quale grafico è corretto?*), sia sul piano metacognitivo (*es: è stato difficile capire il testo del problema?*)

– Raccogliere le opinioni degli studenti *alla fine dell'attività*, sia sul piano matematico (*es: questo risultato è corretto? Questa argomentazione è completa?)* sia su quello metacognitivo (*es: che cosa hai imparato?*).

La scelta è ricaduta su una *tecnologia di classe connessa*, ossia un sistema connesso di computer e/o tablet progettato per supportare processi interattivi di insegnamento-apprendimento (Irving, 2006) e fornire spazi di lavoro condivisi (Robutti, 2010). La tecnologia di classe connessa che abbiamo adottato permette agli studenti di ricevere in tempo reale le schede di lavoro preparate dall'insegnante, inviare la risposta al computer dell'insegnante, partecipare a sondaggi proposti dal docente; l'insegnante può, oltre che inviare materiali ai tablet degli studenti, raccogliere gli elaborati dei gruppi di studenti, ricevere commenti o riflessioni dai gruppi durante o al termine dell'attività, proporre sondaggi, ricevere in tempo reale statistiche relative ai sondaggi. Il computer dell'insegnante è connesso ad una lavagna interattiva multimediale (LIM) o a un video-proiettore, cosicché è possibile mostrare a tutta la classe una selezione di risposte dei gruppi o il risultato di un sondaggio. Per incentivare la collaborazione tra compagni si è anche scelto di organizzare gli studenti in coppie o gruppi da tre, ciascuno dei quali lavorava su un solo tablet.

Le attività messe a punto riguardano le relazioni e funzioni, nelle loro rappresentazioni (verbale, simbolica, tabulare, grafica). Le attività sono riprese e adattate dal progetto ArAl (Cusi, Malara & Navarra, 2011) e dal progetto The Mathematics Assessment Program (http://map.mathshell.org).

Per ogni attività sono state elaborate diverse tipologie di schede di lavoro da inviare ai tablet degli studenti o proiettare sulla LIM (o tramite video-proiettore). Le schede di lavoro possono essere distinte in tre categorie (Cusi, Morselli & Sabena, 2017):

1. schede che propongono un problema da risolvere o pongono una o più domande di contenuto matematico (*schede problema*);
2. schede finalizzate a fornire un supporto specifico a studenti che incontrano difficoltà con le schede di tipo 1), contenenti suggerimenti come, per esempio, domande-guida (*schede di aiuto*);
3. schede che propongono un sondaggio con diverse opzioni di risposta (*schede son-*

daggio).

Qui di seguito si descrive una tipica lezione, caratterizzata dall'alternarsi di schede di lavoro diverse.

La lezione inizia con il lavoro di gruppo su una *scheda problema* inviata ai tablet. Gli studenti lavorano in gruppo, scrivono la risposta (argomentata) al tablet e la inviano al computer del docente mediante il dispositivo di classe connessa. I gruppi in difficoltà hanno la possibilità di chiedere l'invio di una *scheda di aiuto*, oppure è l'insegnante, che monitora costantemente il lavoro dei gruppi, a decidere di inviarla.

Dopo aver raccolto ed esaminato le risposte dei gruppi, l'insegnante lancia una discussione di bilancio (Bartolini Bussi, 1998), che solitamente prende il via dall'analisi di una selezione di risposte dei gruppi (i testi scritti sono proiettati a tutta la classe). Durante la discussione le risposte sono analizzate a livello di consegna (sono prese in esame sia risposte corrette che errori tipici, con riferimento al criterio di correttezza), a livello di svolgimento della consegna (sono discussi i modi più efficaci di soddisfare le richieste del compito assegnato) e a livello comunicativo (sono confrontate diverse modalità di comunicazione del risultato e della spiegazione, con riferimento ai criteri di chiarezza e completezza). In particolare, l'insegnante promuove il confronto tra diverse soluzioni selezionate.

Durante la lezione l'insegnante può anche utilizzare le *schede sondaggio* per promuovere una discussione di classe, soprattutto nel caso in cui alcuni aspetti richiedano un ulteriore approfondimento. È anche possibile creare sondaggi istantanei per verificare il grado di comprensione degli studenti, oppure la loro consapevolezza di ciò che è stato fatto durante l'attività, o ancora il loro atteggiamento nei confronti dell'attività stessa.

5. Focus e metodologia della ricerca

Diversi cicli di sperimentazione hanno permesso di mettere a punto e affinare sequenze di attività da svolgersi nel contesto della classe connessa. Le sperimentazioni sono state svolte con la costante presenza in classe di un ricercatore (una delle tre autrici), che ha avuto la funzione di osservatore partecipante. Lo studio si fonda sull'analisi delle riprese video delle discussioni di classe (per un totale di circa 400 ore di ripresa); dati aggiuntivi sono costituiti dalle note dell'osservatore e da interviste a studenti e insegnanti.

L'analisi dei dati raccolti ci ha consentito di mettere in luce il ruolo della tecnologia nel promuovere strategie di valutazione formativa, attivate tanto dall'insegnante quanto dai compagni e dallo studente stesso (Cusi, Morselli & Sabena, 2016).

Nel presente contributo l'attenzione si concentra sulla strategia di valutazione formativa C (Fornire feedback che consentano allo studente di migliorare). Nello specifico si possono formulare le seguenti domande di ricerca:

1. Quali strategie messe in atto dall'insegnante possono promuovere la strategia di valutazione formativa C?
2. Quale livello di feedback è fornito?

3. Quali sono gli effetti di tali strategie di feedback, in termini di attivazione di altre strategie di valutazione formativa?

6. Una classificazione delle strategie di feedback

L'analisi di numerosi episodi tratti dalle sperimentazioni in classe ci ha permesso di delineare una prima caratterizzazione delle *strategie di feedback* attivate dall'insegnante, che riportiamo nella tabella qui sotto. Le strategie di feedback individuate risultano ricorrenti nelle diverse classi coinvolte nelle sperimentazioni, trasversalmente rispetto al livello scolare.

Strategia di feedback	***Descrizione***
Ripetere	L'insegnante ripete un particolare intervento di uno studente in modo da focalizzare su di esso l'attenzione della classe. Spesso l'insegnante sottolinea anche, attraverso l'uso della voce, alcune parole chiave nelle frasi che ripete.
Riformulare	L'insegnante riformula l'intervento di uno studente con il duplice obiettivo di focalizzare l'attenzione della classe su di esso e di far sì che esso sia meglio chiarito ed esplicitato. L'insegnante attiva questa strategia quando ritiene che un intervento, che potrebbe rivelarsi utile nel corso della discussione, non risulti sufficientemente chiaro.
Riformulare con scaffolding	L'insegnante, oltre a riformulare l'intervento di un alunno, aggiunge elementi che possano supportare gli studenti nell'affrontare il problema in esame. Il termine "scaffolding" fa riferimento al lavoro di Wood, Bruner & Ross (1976).
Rilanciare	L'insegnante reagisce all'intervento di uno studente ponendo una domanda ad esso connessa. In questo modo, l'insegnante fornisce un feedback implicito sull'intervento dello studente, suggerendo che possa trattarsi di un'osservazione interessante, che richiede maggiore approfondimento, oppure evidenziandone gli aspetti problematici e mettendo in luce la necessità di correggerlo.
Confrontare	L'insegnante focalizza l'attenzione su due o più interventi che costituiscono posizioni contrastanti in riferimento a una stessa tematica oggetto della discussione.

7. Analisi di un esempio

In questo paragrafo illustriamo le strategie di feedback, integrate con l'analisi dei livelli di feedback (Hattie & Timperley, 2007) e delle strategie di valutazione formativa attivate (Wiliam & Thompson, 2007), attraverso brevi stralci di una discussione di classe.

Gli stralci provengono da una discussione svolta in una classe seconda di scuola secondaria di primo grado, nell'ambito di una sequenza di attività relative allo studio dei grafici distanza-tempo ("La camminata di Tommaso"[1], nostro adattamento di un'attività creata nell'ambito del Mathematics Assessment Program – http://map.mathshell.org). Tale sequenza, articolata in otto schede di lavoro per un totale di circa 20 ore di lezione, è preceduta da un'esperienza che prevede l'uso del sensore di movimento, un dispositivo che fornisce una rappresentazione grafica immediata del movimento di un soggetto lungo un percorso rettilineo. La discussione analizzata riguarda la scheda di lavoro 6 (Figura 1), che presenta un grafico distanza-tempo e richiede agli studenti di identificare, tra tre possibili storie (A, B, C), quella rappresentata nel grafico, e di fornire una giustificazione della scelta fatta.

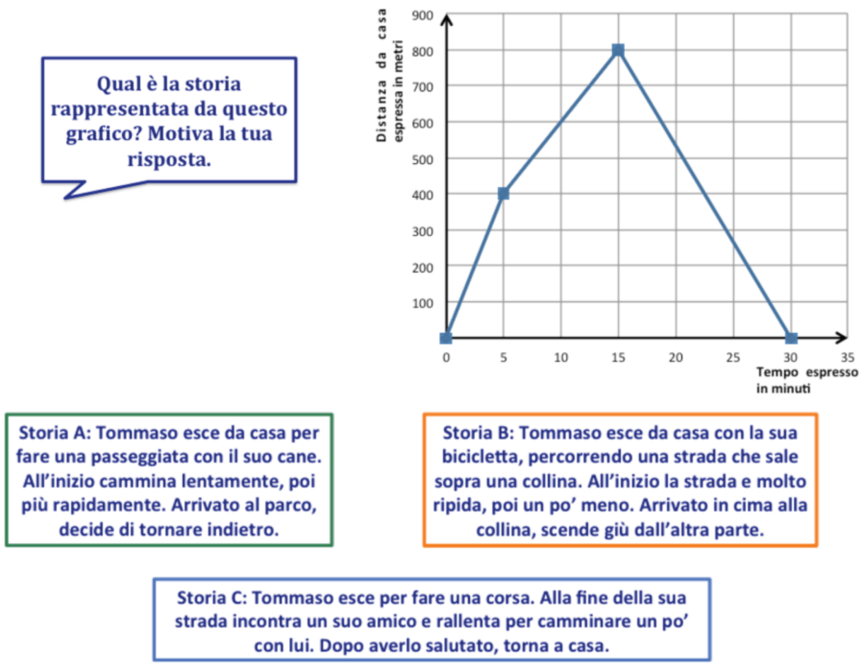


Figura 1 – La scheda di lavoro

La scelta dell'opzione B da parte degli studenti consente di rilevare il tipico errore che viene fatto nell'interpretazione di grafici distanza-tempo, ovvero quello di interpretare il grafico come il "disegno di una collina". Va però sottolineato che il fatto che si introduca una collina non costituisce la principale motivazione per la quale la storia B non è quella rappresentata dal grafico. Il motivo principale per cui la storia B va scartata risiede nel fatto che tale storia

[1] Una versione inglese delle schede e relative guide per gli insegnanti è presente alla pagina https://microsites.ncl.ac.uk/fasmedtoolkit/2016/10/06/time-distance-graphs-idm-tclass).

implica che la distanza dall'origine (la casa) aumenti nel tempo, mentre il terzo tratto del grafico rappresenta un ritorno verso l'origine.

Le storie A e C sono molto simili. La scelta della storia corretta (la C) da parte degli studenti richiede che essi concentrino l'attenzione sulla variazione di pendenza dal primo al secondo tratto del grafico, interpretando correttamente tale variazione in termini di diminuzione della velocità.

Va rilevato che la scheda di lavoro richiede anche la costruzione di una completa argomentazione a supporto della scelta fatta.

Gli studenti lavorano a coppie ed inviano al computer dell'insegnante i file contenenti le loro risposte quando ritengono di aver completato il lavoro. L'insegnante e il ricercatore leggono immediatamente le risposte inviate dagli studenti e selezionano e raggruppano alcune di esse per poterle condividere ed analizzare durante la discussione collettiva.

La discussione (attivata dall'insegnante, *strategia B*) comincia con la lettura della risposta fornita da Mil e Pon proiettata sulla LIM:

"Secondo noi la risposta è la B per due motivazioni:

1. *Non puoi fare 1600 metri a piedi in mezz'ora.*
2. *Il grafico rappresenta precisamente le informazioni date dalla storia.*

Quindi Tommaso sale sulla collina, il primo pezzo è in salita ripida, il secondo è sempre in salita, ma meno ripida. Quando arriva in cima, poi Tommaso scende e torna a casa."

Osserviamo che Mil e Pon forniscono due motivazioni alla base della loro scelta della storia B:

– La prima motivazione si basa sulla loro esperienza quotidiana, ossia un *argomento empirico*: gli studenti deducono, osservando il grafico, che Tommaso percorre complessivamente 800+800 metri e dichiarano che non è possibile percorrere a piedi una tale distanza in mezz'ora. Poiché è invece possibile percorrere 1600 metri in mezz'ora di camminata, si tratta di una motivazione non corretta.

– La seconda motivazione si basa su *un'interpretazione errata del grafico* come profilo di una collina sulla quale Tommaso sta camminando.

La discussione rappresenta un'occasione per fornire agli studenti un feedback su due livelli: feedback sul compito (mirato a chiarire che il grafico rappresenta la relazione tra la distanza da casa ed il tempo, e non un'immagine della collina) e feedback sullo svolgimento del compito (mirato a far notare che la motivazione da fornire deve basarsi su un'attenta analisi delle informazioni fornite dal testo e dal grafico). Ne riportiamo uno stralcio accompagnato dall'analisi delle strategie di feedback messe in atto dall'insegnante:

Trascrizione	Analisi
217. Insegnante: Quindi la risposta è la B per due motivi. Ok, Lollo?	L'insegnante incoraggia gli studenti della classe ad attivarsi come risorse gli uni per gli altri (*strategia D*), in particolare per Mil e Pon.
218. Lollo: Abbiamo fatto, perché quando abbiamo fatto la cosa col sensore…che se era più obliqua la…la riga, se era più obliqua, vuol dire che andava più veloce, non vuol dire che era più ripida la strada, perché se è più ripida vai più piano…	Lollo fa riferimento all'esperienza fatta con i sensori per fornire un primo *feedback sul compito* (*strategia C*), suggerendo un'interpretazione delle diverse pendenze dei tratti del grafico in termini di diverse velocità con le quali Tommaso si muove. In questo modo attiva se stesso come risorsa per Mil e Pon (strategia D). Inoltre Lollo fa riferimento all'esperienza quotidiana per contraddire l'interpretazione proposta da Mil e Pon, osservando che solitamente quando la pendenza aumenta si cammina di solito più lentamente, quindi la velocità tende a diminuire anziché ad aumentare.
219. Insegnante (*rivolgendosi a Rob, che ha alzato la mano*): Rob?	
220. Rob: Questo qua è un grafico, non è un disegno di una collina.	Rob esplicita il fatto che il grafico non rappresenta l'immagine di una collina, fornendo *feedback sul compito* (*strategia C*) a Mil e Pon e attivandosi, di conseguenza, come risorsa per i compagni (*strategia D*).
221. Insegnante: Non è un disegno di una collina, è un grafico … che rappresenta che cosa?	L'insegnante ripete l'intervento di Rob in modo da focalizzare su di esso l'attenzione della classe (*ripetere*) e in aggiunta pone una domanda ad esso connessa (*rilanciare*). Attraverso questa strategia, l'insegnante, implicitamente, legittima e valorizza l'intervento di Rob.
222. Rob: La…il percorso di un ragazzo, e poi comunque che ha detto che non è possibile fare 1600 metri a piedi in mezz'ora, però l'abbiamo detto l'altra volta, è un grafico, cioè non dev'essere per forza proprio reale …proprio attaccato alla realtà.	Rob fornisce un *feedback sullo svolgimento del compito*, osservando che la giustificazione non deve basarsi unicamente su motivazioni di tipo empirico, ma deve tener conto della struttura del grafico che modellizza la situazione data. La strategia di *rilanciare*, attivata dall'insegnante, si è rivelata perciò efficace nel trasformare il feedback sul compito, fornito da Rob nel suo precedente intervento, in un *feedback sullo svolgimento del compito*.
223. Ricercatrice: Mario, avete capito cosa sta dicendo?	
224. Mario: Secondo me ce la fai benissimo, ne fai anche due o tre di chilometri …	Mario focalizza l'attenzione sulla prima motivazione fornita da Mil e Pon, sottolineando che l'affermazione di tipo empirico, sulla quale la motivazione si basa, non è corretta. In questo modo fornisce ai compagni un ulteriore *feedback sul compito* (*strategia C*).
225. Rob: Secondo me, sì…	
226. Insegnante: Quindi il fatto di 1600m in mezz'ora, lì dice non puoi fare…il vostro compagno dice in realtà in mezz'ora si fanno 1600m, quindi quella non può essere una buona motivazione, altri invece dicevano la B, la motivazione B, cioè il fatto che effettivamente il grafico ci spiega che Tommaso sale sulla collina ecc…allora Lollo ha detto 'No, perché quando abbiamo fatto col sensore abbiamo visto che il grafico andava in linea obliqua, ma la strada che facevamo non era una collina, non era in salita.'	L'insegnante riassume gli interventi di Lollo, Mario e Rob, sottolineando che la motivazione 1, che Mil e Pon hanno fornito, non è corretta. Successivamente, sposta l'attenzione sulla giustificazione 2 e ribadisce quale deve essere la corretta interpretazione di segmenti obliqui in un grafico distanza-tempo. In questo modo, l'insegnante attiva la *strategia C*, perché fornisce a Mil e Pon sia un *feedback sul compito* (è un errore interpretare il grafico come l'immagine dei una collina) che un *feedback sullo svolgimento del compito* (focalizzando l'attenzione sulle corrette modalità attraverso le quali interpretare un grafico distanza-tempo). Questo intervento è caratterizzato da due strategie di feedback: il *riformulare* (l'insegnante riformula gli interventi di alcuni studenti in modo da renderli più chiari per i compagni) e il *ripetere* (l'insegnante ripete alcuni interventi, in modo da focalizzare l'attenzione su specifiche parti di tali interventi).
227. Ur: Prof, però io sono d'accordo con quello che ha detto Lollo, ho pensato: se	Ur fa riferimento alla prima osservazione di Lollo (linea 218) ed esplicita un suo dubbio, attivandosi come responsabile del proprio apprendimento (*strategia E*). Questo intervento con-

dici che è ripida, allora va più piano…invece dopo, quando diventa meno ripida, va più veloce.	ferma che durante la discussione Lollo si è attivato come risorsa per i compagni (*strategia D*).
228. Insegnante: Ecco, il fatto, però, quindi voi dite 'il fatto che sia più ripida o meno ripida la strada ci può dare la motivazione del perché va più veloce o meno veloce'. […]	L'insegnante fornisce un feedback a Ur, riformulando la sua affermazione, in modo che altri studenti possano intervenire per commentarla. Questo è un altro esempio di *riformulare*.
233. Mark: Prof, poi noi col sensore avevamo detto che se andava più veloce il…il segmento tendeva ad andare verso il verticale, qui però se…dicono che è in salita e poi in salita va troppo…va veloce, e poi quando inizia più…a pianeggiare va meno veloce…non so, in discesa va molto più veloce che nei due tratti, però se dicono che va in salita nel primo tratto va veloce e poi quando inizia a pianeggiare va meno veloce.	Mark fa riferimento all'esperienza con i sensori (che ha consentito agli allievi di mettere in relazione l'inclinazione del grafico con la velocità), evidenziando cosa non funziona nella risposta di Mil e Pon: nella loro interpretazione del grafico come immagine, il primo tratto rappresenta la parte più ripida della collina; l'interpretazione della pendenza del grafico in termini di velocità, invece, evidenzia che il primo tratto di grafico corrisponde all'intervallo di tempo in cui la velocità risulta maggiore. Mark ritiene che queste due interpretazioni siano contrastanti perché l'esperienza quotidiana porta ad osservare che è improbabile che nei tratti più ripidi di un percorso la velocità sia maggiore che nei restanti tratti. Questo intervento di Mark, che evidenzia l'attivazione, da parte sua, della *strategia E*, può anche rappresentare un feedback per Mil e Pon (*strategie C e D*).
234. Insegnante: Però io…questa risposta dice proprio come se il mio primo segmento, i primi due pezzi di segmento, che vanno in su, descrivessero proprio la collina, salita ripida, salita meno ripida e poi in cima e poi c'è la discesa…	L'insegnante riporta l'attenzione su quanto scritto da Mil e Pon, con l'obiettivo di mettere a confronto la loro risposta con le osservazioni di Mark. Indichiamo questa strategia con il termine *confrontare*: favorendo l'esplicitazione degli elementi che differenziano le due affermazioni, è possibile fornire un feedback implicito a Mil e Pon (*strategia C*), rendendo Mark una risorsa per i compagni (*strategia D*).
235. Alice: È sbagliato.	Questo intervento conferma che la strategia del *confrontare*, attivata dall'insegnante, è risultata efficace nel favorire un confronto tra le diverse posizioni espresse da Mark e da Mil e Pon.
236. Insegnante: Quindi il discorso che i segmenti, come diceva il vostro compagno, lui ha detto (*riferita a Rob*) 'un conto è il grafico, un conto è il disegno di una collina', oppure Lollo diceva 'quando l'abbiamo fatto con i sensori noi vedevamo dei segmenti così, ma in realtà non stavamo andando in salita, significava che stavamo cambiando la velocità', ricordandoci sempre che sull'asse delle y che cosa mi descrive, che cosa c'è scritto, che cosa c'è sull'asse delle y? Qui non c'è scritto che cosa c'è sull'asse delle y, mentre nel grafico c'è scritto, la distanza da casa espressa in metri.	L'insegnante interviene attivando una strategia che si situa nell'ambito del *riformulare*: riformula e riassume gli interventi degli studenti, in modo da fornire un feedback a Mil e Pon (*strategia C*). In questo modo, il *feedback sul compito*, fornito inizialmente agli allievi, diventa *feedback sullo svolgimento del compito* (sottolinea quale debba essere un uso efficace dello strumento matematico a disposizione, il grafico, focalizzando l'attenzione sulle variabili rappresentate sui due assi). Indichiamo la strategia come *riformulare con scaffolding* perché l'insegnante, oltre a riformulare gli interventi di alcuni alunni, fornisce ulteriori elementi che possano supportare una corretta interpretazione del grafico.

8. Conclusioni

Nell'ambito del progetto FaSMEd, abbiamo svolto diverse sperimentazioni in classi dalla quarta primaria alla terza secondaria di primo grado, caratterizzate dall'implementazione di attività progettate con l'obiettivo di attivare strategie di valutazione formativa (Wiliam & Thompson, 2007) attraverso l'uso di una tecnologia di classe connessa. Una prima analisi dei dati raccolti ci ha consentito di evidenziare le modalità attraverso le quali l'uso di tale tecnologia favorisca l'attivazione di strategie di valutazione formativa (Cusi, Morselli & Sabena, 2016, 2017). In questo articolo abbiamo focalizzato l'attenzione sulla *strategia C,* che consiste nel *fornire feedback che consentano allo studente di migliorare* e abbiamo analizzato le diverse modalità con cui gli insegnanti possano intenzionalmente fornire feedback agli allievi durante le discussioni di classe e le possibili connessioni tra feedback forniti e strategie di valutazione formativa che vengono attivate.

Attraverso l'analisi di numerose discussioni di classe condotte durante le sperimentazioni abbiamo identificato alcune *strategie di feedback*, ossia strategie che l'insegnante può attivare con l'obiettivo di fornire feedback agli studenti: *ripetere, riformulare, riformulare con scaffolding, rilanciare, confrontare*. Abbiamo esemplificato queste strategie attraverso l'analisi di una discussione condotta in una classe seconda di una scuola secondaria di primo grado.

Dalle nostre analisi emerge che le strategie di feedback evidenziate, oltre a rivelarsi efficaci modalità attraverso le quali promuovere le discussioni di classe, rappresentano strumenti potenti per l'attivazione di diverse strategie di valutazione formativa. Infatti, quando focalizza l'attenzione sull'intervento di uno studente, l'insegnante fornisce un feedback implicito su tale intervento (*strategia C*), suggerendo che debba essere analizzato in maniera più dettagliata. Inoltre, l'analisi ci ha consentito di mettere in luce che, in questo modo, vengono attivate le *strategie D* ed *E.* Ad esempio, sia la strategia di *ripetere* che quella di *riformulare* (*riformulare* e *riformulare con scaffolding*) supportano l'attivazione della *strategia D* poiché rendono gli autori delle affermazioni che vengono ripetute o riformulate risorse per i compagni. Anche la strategia del *confrontare*, che ha l'obiettivo di favorire il confronto tra diversi interventi ed evidenziare gli aspetti che li differenziano, favorisce l'attivazione delle *strategie di valutazione formativa D* ed *E* perché consente agli autori di tali interventi di diventare responsabili del proprio apprendimento e risorse per i compagni.

Abbiamo inoltre osservato come le strategie di *ripetere* e di *riformulare* supportino l'evoluzione del feedback che viene fornito. Nello stralcio analizzato, per esempio, un feedback sul *compito* diventa feedback sullo *svolgimento del compito* nel corso della discussione.

L'analisi condotta ci ha consentito inoltre di focalizzare l'attenzione sul contenuto dei feedback stessi, in relazione alle caratteristiche specifiche delle attività matematiche proposte in classe. Questo ci ha permesso di evidenziare possibili sottolivelli di feedback, da inquadrare nell'ambito dei quattro livelli individuati da Hattie e Timperley (2007). Nello stralcio analizzato possiamo per esempio evidenziare il *sottolivello di feedback relativo allo svolgimento del compito* alcuni interventi, infatti, consentono di evidenziare un *focus su come gli strumenti matematici a disposizione* (nel caso dell'esempio, i grafici) possono essere utilizzati correttamente per supportare il proprio ragionamento (si veda, ad esempio, l'intervento 218). Un altro sottolivello in relazione al *feedback sullo svolgimento del compito* riguarda il *feedback sulle caratteristiche delle risposte*. Questo tipo di feedback viene fornito quando ad esempio, come nei percorsi che abbiamo progettato, la domanda presente sulle schede problema richiede anche di *motivare la risposta fornita*. Il feedback sul compito di motivare correttamente una risposta consente, infatti, di focalizzare l'attenzione degli studenti su quelle che devono essere le *caratteristiche di un'argomentazione matematica* (si vedano i criteri di correttezza, chiarezza, completezza), nell'ottica di promuovere le loro competenze in tale direzione.

L'analisi di altri stralci di discussione ci ha consentito anche di distinguere sottolivelli di feedback all'interno della categoria dei *feedback sull'autoregolazione*. Un primo sottolivello che abbiamo evidenziato è costituito dai *feedback sul riconoscimento del supporto fornito da uno strumento e sulla "generalizzabilità" di tale supporto*. Si tratta di feedback che consentono agli studenti di riflettere sulle modalità di uso degli strumenti matematici o sulle strategie di pensiero che possono essere attivate in futuro. Questi feedback consentono agli allievi di costruire un bagaglio di conoscenze, strategie per affrontare problemi, modalità di interpretare un testo o una rappresentazione, dal quale potranno attingere quando si troveranno ad affrontare altri problemi. Un altro sottolivello relativo a questa categoria è rappresentato dai *feedback sulle modalità individuali di porsi di fronte a un compito*. La riflessione durante le discussioni di classe può, infatti, consentire agli allievi di analizzare il proprio modo di affrontare i problemi, identificando, in questo modo, sia i punti di forza che le problematiche connesse al proprio approccio.

L'identificazione delle categorie di strategie di feedback e dei diversi sottolivelli di feedback connessi al particolare contenuto matematico in esame consente di mettere in luce il ruolo cruciale svolto dall'insegnante nel supportare i processi di valutazione formativa nell'ambito di discussioni di classe. Tutte le strategie che abbiamo documentato sono attivate in maniera *intenzionale* dal docente. Va osservato che, visto che il feedback viene spesso fornito in modo implicito, non sempre viene colto dagli studenti.

In riferimento agli effetti dei feedback, l'analisi ci ha consentito di evidenziare e discutere soltanto alcuni di essi, precisamente quelli che vengono messi in luce quando uno studente fa riferimento esplicito ad interventi precedenti o modifica una sua idea immediatamente dopo aver ascoltato l'intervento di un suo compagno o dell'insegnante. Ulteriori indagini con diversi strumenti di osservazione potranno permettere di individuare altri effetti dei feedback, meno visibili durante le discussioni di classe.

9. Bibliografia

Aldon, G., Cusi, A., Morselli, F., Panero, M., & Sabena, C. (2017). Formative assessment and technology: reflections developed through the collaboration between teachers and researchers In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini & U. Gellert. *Mathematics and technology: A CIEAEM source book* (pp. 551-578). Advances in Mathematics Education. Springer.

Arzarello, F., & Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian trends in research in mathematics education: a national case study in the international perspective. In J. Kilpatrick, & A. Sierpinska, (Eds.). *Mathematics education as a research domain: a search for identity*. Kluwer Academic Publishers, 197-212.

Assessment Reform Group (1999). Assessment for Learning: Beyond the Black Box. School of Education, University of Cambridge, http://www.nuffieldfoundation.org/assessment-reform-group.

Azmon, S., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2011). The impact of teacher-led discussions on students' subsequent argumentative writing. In B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of PME 35*, 2, 73–80.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.). *Language and communication in mathematics classroom* (pp. 65–84). Reston, VA: NCTM.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.

Boero, P., (Ed.) (2007). *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam: Sense publishers.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of PME 20*, 2, 121-128.

Castoldi, M. (2012). *Valutare a scuola*. Roma: Carocci.

Collins, A., Brown, J.S., & Newman, S.E. (1989). Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing and Mathematics! In L.B. Resnick (Ed.). *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cusi, A., Malara, N.A., & Navarra, G. (2011). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it. In J. Cai, & E.J. Knuth (Eds.). *Early Algebraization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives* (pp. 483-510). Berlin Heidelberg: Springer.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2016). Enhancing formative assessment strategies in mathematics through classroom connected technology. In C. Csíkos, A. Rausch & J. Szitányi (Eds.). *Proceedings of PME 40*, vol. 2 (pp. 195-202). Szeged, Hungary: PME.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. *ZDM Mathematics Education*, Vol. 49(5), 755-767.

DBRC – The Design Based Research Collective (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8.

De Luca, M., Demartini, L., Migliano, P., Savioli, K., Serratore, E., Vio, E. (Eds.) (2008). *Argomentare: un "laboratorio" per le competenze*. AVIMES-VALMAT.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Re-*

search, 77(1), 81-112.

Irving, K. I. (2006). The impact of educational technology on student achievement: assessment of and for learning. *Science Educator*, 15(1), 13-20.

Levenson, E. & Barkai, R. (2013). Exploring The Functions Of Explanations In Mathematical Activities For Children Ages 3-8 Year Old: The Case Of The Israeli Curriculum. *Proceedings of CERME 8*, scaricabile online: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG13/WG13_Levenson.pdf.

MIUR (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione*, Numero Speciale. Le Monnier.

Quellmalz, E. S., Timms, M. J., Buckley, B. C., Davenport, J., Loveland, M., & Silberglitt, M. D. (2012). 21st century dynamic assessment. In J. Clarke-Midura, M. Mayrath, & C. Dede (Eds.). *Technology-based assessments for 21st century skills: Theoretical and practical implications from modern research* (pp. 55-89). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Radford, L. & Demers, S. (2006). *Comunicazione e apprendimento. Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. Bologna: Pitagora Editrice. (Ed originale: Radford, L. & Demers, S., *Communication et Apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*).

Robutti, O. (2010). Graphic calculators and connectivity software to be a community of mathematics practitioners. *ZDM Mathematics Education*, 42, 77-89.

Roschelle, J., Penuel, W. R., & Abrahamson, L. (2004). The networked classroom. *Educational Leadership*, 61(5), 50-54.

Roschelle, J., & Pea, R. (2002). A walk on the WILD side. How wireless handhelds may change computer-supported collaborative learning. *International Journal of Cognition and Technology*, 1(1), 145-168.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315-351). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Wiliam, D., & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Ed.). *The future of assessment: Shaping teaching and learning* (pp. 53–82). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Child Psychiatry*, 17, 89-100.

Received October 10, 2017
Revision received November 17, 2017/November 29, 2017
Accepted December 30, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 108-126 – ISSN 2038-1034

Didattica laboratoriale e costruzione di competenze nell’insegnamento/apprendimento della Matematica

Maria Polo

Abstract – *The discussion on Laboratory Didactics, as a “new” teaching methodology, has developed in Italy since the early 2000s, just as the Démarche d’Investigation and the Inquiry Based Science Education have become a benchmark for the teaching of scientific disciplines in many countries throughout the world. The role of the laboratory in the scientific setting as well as in education and training goes even further back, and has felt the effects of the epistemological debate on scientific method since the beginning of the 1900s. In recent years, laboratory practices have been institutionally present in the ministerial guidelines for the entire pre-university education cycle, and not just for mathematics and scientific disciplines. In this paper, we draw attention to the fact that, on the one hand, the results of pedagogical, psychological and didactic research contribute to the pertinence of such methodological guidelines, but, at the same time, are difficult to put into practice at all levels of school education. Through a case study on problem solving activities in mathematics, we examine how a “laboratory climate” can contribute to building mathematical skills, and discuss the rigidity of the school system with respect to change and innovation of habitual practices.*

Riassunto – *Il dibattito sulla Didattica laboratoriale come “nuovo” metodo di insegnamento si è sviluppato in Italia a partire dai primi anni duemila, così come la Démarche d’Investigation e l’Inquiry Based Science Education, diventano una raccomandazione per l’insegnamento delle discipline scientifiche in molti Paesi a livello mondiale. Il tema del laboratorio in ambito scientifico e del suo ruolo nell’educazione e nella formazione risale a ben prima e risente, per la matematica in particolare, del dibattito di natura epistemologica sul metodo scientifico degli inizi del 1900. Negli ultimi anni, le pratiche laboratoriali sono Istituzionalmente presenti nelle Indicazioni ministeriali di tutto il ciclo dell’istruzione preuniversitaria, e non solo per la matematica e le discipline scientifiche. In questo lavoro, poniamo l’attenzione sulla considerazione di quanto i risultati delle ricerche in ambito pedagogico, psicologico e didattico da un lato contribuiscano a fondare la pertinenza di tali suggerimenti metodologici, ma contemporaneamente ne riscontrino la difficoltà della diffusione nelle pratiche quotidiane a tutti i livelli scolastici. Attraverso uno studio di caso su attività di problem solving in ambito matematico, esaminiamo come un “clima di laboratorio” possa concorrere alla costruzione di competenze matematiche e discutiamo della rigidità del sistema scolastico rispetto al cambiamento e all’innovazione delle pratiche abituali.*

Keywords – mathematics, laboratory, practices, skills, teaching-learning

Parole chiave – matematica, didattica laboratoriale, competenze, insegnamento/apprendimento

Maria Polo è Professore Associato nel settore disciplinare MAT/04, in servizio presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell’Università degli Studi di Cagliari. Insegna *Storia della Matematica* per la Laurea Magistrale in Matematica e *Matematica e statistica* per la Laurea in Scienze Geologiche. Ha tenuto gli insegnamenti di *Didattica della Matematica* e di *Laboratorio di didattica della matematica* nella SSIS, nei TFA e nei PAS dell’Università di Cagliari. Dal 2001 affronta questioni riguardanti la problematica dell’influenza dell’epistemologia dell’insegnante sulla pratica didattica. Ha analizzato questioni riguardanti la validazione e l’elaborazione di concetti del paradigma teorico della Didattica della matematica; ha studiato possibili modalità di trasposizione dei risultati delle ricerche in attività di formazione continua e iniziale degli insegnanti.

1. Introduzione

Il dibattito sulla Didattica laboratoriale come "nuova" metodologia di insegnamento si è sviluppato in Italia a partire dai primi anni duemila, così come negli stessi anni la *Démarche d'Investigation* e l'*Inquiry Based Science Education*[1], diventano una raccomandazione per l'insegnamento delle discipline scientifiche e della tecnologia in molti Paesi a livello mondiale.

La ricerca in Didattica della Matematica degli ultimi vent'anni ha sempre proceduto secondo una dialettica stretta tra la ricerca di base, sia teorica che sperimentale, e la pratica didattica. Si possono identificare alcune principali componenti delle ricerche in Didattica della Matematica alle quali la comunità[2] dei ricercatori italiani ha dato un contributo riconosciuto a livello internazionale: una componente epistemologica o di analisi del contenuto (ricerche basate sulla organizzazione concettuale della disciplina); una componente sperimentale (l'azione per una concreta innovazione nella classe), una componente cognitiva (l'analisi dei processi individuali e collettivi, come osservazione e modellizzazione di processi di laboratorio) e una componente didattica (l'analisi dell'interazione e del ruolo dell'insegnante). L'interazione tra le componenti e la partecipazione attiva degli insegnanti/sperimentatori costituiscono la peculiarità e l'originalità di tali ricerche italiane. Il nostro contributo si inserisce in questo contesto di studi, e affronta il tema della Didattica laboratoriale per analizzare le condizioni della sua integrazione nelle pratiche di insegnamento in uso. Affrontiamo quindi il tema della Didattica laboratoriale, risalendo alle origini del ruolo del laboratorio in ambito scientifico ed esaminando la collocazione del laboratorio nelle attuali indicazioni nazionali a livello pre-universitario: cerchiamo di delineare in che modo i risultati delle ricerche in ambito pedagogico, psicologico e didattico contribuiscono a fondare tali suggerimenti metodologici, ma ne evidenziano anche la difficoltà della diffusione nelle pratiche quotidiane a tutti i livelli scolastici.

2. Il laboratorio in ambito scientifico e la didattica laboratoriale

Il dibattito sul tema del laboratorio in ambito scientifico e del suo ruolo nell'educazione e nella formazione risale a fine ottocento e risente, per la matematica in particolare, del dibattito di natura epistemologica sul metodo scientifico e sui fondamenti della Matematica degli inizi del 1900[3]. I primi 30 anni del '900 sono per la matematica anni di crisi dei fondamenti, nei quali cambia il suo stesso statuto epistemologico. La matematica non è più la scienza del "vero" che ha la sua validazione nella verosimiglianza con la realtà fisica. Le matematiche, consistenti e "valide", sono diverse in relazione a diversi paradigmi o sistemi assiomatici di riferimento[4]. Il loro rapporto con la realtà fisica cambia : lo studio delle strutture in matematica, an-

[1] Per un survey sull'implementazione al livello internazionale e una riflessione sulle pratiche di IBSE si vedano: Maass, Artigue *et. al.*, 2013; Schoenfeld, Kilpatrick, 2013; Calmette, Matheron, 2015; Ouvrier-Buffet, 2016.

[2] Cfr. Bartolini Bussi, 2001.

[3] Cfr. Giacardi, 2011 ripreso in Giacardi, 2016; De Bartolomeis, 1978. Per un approfondimento sul dibattito di natura epistemologica che qui non affrontiamo si veda Speranza, 1999.

[4] Si veda l'esempio delle Geometrie non euclidee in Kline, 1976, pp. 378-397.

che quelle più astratte, rivoluziona la matematica anche negli aspetti di modellizzazione (come descrizione, controllo o previsione) e interpretazione dei fenomeni di natura non solo fisica ma anche sociale e tecnologica.

Il laboratorio è connaturato e costitutivo dei contesti in cui vivono le discipline scientifiche. Sia che ci riferisca al “luogo” di lavoro dello scienziato, sia che ci si riferisca al luogo attrezzato della scuola dove si “riproducono” gli esperimenti. Il laboratorio è nell’immaginario collettivo il luogo dove si scoprono o si insegnano i saperi e le discipline scientifiche.

Fino a metà degli anni ’70, nel “laboratorio” il professore e il tecnico (ad esempio di fisica o di chimica...) del liceo scientifico o dell’università “mostravano” gli strumenti e gli esperimenti agli studenti. Ma l’idea di laboratorio come contesto in cui si realizza una attività concreta, pratica e attiva, è analizzata da matematici nel dibattito già acceso di fine ottocento sul ruolo del laboratorio. In un lavoro di analisi di tale dibattito, Giacardi osserva come l’idea “di offrire agli allievi spazi dove poter esplicare un’attività spontanea e costruttiva, coltivare la propria individualità e socializzare” (Giacardi, 2011, p. 3) fosse anche tra i temi del dibattito dei pedagogisti di inizio Novecento[5]. Dal confronto di diversi modelli di laboratorio di matematica l’autrice fa emergere nel dettaglio la posizione, ancora attuale, di Giovanni Vailati (1863-1909) sulla “scuola laboratorio”.

> La caratterizzazione che Vailati dà della scuola-laboratorio [… ha] un significato più ampio sia del laboratorio di falegnameria di Borel, sia della *practical mathematics* di Perry basata sul *problem solving*, ma molto concentrata sulle procedure, sia dell*a boratory method* proposto da Moore, caratterizzato soprattutto da aspetti “computazionali, grafici o sperimentali”, sia ancora del semplice uso di modelli e macchine matematiche suggeritoda Klein. È, come Vailati auspicava, una metodologia basata su *problem solving,* congetture e argomentazioni, ma il cui fine ultimo è quello di pervenire alla costruzione di significati e a una sistemazione teorica della matematica (Giacardi 2011, pp. 11-12).

Cercare di enucleare gli aspetti significativi dei legami tra laboratorio e metodologia didattica, quale oggi si intende la “Didattica laboratoriale” è una impresa complessa. La affrontiamo qui con lo spirito e condividendo la posizione del pedagogista De Bartolomeis che già nel 1978 espone, dopo la sua “antipedagogia”, la propria posizione sul ruolo di quello che lui stesso chiama “il sistema dei laboratori”. La monografia di De Bartolomeis dal titolo *Sistema dei laboratori. Per una scuola nuova necessaria e possibile*, pur datata dal punto di vista lessicale e di contesto socio-politico e culturale in cui nasce, mantiene una bruciante attualità per quanto riguarda la complessità dei temi trattati nell’affrontare la questione dei laboratori e sopratutto per le tante questioni non risolte e ancora al centro del dibattito odierno sulla “Didattica laboratoriale”.

> Isolare un tema significa mancare degli elementi essenziali per capirci qualcosa : bisogna metterlo in rapporto con altri temi, dargli uno spazio fisico/sociale, sottolineare l’importanza di fatti che sembrano trascurabili, vedere i problemi scolastici nel quadro dei problemi economici e politici. È indispensabile pendere in considerazione un complesso gioco di influenze. […] Come posso sperare di comunicare con brevi spiegazioni il senso di un lavoro

[5] Il riferimento al pensiero di Dewey è alla base di tutto il movimento che in Educazione assegna un ruolo fondamentale alla scuola come laboratorio, cfr. Pezzano T., 2013

che ha bisogno di essere attentamente osservato da vicino, anzi di essere praticato? […] E così sono portato, dalla logica stessa di un inquadramento non dottrinale di problemi particolari, a esporre in varie occasioni le ragioni della sperimentazione dei laboratori non solo per l'aggiornamento degli insegnanti ma anche per un rinnovamento delle pratiche educative (De Bartolomeis, 1978, pp. 11-12).

Le ragioni della sperimentazione dei laboratori per un rinnovamento delle pratiche educative nel pensiero di De Bartolomeis non sono certamente legate in modo esclusivo ad un cambiamento di metodo o di metodologia di insegnamento. Il "sistema dei laboratori" da lui ideato e sperimentato nei primi anni '70, preconizza una idea di scuola aperta, attiva e legata al tessuto socio economico del territorio.

Per compenetrare appieno il suo pensiero, è necessario prendere in considerazione il termine metodologia nell'accezione di "complesso dei principi di metodo su cui è fondata o dai quali risulta legittimata una scienza o disciplina" in opposizione all'accezione di "impiego coerente e rigoroso di un determinato metodo". Nell'attribuire al termine metodologia il qualificativo didattica (o di insegnamento) bisogna infatti sgombrare il campo dagli equivoci di interpretazione rigida e ristretta che spesso in ambito scolastico si tende ad assegnare quando si considera la Didattica laboratoriale come "metodo" di insegnamento. Una tale accezione ristretta conduce a cadere nell'illusione che l'applicazione di un metodo sia risolutiva delle problematiche dell'apprendimento e dell'insegnamento della matematica (e non solo), spesso alimentata da sapienti e autorevoli campagne di sostegno che si diffondono, soprattutto a livello del primo ciclo di istruzione.

Viviamo un fermento dal punto di vista delle indicazioni didattiche che, come ricaduta dei risultati delle ricerche di ambito pedagogico, psicologico e didattico, investono gli insegnanti con suggerimenti di nuove metodologie didattiche[6] alle quali attingere per la progettazione del curricolo o nella gestione delle attività. La Didattica laboratoriale potrebbe giustapporsi alle altre "nuove" metodologie e alla guisa di queste rimanere un intento nella progettazione del curricolo se non si acquisiscono conoscenze ed evidenze di risultati di ricerche sul perché, come e quando nell'innovazione delle pratiche abituali[7] di debba o si possa attuare una Didattica laboratoriale.

Con questo intento analizziamo alcuni aspetti che mettono in relazione Didattica laboratoriale e costruzione di competenze, due punti sensibili e di grande attualità nel sistema scolastico italiano a tutti livelli, fino all'Università.

[6] Se si digita "didattica laboratoriale" su uno dei principali motori di ricerca appare il dato "circa 296.000 risultati in 0,47 secondi". Senza criteri di selezione, o un obiettivo a priori che guidi la ricerca, risulta complessa anche la sola consultazione di documenti dei siti istituzionali o individuali che forniscono risorse per l'insegnante. Cfr. il sito seguente, uno dei primi a comparire: https://it.pearson.com/aree-disciplinari/italiano/didattica-inclusiva/didattica-laboratoriale-esempi-modelli.html

[7] Per alcuni aspetti di riflessione sull'innovazione delle pratiche abituali in relazione a conoscenze scientifiche Cfr. Lai, Polo, 2012. Per alcuni approfondimenti sulle conoscenze degli insegnanti, cfr. Polo, 2017.

3. Didattica laboratoriale e costruzione di competenze

Negli ultimi anni, le pratiche laboratoriali sono presenti anche nelle Indicazioni ministeriali di tutto il ciclo dell'istruzione preuniversitaria e non solo per la matematica[8] e le discipline scientifiche. La visione epistemologica di una matematica e del suo insegnamento per problemi, o di laboratorio, non ha carattere innovativo per la scuola, se si considerano gli intenti e le indicazioni a livello istituzionale. Già i programmi dell'85 della scuola elementare assegnavano particolare rilevanza alla logica, all'informatica, al risolvere problemi[9].

Fin dal 2001 una commissione dell'UMI (Unione Matematica Italiana) aveva messo in evidenza che la formazione del curriculum scolastico "non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica" e nel curriculum delineato nel 2003 precisava che

le indicazioni relative al laboratorio di matematica sono particolarmente significative non solo per l'interazione con gli strumenti, ma soprattutto per l'impianto metodologico. Tale impianto si dovrebbe basare su quello che viene chiamato apprendistato cognitivo. L'apprendistato cognitivo coinvolge abilità e processi sia cognitivi sia metacognitivi: l'esperto modella e struttura l'attività del principiante, che osserva l'esperto e confronta e valuta il suo operato rispetto alle proprie attività intellettuali. È un metodo variegato e flessibile che si contrappone all'apprendistato pratico che, invece, si identifica con uno specifico metodo di apprendimento basato esclusivamente sull'osservazione dell'attività dell'esperto, sulla strutturazione graduale e crescente delle abilità e, soprattutto, su una particolare attenzione all'acquisizione di abilità di carattere pratico. L'apprendistato diventa cognitivo in quanto riesce a bilanciare la dialettica tra l'azione strutturatrice e facilitatrice dell'intervento dell'esperto e la sfida che un problema da risolvere rappresenta per il principiante, che non si limita a riprodurre i comportamenti dell'esperto ma diviene consapevole dei motivi che portano l'esperto a scegliere certe strategie e non certe altre. […] L'apprendistato cognitivo richiede la costruzione di un ambiente di apprendimento aperto alla discussione, alla condivisione del sapere, che favorisca la produzione personale, ma anche l'osservazione ragionata dell'esperto al lavoro; un ambiente che potremmo chiamare "bottega della matematica" (Materiali UMI-CIIM, Matematica 2003, p. 38).

Le più recenti ricerche assegnano un ruolo cruciale a componenti non solo cognitive ma anche sociali e emozionali nell'apprendimento della matematica[10]. Il laboratorio come contesto di apprendimento si configurerebbe quindi pertinente per favorire l'esplorazione e la scoperta, la formulazione di congetture e la ricerca di strategie adeguate ai problemi posti e alla ricerca delle soluzioni, per incoraggiare l'apprendimento collaborativo e promuovere la consa-

[8] Per una sintesi sulla didattica per competenze di veda Da Re, 2013.

[9] Ancora particolarmente attuale il testo seguente che riporta l'estratto dei programmi del 1985 (D.P.R. 12 febbraio 1985, n. 104) al paragrafo PROBLEMI: "Il pensiero matematico è caratterizzato dall'attività di risoluzione di problemi e ciò è in sintonia con la propensione del fanciullo a porre domande e a cercare risposte. Di conseguenza le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscono da esperienze reali del fanciullo e che offrano anche l'opportunità di accertare quali apprendimenti matematici egli ha in precedenza realizzato, quali strumenti e quali strategie risolutive utilizza e quali sono le difficoltà che incontra. Occorre evitare, peraltro, di procedere in modo episodico e non ordinato e tendere invece ad una progressiva organizzazione delle conoscenze".

[10] Cfr. Hannula, Evans, Philippou, Zan, 2004 e Radford, 2006.

pevolezza del proprio modo di apprendere. Anche le ultime Indicazioni Nazionali del I ciclo dell'istruzione del 2012 alla voce "ambienti di apprendimento" sollecitano a

Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che si fa. Il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interni alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento (p. 25).

E per i diversi ambiti disciplinari nelle stesse Indicazioni si legge:

[…] In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive (p. 45).

[…] Scienze. […] Le esperienze concrete potranno essere realizzate in aula o in spazi adatti: laboratorio scolastico, ma anche spazi naturali o ambienti raggiungibili facilmente. È importante disporre di tempi e modalità di lavoro che consentano, in modo non superficiale o affrettato, la produzione di idee originali da parte dei ragazzi, anche a costo di fare delle scelte sui livelli di approfondimento e limitarsi alla trattazione di temi rilevanti. La valorizzazione del pensiero spontaneo dei ragazzi consentirà di costruire nel tempo le prime formalizzazioni in modo convincente per ciascun alunno. La gradualità e non dogmaticità dell'insegnamento favorirà negli alunni la fiducia nelle loro possibilità di capire sempre quello che si studia, con i propri mezzi e al proprio livello (p. 54).

[…] Tecnologia […] Il laboratorio, inteso soprattutto come modalità per accostarsi in modo attivo e operativo a situazioni o fenomeni oggetto di studio, rappresenta il riferimento costante per la didattica della tecnologia; esso combina la progettazione e la realizzazione di semplici prodotti originali con la modifica migliorativa, nel senso dell'efficacia o dell'efficienza, di quelli già esistenti (p. 66).

Non ci addentriamo nel considerare la variabile del ruolo delle ICT e degli strumenti tecnologici nella progettazione e nella gestione di attività laboratoriali, sottolineato da numerosi studiosi. Già nel testo del '78 De Bartolomeis chiariva il ruolo delle tecnologie, ben prima quindi che le ICT facessero comparsa nella scuola con irruenza come negli ultimi 10 anni:

L'uso generico, avventato e indiscriminato del termine [laboratori] avrebbe dovuto consigliarmi di lasciarlo da parte. Ma ritengo che sia più utile togliere dagli equivoci un termine di uso corrente che inventarne uno di nuovo. Dunque laboratori per chiamare le cose con il loro nome : non solo eliminazione della lezione ma attività produttiva in locali attrezzati con materiali, strumenti e macchine. Questo rendeva evidente e perentorio il mutamento in fatto di modalità e di prodotti del lavoro culturale. Una rottura non clamorosa ma decisiva. Si può anche dire che in fondo il vero laboratorio è la mente dell'uomo *a patto che non si trascurino le condizioni e le mediazioni che modificano radicalmente il lavoro culturale*. Più tardi il concetto di laboratorio fu sciolto dall'obbligo di vincoli tecnologici tutte le volte che questi non erano richiesti per produrre. […] I laboratori si differenziano […] per corrispondere anche a forme di produzione che non hanno bisogno di uno strumento tecnologico in senso stretto. A me interessa che gli studenti si trovino spazi di comportamenti e di rapporti diversi da quelli usuali. La diversità consiste soprattutto nel fatto che ci sono cose da fare per raggiungere obiettivi con realtà di *prodotto*. E il prodotto può essere molto vario : la soluzione di un problema cognitivo, uno strumento, un congegno, una modificazione dell'ambiente, una innovazione organizzativa, la messa a punto e l'uso di una procedura di ricerca, una tecnica di collaborazione ecc. cioè il rapporto progetto/processo/prodotto non è vincolato costitutivamente dall'esclusivismo tecnologico […]. E se all'inizio si è dato peso particolare ad attività tecnologiche di vario tipo è stato proprio per favorire la rottura. Non c'era alcun pregiudizio tecnologico-manuale contro le attività intellettuali che del resto sono più che mortificate dal regime tradizionale (pp.13,14).

L'interesse del pedagogista è focalizzato sugli "spazi di comportamenti e di rapporti diversi da quelli usuali" da riservare agli studenti così come sulla mente dell'uomo, che è laboratorio "a patto che non si trascurino le condizioni e le mediazioni che modificano radicalmente il lavoro culturale".

Da più di 10 anni in Italia i lavori di ricerca in Didattica della Matematica di Bartolini-Bussi e Mariotti (2009), nella tradizione di Vygotskij e Rabardel, hanno introdotto il modello della Mediazione Semiotica, e Arzarello (2006) ha studiato il ruolo di segni e segni-artefatto quali modelli interpretativi dei processi di apprendimento e di insegnamento della matematica. Lo studio dei contesti e dei processi di mediazione, del ruolo degli artefatti nel processo di insegnamento/apprendimento e in quello di costruzione di ambienti di apprendimento assume oggi un ruolo particolarmente cruciale anche in considerazione dell'irruzione dei media[11] nella scuola e nella società tutta.

Per tutte le ragioni esposte, il nostro approccio non consiste nel prendere in considerazione la Didattica laboratoriale come nuova metodologia e cercare di stabilire quando e come utilizzare una tale modalità di lavoro, quanto piuttosto quello di capire come un "clima di laboratorio" possa intervenire nel processo di insegnamento/apprendimento e nella costruzione di competenze in matematica.

4. Clima di Laboratorio e costruzione di competenze

Il punto di vista della Didattica della Matematica indaga sulle regolarità o invarianti come sulle perturbazioni che emergono in un contesto *dove e quando interviene il sapere*; e il contesto a cui ci riferiamo in questo lavoro è quello del processo di insegnamento/apprendimento di conoscenze e competenze in situazione scolastica. Usiamo il paradigma teorico della Teoria della Trasposizione didattica e della Teoria Antropologica del Didattico, sviluppata a partire dagli anni 80 da Chevallard (1985, 1989) e della Teoria delle Situazioni didattiche da Brousseau (1998) perché sono tra le prime Teorie, dell'ambito delle ricerche nelle didattiche disciplinari, ad aver considerato la necessità di un approccio sistemico. L'insegnante, l'alunno, il sapere e l'ambiente di apprendimento[12] sono considerati come elementi di un sistema che interagiscono influenzandosi reciprocamente nel dare vita al processo di insegnamento/apprendimento. Come nei più recenti studi della Teoria generale dei Sistemi, si tratta di un *approccio*

[11]Cfr. in Agrati, 2017, il concetto di "mediatizzazione" come "modello descrittivo dei processi di insegnamento-apprendimento, esplicativo dei rapporti complessi che si attivano in virtù dei mezzi tecnologici"; in Albano, Faggiano, Mammana, 2013, un modello descrittivo dei processi di insegnamento-apprendimento nel caso di ambienti di e-learning.

[12]Il termine ambiente di apprendimento è utilizzato nel senso assegnato al termine francese "milieu" nella Teoria delle situazioni didattiche e nella Teoria della Trasposizione didattica.

culturale che non si basa sul locale, sull'elemento, ma si focalizza sul rapporto tra gli elementi, sulla strategia, sul considerare problemi generati da soluzioni ad altri problemi… sul superamento del rapporto causa-effetto inefficace per gestire problemi complessi (Minati, 2004, p. 83).

Affrontare la questione dell'apprendimento e dell'insegnamento di competenze richiede un chiarimento preliminare sull'accezione data al termine competenze. Consideriamo il termine competenza[13] come la "comprovata capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale".

Ci poniamo inoltre la domanda sulla natura delle competenze e condividiamo la posizione di Pellerey[14] che tende "a non contrapporre sapere e competenza, bensì a considerarle come forme complementari di pensiero" (Pellerey, 2011, p. 40). Egli inoltre sostiene la necessità di prendere in considerazione il carattere soggettivo e quello relazionale della competenza e l'impossibilità di costruire competenze se non a partire da conoscenze e saperi posseduti. Il carattere relazionale della competenza

> implica l'esistenza dell'altro e di altro: delle situazioni fidanti, con i loro caratteri oggettivi, più o meno ben percepiti e ben inquadrati, ma ben presenti nella loro durezza ed esigenza; delle persone più esperte, un riferimento con cui confrontarsi continuamente, che sono in grado di giudicare la qualità delle scelte e delle azioni; del contesto organizzativo e della pratica umana nella quale si è inseriti […]. La prima relazione è tra *il soggetto e il compito*[15] da svolgere o la situazione sfidante.[…] La seconda relazione è tra *il soggetto e il contesto sociale e collaborativo* nel quale si è inseriti […] La terza relazione si evidenzia se teniamo presente come sia *il soggetto* che agisce, sia *il compito* da svolgere siano inseriti *in un contesto culturale e pratico* che evolve nel tempo […] (Pellerey, 2011, pp. 43-44)

Affrontare il problema della costruzione di competenze comporta la necessita di indagare e conoscere le condizioni che possono favorire o impedire tale costruzione.

> La qualità della competenza di una persona non può essere riferibile alla sua manifestazione in un caso specifico e isolato […]. Un compito, una sfida non può essere colta solo in riferimento a se stessi, bensì tenendo conto del contesto pratico, in riferimento a se stessi, bensì tenendo conto del contesto pratico, sociale o culturale in cui tale compito o sfida si colloca. La percezione che uno studente viene ad a vere del compito assegnato tiene conto della pratica didattica nella quale è inserito. Se prevale un insegnamento che sollecita risposte standardizzate, questi si appresterà a manifestare la sua competenza in tale direzione; se invece prevale un orientamento più flessibile e aperto, egli dovrà mettere in gioco risorse interne assai più impegnative e coerenti con le esigenze della richiesta (Pellerey, 2011 p. 45).

Indagare le condizioni, secondo Pellerey, significa anche guardare all'agire pratico e ciò conduce ad affrontare uno studio finalizzato a mettere in luce anche "*quanto non è possibile racchiudere in leggi e principi di natura scientifico-tecnologica, perché legato a una costruzio-*

[13] Definizione ripresa da: Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 23 aprile 2008 sulla costituzione del Quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente – Allegato 1, C111/4.

[14] Si veda anche Pellerey, 2015.

[15] Il corsivo è nostro.

ne personale di conoscenza, competenza e senso, che deriva da una riflessione sull'esperienza… la pratica evocata… è una pratica complessa, culturalmente e linguisticamente segnata (Pellerey, 1998).

Nel considerare fondamentale l'apporto dell'agire e della pratica e la complessità, nel funzionamento della relazione didattica, che lega e vincola gli elementi insegnante-alunno-sapere-ambiente, la sintesi di Pellerey sui risultati in ambito filosofico e pedagogico ha aspetti di accordo con il pensiero espresso da Chevallard (2011) che così definisce l'approccio della Teoria Antropologica del Didattico:

La théorie anthropologique du didactique (TAD) porte en elle une critique sévère mais bonne du champ didactique; elle l'exprime notamment à travers deux définitions, celle du didactique, d'abord, celle de la didactique. Le didactique est cette dimension des sociétés humaines – et peut-être animales ! – présente en toute situation où se manifeste une intention, portée par une personne ou une institution (V), de faire quelque chose (un "geste didactique") pour que quelque personne ou quelque institution (U) apprenne quelque chose (l'enjeu didactique). En usant des concepts de base de la TAD, on dira encore : "… pour que quelque instance (personne ou institution) rencontre quelque entité praxéologique". La didactique est la science du didactique et, plus largement, des conditions et des contraintes gouvernant la diffusion des entités praxéologiques auprès des instances de la société. La didactique n'est pas attachée organiquement à telle ou telle instance sociale – à "l'école", à telle "discipline scolaire", etc. Elle regarde toute instance doublement : comme l'objet possible d'intentions didactiques et le sujet nécessaire de rencontres praxéologiques, d'une part ; comme capable d'intentions didactiques et opératrice potentielle d'un gestuaire didactique, d'autre part.

Gli studi dell'ambito psicologico e della Didattica della Matematica hanno identificato un doppio paradosso caratterizzante il processo di insegnamento/apprendimento in situazione scolastica: per apprendere l'alunno deve accettare di rompere la relazione didattica ed entrare in relazione diretta con il sapere (paradosso dell'*atto* di apprendimento); se l'insegnante dice ciò che vuole ottenere, non può più ottenerlo (paradosso dell'*atto* di insegnamento). Nella Teoria delle Situazioni, elaborata nell'ambito di ricerca in Didattica della Matematica da Brousseau (1998), il superamento del paradosso è realizzato se si instaura una situazione *a-didattica* che realizza una condizione particolare della relazione didattica, specifica del sapere, che lega insegnante, alunno e ambiente. Una situazione è *a-didattica* relativamente ad un sapere, se contiene le condizioni *per poter essere vissuta dall'alunno indipendentemente dalle istanze didattiche.* Le *azioni* che l'alunno compie, le *risposte* e le *argomentazioni* che fornisce devono quindi essere *funzione del suo rapporto* (non totalmente esplicito) con il sapere (in quanto conoscenza da acquisire o da utilizzare per fornire le risposte)[16]. Il doppio paradosso si supera, quindi, con la realizzazione del processo di devoluzione, attraverso il quale l'insegnante fa accettare (implicitamente) all'alunno la responsabilità di una situazione di apprendimento (a-didattica) o di un problema e accetta egli stesso le conseguenze di questo transfert

[16] La Teoria delle situazioni, distingue la situazione a-didattica da altri due tipi di situazioni caratterizzate da una natura differente della relazione didattica Insegnante-Alunno-Sapere-Milieu. Situazione non-didattica: una situazione è *non-didattica*, relativamente ad un sapere *S* se tale situazione *non è esplicitamente organizzata* per permettere l'apprendimento di *S.* Situazione didattica: una situazione è *didattica*, relativamente ad un sapere S se in tale situazione è introdotta un *relazione didattica* che attribuisce agli elementi *I* ed *A* le posizioni rispettive di Insegnante e Alunno *nei confronti di S.*

(errori ripetuti, saperi momentaneamente parzialmente corretti). Le attese reciproche di insegnante e alunno rispetto al sapere "regolano" il funzionamento del processo di devoluzione; il modello teorico dell'insieme di tali attese prende il nome di *Contratto Didattico relativo ad un sapere*[17]. Nel processo di insegnamento/apprendimento l'insieme dei comportamenti e delle attese reciproche dell'insegnante e dell'alunno nei confronti del sapere deve necessariamente contenere degli elementi *impliciti* se tale sapere è in fase di costruzione, l'apprendimento necessita di continue rotture del contratto didattico. Ma il processo di insegnamento/apprendimento di un sapere in situazione scolastica non si esaurisce con la *Costruzione di una Conoscenza,* ma si evolve in un processo (inverso a quello della devoluzione) attraverso il quale la nuova conoscenza acquisita diventa riferimento culturale "ufficializzato" nel quadro collettivo della classe e collocato in una disciplina specifica (Matematica). Tale processo viene denominato, nell'ambito della Teoria delle situazioni, *Istituzionalizzazione* di un sapere.

I processi di *devoluzione* e di *istituzionalizzazione*, che non devono essere confusi con le fasi della programmazione didattica, contengono necessariamente delle fasi di *monitoraggio* del processo di insegnamento/apprendimento di un sapere in fase di costruzione che l'insegnante e l'alunno realizzano, spesso implicitamente. Il processo di insegnamento/apprendimento di una data conoscenza o sapere evolve infatti, secondo la TAD in una dialettica tra cronogenesi e topogenesi dei saperi[18]. Ogni alunno quando *l'insegnante ha finito di spiegare un nuovo argomento* e ha preannunciato il momento del "compito in classe" anche inconsapevolmente sa di aver "capito" o di "non aver capito" (una topo genesi della nuova conoscenza si è realizzata o no). Ma anche l'insegnante, con un monitoraggio spesso implicito e inconsapevole dell'evoluzione degli apprendimenti degli alunni, stabilisce un ritmo della cronogenesi proprio nel momento in cui "annuncia" il prossimo compito in classe sull'argomento. Gli indicatori che determinano il ritmo della cronogenesi sono, da un lato, la progettazione del percorso (gli obiettivi stabiliti a priori in relazione al nuovo argomento) e dall'altro, l'individuazione di errori, difficoltà e risposte corrette da parte dell'insegnante durante le attività realizzate.

Nell'agire pratico, una delle preoccupazioni degli insegnanti è quella di impedire che gli alunni commettano errori. Con una espressione forte, Chevallard afferma che "il potere dell'insegnante in classe consiste più nel suscitare la risposta corretta (che implicitamente classifica le altre come scorrette) che nel designare le risposte scorrette" (Chevallard, 1985). Alcune delle risposte possibili (dal punto di vista epistemologico in relazione alla domanda posta) possono essere eliminate o avere poche possibilità di apparire, non perché non siano pertinenti dal punto di vista matematico ma perché ritenute "fuori luogo", nella interpretazione della situazione da parte dell'alunno, rispetto alle attese "implicite" dell'insegnante. Diventa, quindi, impor-

[17] Nella TDS con il termine "Contratto didattico", si identifica l'insieme delle relazioni che determinano – quasi sempre in modo implicito – rispetto ad un sapere insegnato, ciò che ciascun elemento – insegnante , alunno – ha la responsabilità di gestire e di cui sarà responsabile rispetto all'altro.

[18] Nella pratica agiscono più saperi in contemporanea che hanno evidentemente statuti diversi nella dialettica cronogenesi-topogenesi e quindi l'osservazione e lo studio dell'agire nelle pratiche scolastiche manifesta tutta la sua complessità, dovuta anche al fatto che più sistemi didattici funzionano contemporaneamente in relazione ai diversi saperi in atto nella attività presa in considerazione. Inoltre, più contratti didattici "agiscono" contemporaneamente in relazione a statuti diversi dei saperi matematici in gioco in una data attività.

tante spostare l'attenzione dal ruolo attribuito all'errore (come mancanza di conoscenza – o disattenzione, o distrazione…) alla necessità per l'insegnante di prevedere, individuare la natura e gestire le risposte degli alunni, siano esse: attese o non attese, giuste o sbagliate, o ancora parzialmente corrette.

Ogni risposta relativa ad un sapere che l'alunno fornisce può essere collegata a due *condizioni delle attività* di natura differente, rispettivamente caratterizzate da un sapere che è *acquisito* o da un sapere che è *in fase di costruzione*. Se il sapere è in fase di costruzione, la *destabilizzazione di uno dei "sensi del sapere"* è una fase necessaria e costitutiva del processo di costruzione delle conoscenze. L'errore, la difficoltà o la risposta non attesa sono in questo caso l'indice dell'instaurarsi di una fase necessaria del processo di costruzione della conoscenza (cioè del *senso del sapere*). Davanti a risposte di questo tipo l'insegnante può prendere due decisioni differenti. Durante l'attività in classe tali decisioni sono istantanee e spesso inconsce: rilevare l'errore ed esplicitarlo all'alunno, oppure, rilevare l'errore e tenerlo per sé. Nel primo caso, la decisione interrompe nell'alunno la fase di apprendimento (non ha più ragione di essere il porsi domande e cercare la risposta se quella corretta è stata già "rivelata") e rinvia ad un altro "compito sfidante" la costruzione della nuova conoscenza. Con la seconda decisione, l'insegnante, non esprime giudizi sull'errore (percepibili dall'alunno) ma accetta che l'alunno sbagli e incoraggia la ricerca di altre risposte, ristrutturando le condizioni della situazione che permettano tale ricerca. Ciò può favorire l'innescarsi di un processo di *devoluzione all'alunno di una responsabilità nei confronti del sapere,* e permettere la costruzione della nuova conoscenza.

Se il sapere è acquisito, l'alunno può non dare alcuna risposta o dare una risposta non attesa o considerata errata dall'insegnante perché le *condizioni della situazione* lo hanno influenzato[19] (in modo implicito) conducendolo a fornire una risposta non sulla base del suo rapporto con il sapere in gioco (cioè con le sue conoscenze) ma sulla base della sua interpretazione della attività e delle domande a cui deve rispondere. Per esempio, ciò accade quando l'alunno utilizza un algoritmo diverso da quello "atteso" dall'insegnante nella risoluzione di un problema o nel fornire la risposta ad un esercizio. La risposta ad un quesito, la soluzione di un problema necessitano inoltre una validazione delle soluzioni e delle strategie risolutive al fine di accertarne la correttezza, la validità e la pertinenza epistemologica. Sulla previsione di come gestire le risposte corrette o errate degli alunni si basa fondamentalmente la possibilità di costruire un *clima di laboratorio* in classe. Un clima di laboratorio, caratterizzato dalla produzione di congetture, da un dibattito che le confuta o le rigetta e da una argomentazione sulle risposte trovate, non comporta mai fasi di valutazione[20].

[19] Cfr. Polo, 2002, per alcuni esempi su questi comportamenti di risposta al compito.

[20] L'insegnante e l'alunno, in relazione alle loro rispettive funzioni istituzionali, hanno una ulteriore attesa reciproca che li vincola: il processo di insegnamento/apprendimento non si esaurisce con quello di Istituzionalizzazione ma necessita l'innescarsi del processo di Valutazione. Il processo di *valutazione* è caratterizzato da una funzione specifica istituzionalmente assegnate al sistema Insegnante-Alunno-Sapere-Milieu. Il sapere è supposto acquisito, l'insegnante deve esplicitamente esprimere un giudizio su tale acquisizione e l'alunno deve esplicitamente mostrare di aver acquisito il sapere in gioco.

Abbiamo cercato di mostrare che l'accezione di Didattica laboratoriale come nuova metodologia di insegnamento, sia restrittiva ma si debba piuttosto prendere in considerazione un "clima di laboratorio" come variabile fondamentale della messa in opera di ambienti di apprendimento significativi e potenzialmente atti a costruire competenze matematiche e di problem solving. La ricerca ha affrontato il problema della messa in opera di un tale *ambiente di apprendimento* in stretta relazione con lo studio delle condizioni che ne possano permettere (o viceversa ne possano impedire) l'inserimento nelle pratiche d'insegnamento abituali. Ci focalizziamo nello studio di caso sull'analisi delle tipologie di problemi che sono potenzialmente efficaci per determinare un clima di laboratorio e sulle alcune condizioni che ne determinano un funzionamento pertinente per la costruzione di competenze personali di problem solving in matematica.

5. Lo studio di caso: attività di problem solving in matematica

La risoluzione di problemi intesa come attitudine a porsi e porre domande nella ottica di trovare risposte convincenti è carattere intrinseco del processo di apprendimento così come del fare matematica e il problem solving è considerata una delle competenze trasversali a tutti i livelli scolastici. Non abbiamo dati quantitativi, ma la nostra esperienza di sperimentazione e di formazione ci conduce ad avanzare la congettura che una pratica di problem solving (che dovrebbe andare di pari passo con quelle di problem posing) sia ancora oggi punto isolato nelle pratiche scolastiche abituali. Eppure, se si accetta la tesi del carattere relazionale della competenza, una attività di risoluzione di problemi o una attività in " clima di laboratorio" dovrebbero garantire le condizioni atte alla costruzione di competenze

Consideriamo due contesti diversi di studio di caso: quello di alunni di scuola secondaria impegnati in una tipologia di gare di matematica a squadre e quello di un'attività laboratoriale, centrata sulla risoluzione di un problema, realizzata da insegnanti di scuola secondaria di primo grado in un corso di formazione. Dal punto di vista metodologico i dati raccolti nei due contesti riguardano gli elaborati degli alunni, le note di osservazione e alcuni filmati delle fasi di lavoro in classe. Esaminiamo qui per ciascun contesto alcuni aspetti di natura epistemologica e di organizzazione didattica che si sono rivelati variabili didattiche fondamentali rispetto alla messa in opera di competenze riguardanti i saperi matematici.

5.1. Il contesto delle gare di classe

Il contesto delle gare di classe o a squadre è un contesto pertinente per l'individuazione di invarianti di natura epistemologica, osservabili esaminando esclusivamente negli elaborati degli alunni le occorrenze delle risposte corrette e delle tipologie di errori o di risposte parziali. Prendiamo in considerazione le risposte ad un problema fornite da gruppi di alunni diversi. Il primo gruppo è composto da 17 classi (3 di terza secondaria di primo grado, 7 di prima e 7 di seconda secondaria di secondo grado) che si sono affrontate nelle gare del RMT[21]. In questa tipologia di gare, le classi si sfidano in due prove e una finale. In ciascuna fase la classe è responsabile della organizzazione in gruppi e della gestione del lavoro: la gara consiste nel rispondere a 7 quesiti in 50 minuti fornendo una spiegazione e una argomentazione della risposta trovata; una commissione (di insegnanti provenienti dalle diverse classi in gara) corregge gli elaborati sulla base di una griglia di attribuzione di punteggi stabilita a priori da una commissione internazionale. Il secondo gruppo è composto da 8 squadre[22]; ciascuna squadra è composta da 10 alunni (di seconda, terza e quarta della secondaria di secondo grado) che si affrontano in una sola gara con le stesse regole. Il problema è stato assegnato con un diverso testo ai due gruppi, nelle seguenti versioni.

Versione 1. Un'azienda produce un tipo di minestra al pomodoro che confeziona in lattine da un litro. Le lattine sono di forma cilindrica con diametro interno di 8,4 cm. Nel corso di una campagna promozionale l'azienda decide di offrire ai suoi clienti, allo stesso prezzo, lattine aventi la stessa altezza, ma contenenti il 15% di minestra in più. Qual è il diametro interno delle nuove lattine di minestra? Eseguite i calcoli con l'approssimazione al millimetro.

Versione 2. Un'azienda produce un tipo di piscina rotonda dalla portata di 12000 litri di acqua. La piscina ha una forma cilindrica con diametro interno di 450 cm. Nel corso di una campagna promozionale l'azienda decide di offrire ai suoi clienti, allo stesso prezzo, una piscina avente stessa altezza, ma contenente il 15% di acqua in più. Le nuove piscine prodotte hanno il diametro di 467 cm. Secondo voi l'azienda ha prodotto le piscine adatte allo scopo della campagna promozionale?

I contenuti di riferimento del compito matematico sono gli stessi nelle due versioni[23] ma la struttura dei quesiti è diversa. Sono stati modificati, i dati numerici, lo scenario del problema e la formulazione della domanda. Nella versione 1 il quesito richiede la produzione di un numero, mentre nella versione 2 richiede di valutare l'adeguatezza di un valore numerico. In particolare nella versione 2, il dato aggiunto riferito al diametro modifica le strategie risolutive possibili, mentre le la formulazione della domanda analoga a quella della versione 1 sarebbe dovuta essere "*Qual è il diametro interno della nuova piscina?".* Le due modifiche sono state scelte a priori per analizzare il ricorso a strategie di verifica (rispetto alla risoluzione diretta) e ad una maggiore coerenza tra il contesto narrativo dello scenario e la domanda (Zan, 2016).

[21] I testi sono un adattamento di un problema del 254° RMT, 2016. Per maggiori dettagli sulla tipologia di gara si veda il sito dell'ARMT http://www.armtint.org.

[22] I dati raccolti sono riferiti all'edizione 2017 della Gara di Matematica Fami(g)liare organizzata dal CRSEM di Cagliari.

[23] Si tratta di risolvere un problema di proporzionalità, con uno dei dati espresso in percentuale. Gli argomenti della proporzionalità e delle frazioni sono tra i più problematici nell'insegnamento della matematica nella transizione dalla scuola secondaria di primo grado a quella di secondo grado. Il compito è "sfidante" sia rispetto al sapere "divisione" che rispetto al sapere "confronto tra rapporti" che possono essere utilizzati per risolvere il problema ma non sono in alcun modo "richiamati" nello scenario e nei dati del problema.

Bassa la frequenza di procedimenti di verifica nel caso del secondo gruppo[24] ma maggior numero di risposte corrette rispetto al primo gruppo. I risultati raccolti hanno mostrato una sostanziale invarianza nelle percentuali di successo e nessuna risoluzione a punteggio pieno cioè con risoluzione corretta e spiegazione esaustiva. Nelle due versioni la domanda non contiene, neanche implicitamente, l'indicazione della strategia di risoluzione ed è trasparente rispetto al sapere necessario per risolvere il problema. Questa variabile della modalità di formulazione della domanda è meno frequente nei problemi scolastici standard. Spesso infatti nelle pratiche scolastiche di attività di risoluzione di problemi sono presenti indicatori linguistici o di natura didattica legati alla cronogenesi che danno espliciti richiami al sapere e alle strategie risolutive da utilizzare per risolvere il problema. Ciò potrebbe aver contribuito nei due gruppi alla percentuale bassa di successo e sarebbe sintomo di un blocco della devoluzione rispetto ai sapere in gioco. In relazione al contesto del primo gruppo, considerati i dati raccolti su questa tipologia di attività[25] negli ultimi 3 anni, permane la resistenza della difficoltà all'inserimento nella pratica abituale, in interazione con il curricolo, delle tipologie di attività legate alle gare matematiche di classe.

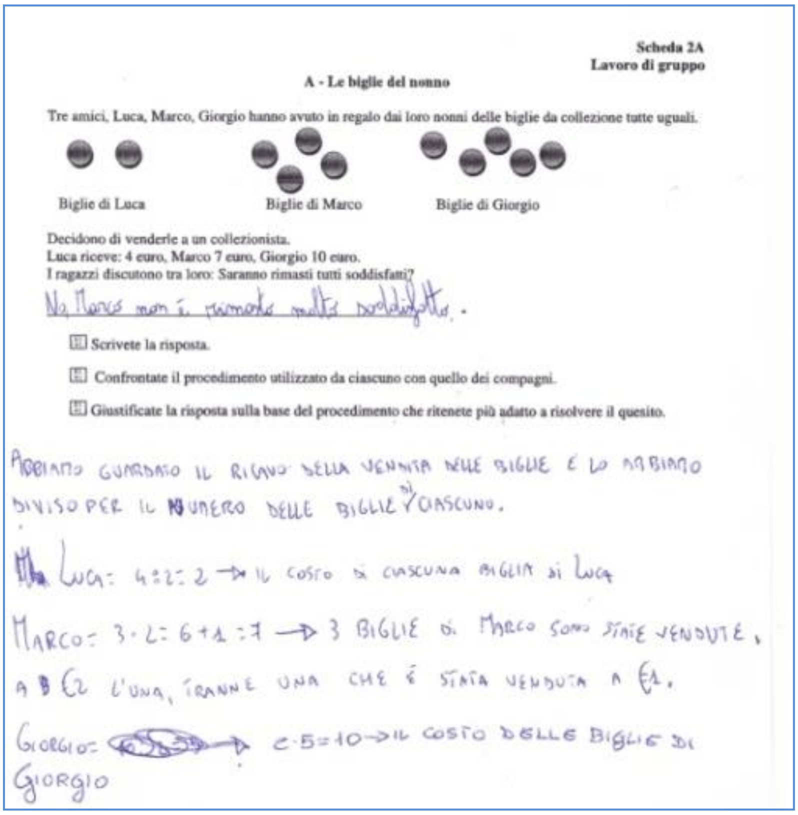
5.2. Il Contesto del Corso di formazione

Il secondo problema preso in considerazione è stato somministrato in una fase di sperimentazione[26] nella classe seconda della scuola secondaria di I grado in un corso di formazione di insegnanti in servizio che prevedeva fasi di osservazione degli alunni in attività laboratoriali. L'attività era organizzata in una prima fase individuale seguita da una di gruppo e da una discussione collettiva di conclusione che consisteva nella condivisione delle soluzioni, delle strategie di risoluzione e delle argomentazioni sulla correttezza della risposta o sugli errori. Il problema è stato proposto in 6 classi di seconda secondaria di primo grado. L'insegnante gestiva l'attività, il formatore aveva il ruolo di osservatore (conosceva la classe e l'insegnante per aver condotto in prima persona una attività laboratoriale in una fase precedente del corso di formazione). L'attività era stata discussa, analizzata e preparata con il formatore e tutti i colleghi coinvolti. Riportiamo l'elaborato del problema della scheda consegnata per il lavoro di gruppo in una delle due classi e una breve sintesi dei risultati.

[24] Non ci addentriamo negli aspetti matematici e quantitativi delle tipologie di risposte che richiederebbero l'analisi di altre variabili fondamentali che hanno influenzato le risposte (conoscenze matematiche potenzialmente possedute, composizione dei gruppi, contesto di gioco e di sfida della gara, ecc…)

[25] Dai dati rilevati, mediamente il 10% degli insegnanti che partecipano alle gare, attuano abitualmente attività di problem solving come modalità inserita nella progettazione del curricolo.

[26] Cfr. Milia, Polo 2017, per altri esempi di problemi e una analisi di natura linguistica sulle tipologie di risposte.



Scheda 2A
Lavoro di gruppo

A - Le biglie del nonno

Tre amici, Luca, Marco, Giorgio hanno avuto in regalo dai loro nonni delle biglie da collezione tutte uguali.

Biglie di Luca   Biglie di Marco   Biglie di Giorgio

Decidono di venderle a un collezionista.
Luca riceve: 4 euro, Marco 7 euro, Giorgio 10 euro.
I ragazzi discutono tra loro: Saranno rimasti tutti soddisfatti?

No, Marco non è rimasto molto soddisfatto.

- Scrivete la risposta.
- Confrontate il procedimento utilizzato da ciascuno con quello dei compagni.
- Giustificate la risposta sulla base del procedimento che ritenete più adatto a risolvere il quesito.

ABBIAMO GUARDATO IL RICAVO DELLA VENDITA DELLE BIGLIE E LO ABBIAMO DIVISO PER IL NUMERO DELLE BIGLIE DI CIASCUNO.

LUCA: 4:2=2 → IL COSTO DI CIASCUNA BIGLIA DI LUCA

MARCO: 3·2=6+1=7 → 3 BIGLIE DI MARCO SONO STATE VENDUTE, A €2 L'UNA, TRANNE UNA CHE È STATA VENDUTA A €1.

GIORGIO: → 2·5=10 → IL COSTO DELLE BIGLIE DI GIORGIO

Tre amici Luca, Marco, Giorgio hanno avuto in regalo dai loro nonni delle biglie da collezione tutte uguali. Decidono di venderle ad un collezionista. Luca riceve 4 euro, Marco 7 euro, Giorgio 10 euro. I ragazzi discutono tra loro. Saranno rimasti tutti soddisfatti?.

La classe era suddivisa in 4 gruppi (2 di 4 componenti e 2 di 3 componenti). Tutti i gruppi hanno fornito la risposta corretta; le risposte sono classificabili in tre tipologie, ricorrenti in tutte le classi: Tipologia 1. *Confronto tra costo unitario di vendita.* Tipologia 2. *Determinazione del ricavato che avrebbe dovuto avere Marco ("Saranno tutti soddisfatti tranne Marco perché ha ricevuto 7 € invece di 8 €"); le strategie fanno ricorso al raddoppio*. Gruppo 3: *Attribuzione a Marco della vendita di 2 biglie a 2 euro e la terza biglia a 1 euro. Questa strategia ha consentito una discussione di classe sulla "ripartizione in parti uguali". L'elaborato è rappresentativo della risposta più frequente che non fa ricorso né al ragionamento proporzionale, né al confronto tra rapporti, ma riconduce il confronto al costo unitario di vendita delle biglie.*

Sulle sei classi di seconda media, che avevano già affrontato in prima il percorso sulle frazioni, solo in una delle classi è stata data la risposta facendo ricorso al confronto tra rapporti. Il ricorso alla strategia del calcolo del costo unitario mostra che il sapere "divisione" è posseduto come competenza; l'assenza di ricorso diretto al confronto tra rapporti è indicatore dell'assenza di competenze rispetto alla "frazione come rapporto".

5.3. Risultati dello studio di caso

Dal punto di vista della ricerca le attività realizzate hanno consentito la conferma delle seguenti ipotesi: 1. la difficoltà per l'insegnante nell'innescare un processo di "devoluzione" all'alunno del proprio rapporto con i saperi matematici; 2. il controllo e la presa di decisione da parte dell'insegnante durante *l'agire pratico* (in relazione agli interventi degli alunni) sono determinati da almeno tre aspetti[27]: quello epistemologico, quello della organizzazione didattica e quello della previsione delle risposte/domande attese; 3. la tendenza del processo di insegnamento/apprendimento in situazione scolastica ad una cortocircuitazione dei processi di devoluzione e di istituzionalizzazione dei saperi matematici.

La prima e la seconda ipotesi riguardano il fenomeno noto della tendenza, della *posizione insegnante*, ad "ottenere immediatamente la risposta corretta" (Polo, 2002); tendenza che è stata confermata dall'osservazione e dall'analisi di alcune registrazioni audio delle discussioni di classe del secondo contesto del nostro studio di caso. I documenti prodotti dagli insegnanti relativi alla previsione della gestione dell'attività hanno confermato in particolare che nel prevedere lo svolgimento dell'attività l'insegnante raramente prende in considerazione consapevolmente più strategie possibili di risoluzione di un problema e le modalità a priori individuabili di domande potenzialmente atte a favorire l'evoluzione del processo di devoluzione, in relazione a errori o risposte parzialmente corrette. Ciò si rivela come una delle concause principali relative alla conferma della terza ipotesi.

Dal punto di vista dell'inserimento di attività di problem solving (anche legate alle gare) nella programmazione annuale del singolo insegnante abbiamo avuto conferma della rigidità che il sistema didattico rivela rispetto al cambiamento; a detta di molti insegnanti, il "poco tempo" non rende possibile un inserimento organico e stabile di attività laboratoriali. Tale pratica viene percepita, oltre che come un aggravio di lavoro, come ostacolo agli "impegni prescrittivi dei programmi da svolgere". Questo atteggiamento pervade la pratica degli insegnanti in tutte le attività sperimentali e di innovazione ed è spiegabile con l'innegabile impegno e tempo che qualunque cambiamento richiede. Riteniamo però anche che affinché i cambiamenti auspicati diventino patrimonio delle pratiche scolastiche abituali e si diffondano presso tutti gli insegnanti siano necessarie anche modifiche riguardanti aspetti organizzativi e di gestione di sistema della scuola che spesso non sono considerati come rilevanti ed invece possono far arenare o impedire l'innovazione.

6. Conclusione

Abbiamo identificato e definito il "clima di laboratorio" come variabile fondamentale della messa in opera di ambienti di apprendimento significativi e potenzialmente atti a costruire competenze matematiche e di problem solving. La ricerca ha lasciato aperto il problema dell'identificazione di condizioni di riproducibilità delle pratiche sperimentate. Ovviamente altre competenze trasversali e personali entrano in gioco in questa tipologia di attività. Non le abbiamo prese in considerazione, né abbiamo affrontato la questione della valutazione che pure è una delle questioni vive e pressanti per tutti i settori di ricerca che si interessano al Sistema Scuola. Ciò richiederebbe il superamento di una visione dell'innovazione come collegata esclusivamente alle pratiche innovative dei contenuti disciplinari e delle metodologie. È indi-

[27] Nella formulazione abbiamo preso in considerazione la posizione insegnante, ma le ipotesi e le analisi potrebbero essere esplicitate in termini di sistema didattico.

spensabile, infatti, considerare la necessità della costruzione di un'attitudine all'azione in processi di innovazione di sistema, cioè un'attitudine al monitoraggio e alla valutazione anche di aspetti di organizzazione e gestionali del Sistema Scuola. Nell'ottica del miglioramento si tratta, quindi, di una presa di consapevolezza individuale ma anche istituzionale della necessità di individuare buone pratiche, argomentandone l'efficacia, rispetto agli obiettivi dell'innovazione. Ciò può e deve comportare anche il rigetto di ipotesi di lavoro o di modalità di innovazione rivelatesi inefficaci, ma soprattutto un concorso di ambiti di ricerca nell'ottica dello studio di sistemi complessi.

7. Bibliografia

Agrati, S. L. (2013). Contenuti digitali e pratica di insegnamento. Lo studio di caso di un repository di scuola superiore di II grado. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, Vol. 9, n. 13, pp. 195-213.

Albano, G., Faggiano, E., Mammana, M. F. (2013). A tetrahedron to model e-learning Mathematics. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, pp. 429-436.

Bartolini Bussi M.G., *Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani*. Bollettino U.M.I., La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol. IV-A, 2001, 117-150.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Treviso, CRDM, vol. 32, sez. A-B, pp. 270-294.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Calmette, B., Matheron, Y. (sous la coordination de) (2015). Les démarches d'investigation et leurs déclinations en mathématiques, physique, sciences de la vie et de la Terre. *Recherche en Education*, 1, http://www.recherches-en-education.net.

Chevallard, Y. (1995). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2011). *Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD*, Texte d'un exposé réalisé le 28 janvier 2011 dans le cadre du Séminaire de l'ACADIS (ADEF, Marseille), http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208.

Da Re, F. (2013). *La didattica per competenze. Apprendere competenze, descriverle, valutarle*. Milano-Torino: Pearson Italia, http://lineadidattica.altervista.org/files/LA-DIDATTICA-PER-COMPETENZE.pdf.

De Bartolomeis, F. (1978). *Sistema dei laboratori, per una scuola nuova necessaria e possibile.* Milano: Feltrinelli.

Giacardi, L. (2011). *L'emergere dell'idea di laboratorio di Matematica agli inizi del Novecento*, DI. FI. MA. 2011, pp. 2-13, http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/11/P0-3_GiacardiDIFIMACORRlivia.pdf.

Giacardi, L. (2016). *"Lavorare con le mani e con la mente". Il laboratorio di matematica fra Ottocento e Novecento*, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 39 A-B, n. 5, pp. 517-550, Novembre-Dicembre, Centro Morin, Paderno del Grappa.

Hannula, M., Evans, J., Philippou, G., Zan, R. (coordinators) (2004). *Affect in mathematics education – exploring theoretical frameworks*. *Proceedings of PME 28*, (Bergen, NW), vol.1, 107-136.

Kline, M. (1976). *La matematica nella cultura occidentale*. Milano: Feltrinelli.

Lai, S., Polo, M. (2012). Construction d'une culture scientifique pour tous: engagement de l'enseignant et de l'élève dans la rupture de pratiques habituelles. In Dorier, J.-L., Coutat, S. (Eds.). *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes ducolloque EMF2012* (GT9, pp. 1213-1226).

Maass, K., Artigue, M., *et. al.* (Eds.) (2013). *Implementation of Inquiry-Based Learning in Day-to-Day Teaching*. Springer International Publishing, Volume 45, Issue 6, November 2013.

Materiali UMI-CIIM (2003), *Matematica 2003*, http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim.

Milia, L., Polo, M. (2017). *Trasversalità dell'educazione linguistica e dell'educazione matematica in un curricolo verticale. Studio di caso sulla fissità funzionale del lessico*. In F. De Renzo, M. E. Piemontese (a cura di), *Educazione Linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline Matematico-Scientifiche*. Roma: Aracne, pp. 253-271.

Minati, G. (2004). *Teoria generale dei sistemi, Sistemica, Emergenza: un'introduzione*. Milano: Polimetrica.

Ouvrier-Buffet, C., Bosdeveix, R., De Hosson, C. (2016). *Inquiry-Based Education (IBE): Towards an Analysing Tool to Characterise and Analyse Inquiry Processes in Mathematics and Natural Sciences* In B.R. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange (Eds.). *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Hommage to Michèle Artigue* (pp.191-217). New York: Springer.

Pellerey M. (1998). *L'agire educativo. La pratica pedagogica tra modernità e postmodernità*. Roma: LAS..

Pellerey, M. (2011). L'approccio per competenze è un pericolo per l'educazione scolastica?. *Scuola Democratica*, Nuova serie, 2, 37-54,http://pellerey.unisal.it/sd_l_approcc_un_pericolo.pdf.

Pellerey, M. (2015). *Le competenze. Che cosa sono*, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol.38 A-B, n. 5, pp. 517-534, Novembre-Dicembre, Centro Morin, Paderno del Grappa.

Pezzano, T. (2013). La scuola laboratorio di John Dewey: la "sperimentazione" dell'individuo per la democrazia. Nuova Secondaria Ricerca, n. 2, ottobre 2013.

Polo, M. (2002). Verso un modello di analisi della pratica didattica: il caso di un percorso di insegnamento/apprendimento su contenuti di geometria nella scuola elementare. In Malara N. *et al.* (a cura di). *Processi innovativi in matematica per la scuola dell'obbligo*. Bologna: Pitagora Editrice, pp. 237-251.

Polo, M. (2017).The Professional Development of Mathematics Teachers: Generality and Specificity. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, U. Gellert (Eds.). *Mathematics and Technology, Advances in Mathematics Education*. Springer International Publishing, pp. 495-521.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Colin.

Radford, L. (2006). *Comunicazione, apprendimento e formazione dell'io comunitario*. Incontri con la Matematica, Atti del Convegno del ventennale, 3-5 novembre 2006, Castel San Pietro Terme, 2006, pp. 65-72.

Schoenfeld, A. H., Kilpatrick, J. (2013). *A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics.* ZDM Mathematics Education, 2013, 45: 901-909.

Speranza, F. (1998). *Le briciole del banchetto di Omero*. In O. Faracovi, F. Speranza (a cura di). *Federico Enriques. Filosofia e Storia del Pensiero Scientifico*. Livorno: Belforte.

Zan, R. (2016). *I problemi di Matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci.

Received November 12, 2017
Revision received December 8, 2017/December 13, 2017
Accepted January 8, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 127-145 – ISSN 2038-1034

Difficoltà nell’applicazione di metodologie cooperative per l’insegnamento della Matematica nella scuola secondaria di II grado.
Alcune riflessioni sullo sviluppo dei processi argomentativi

Alessandro Spagnuolo

Abstract – *The aim of this paper is to point out the specific difficulties observed during the implementation of peer education teaching units of mathematics in some language section classes of secondary schools of Ferrara (Italy). Over the past five years, some experimental studies on the teaching of mathematics have been carried out in Ferrara with the aim of verifying whether it is possible to successfully implement such methodologies in the Italian educational context, and particularly at the higher education level. However, the positive perceptions observed among students and teachers involved in the study and the related motivational and affective aspects, must not detract attention from certain problematic situations that may arise during the teaching process. This paper will outline some of the interaction protocols among students, in which it is possible to identify the difficulties associated with the use of specific linguistic constructs and the resulting insecurity in mathematical discussions. The analysis of the aforementioned critical issues and the elaboration of corrective actions aim to preserve the benefits of using these methodologies, avoiding the use by students of irrational practices and mechanical resolution processes disconnected from a real understanding of mathematical concepts in the field.*

Riassunto – *L’obiettivo di questo articolo è di evidenziare delle specifiche difficoltà riscontrate in seguito alla realizzazione di unità didattiche sulle funzioni lineari in modalità peer education in alcune classi di licei linguistici di Ferrara. Negli ultimi cinque anni sono state portate avanti a Ferrara alcune indagini sperimentali per l’insegnamento della matematica con il fine di verificare se anche nel contesto educativo italiano, e in particolar modo a livello di scuola secondaria di II grado, sia possibile implementare con successo tali metodologie. Le percezioni positive rilevate tra gli studenti e gli insegnanti coinvolti in merito all’innovatività delle metodologie utilizzate e agli aspetti motivazionali e affettivi ad esse connesse non devono però distogliere l’attenzione da determinate situazioni problematiche che possono crearsi lungo il percorso didattico. In questo lavoro verranno illustrati alcuni dei protocolli di interazione tra gli studenti in cui è possibile individuare le difficoltà legate all’uso di specifici costrutti linguistici e la conseguente insicurezza generata all’interno delle discussioni matematiche. L’analisi delle suddette criticità e la relativa elaborazione di interventi aggiustativi mirano a preservare i vantaggi dovuti all’utilizzo di queste metodologie, evitando l’uso da parte degli studenti di prassi irrazionali e di procedimenti risolutivi meccanici sconnessi da una reale comprensione dei concetti matematici in campo.*

Keywords – mathematics education, peer education, linear functions, linguistic constructs, argumentation competences

Parole chiave – didattica della matematica, apprendimento cooperativo, funzioni lineari, costrutti linguistici, processi argomentativi

Alessandro Spagnuolo è Dottore di Ricerca in Matematica e Professore a contratto per il corso di *Esercitazioni di Matematica Applicata* della laurea magistrale in Architettura dell'Università di Ferrara. I suoi interessi di ricerca si collocano nell'ambito della didattica della matematica, in particolare sull'implementazione di strategie cooperative per l'insegnamento della matematica. Si segnala la sua tesi di dottorato *The effects of the equality parameter on mathematics students' performance. A comparative analysis of Peer Education interventions in teaching-learning of linear and quadratic functions* (Ferrara, 2017).

1. Applicazione delle metodologie cooperative: la situazione italiana

In Italia il modello pedagogico al quale si ispirano tradizionalmente gli insegnanti per organizzare le lezioni si basa su una impostazione trasmissiva di tipo unidirezionale. Come analizzato in Spagnuolo (2017), l'ultima indagine dell'istituto IARD sulle condizioni di vita e di lavoro nella scuola italiana ha mostrato come la percentuale di docenti che adottano delle strategie di didattica esperienziale siano decisamente basse (Cavalli e Argentin, 2010). Differenziando il corpo docente per materie insegnate si ritrova che nelle discipline scientifiche gli insegnanti con un profilo '*innovatore coraggioso*' – vale a dire coloro che prediligono lezioni interattive e attività esperienziali come quelle di cooperative learning – risultano essere solo il 19,1% del campione (*ibidem*, tabella p. 148). Non vi sono dati specifici inerenti il solo insegnamento della matematica, ma si può facilmente immaginare che la percentuale sia ancora più esigua. Quali possono essere le ragioni di tali scelte didattiche? Vi sono molti docenti che non sono a conoscenza di queste metodologie e che non hanno mai effettuato un corso di formazione al riguardo, per cui non hanno neanche la possibilità di sceglierle. Nella precedente indagine IARD del 2000 Giovannini suggeriva che i docenti che hanno vissuto in prima persona esperienze di didattica partecipata tendono poi a riproporla ai loro alunni. Allo stesso modo, gli insegnanti più giovani che hanno frequentato le SSIS e il TFA sono più propensi ad utilizzare forme di didattica basate sulla costruzione condivisa di conoscenza. Tali congetture sono state effettivamente indagate in svariate indagini internazionali (Baines *et al.*, 2008; Gillies and Boyle, 2010; Thanh, 2011). In particolare, Saborit *et al.* (2016) hanno provato l'esistenza di una correlazione negativa tra gli anni di esperienza di insegnamento e l'attitudine dei docenti ad implementare metodologie cooperative. Sembrerebbe quindi che i docenti più giovani siano più disposti ad utilizzare tali strategie didattiche.

Per quanto riguarda la ricerca in Italia sull'implementazione di queste metodologie per l'apprendimento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado i risultati finora raggiunti sono abbastanza limitati, seppur promettenti, e risalgono ad un tempo recente (Baldrighi *et al.*, 2003; Faggiano, 2005; Pesci, 2011; Pesci *et al.*, 2015). Oltre alla limitatezza dei dati a disposizione, gli esiti finora raggiunti sono spesso solo di tipo qualitativo e non consentono di trarre conclusioni sull'effettivo miglioramento del rendimento degli studenti derivante dalla loro applicazione. Restano pertanto aperte ancora numerose questioni da indagare.

2. Cos'è la peer education?

In primo luogo vorremmo chiarire cosa si intende in questo articolo con il termine *peer education*. Nel passaggio dalla lingua inglese alla lingua italiana si tende spesso a utilizzare l'espressione *cooperative learning* per racchiudere l'insieme di tutte le pratiche didattiche basate sull'interazione tra pari attraverso la traduzione letterale '*apprendimento cooperativo*'. Al contrario tale insieme viene qui indicato mediante l'uso del vocabolo peer education, laddove con il termine cooperative learning si indica invece una specifica modalità caratterizzata da elementi peculiari che, pertanto, la rendono distinta da altre possibili strutture interattive (Damon e Phelps, 1989; Johnson *et al.*, 1996; Serrano *et al.*, 2008).

Alla luce di questa varietà di accezioni - presente soprattutto nei lavori italiani - si è cercato di uniformare il linguaggio rispetto alle considerazioni precedenti. In generale, a meno di opportune segnalazioni, è stata adottata la distinzione realizzata da Damon e Phelps (1989), i quali identificano tre approcci prioritari nella peer education: *peer tutoring*, *cooperative learning* e *peer collaboration*. In definitiva, vale la seguente relazione:

$$p_t\ , c_l\ , p_c\ \in P_e$$

p_t (peer tutoring), c_l (cooperative learning) e p_c (peer collaboration) appartengono all'insieme P_e (peer education) di tutte le pratiche didattiche di interazione tra pari

La modalità di peer tutoring presume l'assegnazione dei ruoli di tutori e di tutorandi, laddove si intende generalmente che i primi siano studenti aventi una maggiore padronanza della materia rispetto ai secondi. Vi è quindi una sostanziale differenza di status all'interno del gruppo, quasi a voler ricreare una situazione tradizionale di insegnante-studente con le dovute precisazioni: probabili mancanza di autorità e di piena conoscenza della disciplina da parte dei tutori ma, al tempo stesso, vicinanza emotiva con i tutorandi.

Il cooperative learning, come precisato precedentemente, racchiude tutte quelle forme di peer education caratterizzate generalmente dalla presenza di studenti eterogenei per competenze, in cui non è esplicitamente riconosciuto uno status differente tra i membri di un gruppo. L'organizzazione del lavoro può prevedere la suddivisione dei compiti tra i vari studenti o l'obbligo di occuparsi tutti insieme di una specifica attività.

Nella peer collaboration i gruppi sono formati in maniera tale che gli studenti abbiano circa gli stessi livelli di competenza e, a differenza del cooperative learning, essi sono chiamati a lavorare in ogni momento congiuntamente sullo stesso problema piuttosto che singolarmente su componenti separate. Nella sua forma originale questa modalità prevede che gli studenti lavorino insieme per risolvere compiti di apprendimento stimolanti che difficilmente riuscirebbero a risolvere da soli.

Posta questa dovuta precisazione, entriamo nel merito della questione. Parlando in generale di metodologie didattiche basate sull'interazione tra pari occorre distinguere le attività qui proposte dai generici lavori di gruppo. Secondo Comoglio (1996), una prima definizione di peer education può essere data nel seguente modo: "*un insieme di tecniche di conduzione della classe nelle quali gli studenti lavorano in piccoli gruppi per attività di apprendimento e ricevono valutazioni in base ai risultati conseguiti*". Non sarebbe però corretto identificare una situazione di peer education ogni qualvolta si formino dei lavori di gruppo in classe e si dica agli studenti di lavorare insieme su un dato compito. Secondo lo psicologo tedesco Lewin, "the essence of a group is not the similarity or dissimilarity of its members, but their interdependence… A change in the state of any subpart changes the state of any other subpart… Every move of one member will, relatively speaking, deeply affect the other members, and the state of the group" (1948, pp. 84-88). Ogni gruppo, pertanto, è caratterizzato da una propria *interdipendence*, vale a dire da una relazione di dipendenza reciproca tra i membri del gruppo in vista della realizzazione di uno scopo. Ebbene, ciò che contraddistingue un'attività di apprendimento tra pari è proprio la presenza di una interdipendenza di carattere positivo, la quale viene a crearsi nel momento in cui ogni membro percepisce di essere vincolato agli altri compagni come parte indispensabile per il raggiungimento di un obiettivo – *psychological group membership* – e si prodiga per il suo conseguimento – *sociological group membership* (Deutsch, 1949). Una volta raggiunto il proposito prestabilito, non è più possibile attribuire a una persona sola quanto è stato realizzato, ma sarà riconosciuto inequivocabilmente come un prodotto del gruppo (Deutsch, 1962). Gli studi successivi di Lew, Mesch *et al.* (1986) hanno dimostrato effettivamente che "group membership and interpersonal interaction among students do not produce higher achievement unless positive interdependence is clearly structured" (Johnson and Johnson, 1996, p. 793). Tale differenza in termini di efficacia viene altresì rappresentata graficamente da Johnson et al. mediante la curva di prestazione di un gruppo (Johnson *et al.*, 1996, p. 24).

Nel contesto appena descritto l'insegnante riveste un ruolo fondamentale come facilitatore e organizzatore dei processi di apprendimento, la cui responsabilità, però, si trasferisce gradualmente nelle mani degli studenti. Il docente non rappresenta più l'unico punto di riferimento né l'unica fonte di conoscenza, ma assume il compito di attivare, organizzare e responsabilizzare gli studenti verso questo nuovo tipo di lavoro. Nello specifico, i compiti dell'insegnante possono essere circoscritti a quattro azioni principali: la progettazione dell'attività, la gestione del contesto di apprendimento, la valutazione delle competenze e del lavoro di gruppo, e infine il consolidamento e la valutazione a livello individuale delle competenze cognitive sviluppate (Cacciamani, 2008).

La programmazione di un intervento didattico cooperativo deve quindi tenere ben presente questi fattori, così come gli aspetti teorici ed epistemologici caratteristici della disciplina oggetto di studio.

3. Le ricerche sperimentali sulla peer education

Non di rado si pensa ai lavori di gruppo come ad una possibile fonte di distrazione o, nel peggiore dei casi, ad un incentivo verso atteggiamenti e attività antisociali tra gli studenti (Damon, 1984). In realtà, ricerche condotte nel campo psicologico ed educativo hanno ormai mostrato i benefici che una corretta attuazione di un lavoro di interazione tra pari possa apportare allo sviluppo cognitivo di questi (Dansereau, 1985; Webb, 1985), ma anche sulle loro motivazioni e relazioni sociali (Slavin, 1990; Baldrighi *et al.*, 2007). Naturalmente risultati significativi sono riscontrabili solo dopo un'attenta e costante implementazione, la quale il più delle volte può arrivare anche ad occupare un anno di lavoro, lungo un cammino mai privo di insidie e possibili fallimenti (Carletti e Varani, 2005).

A onor del vero è opportuno ricordare come fino agli anni '80 del secolo scorso non tutti i risultati sperimentali mostravano degli effetti positivi sull'apprendimento derivanti dall'utilizzo di metodologie cooperative. Secondo Webb (1983) questa ambiguità era dovuta proprio al fatto che non tutti i tipi di interazione garantiscono l'acquisizione di conoscenza. Le ambiguità riscontrate agli inizi degli anni '80 sono state definitivamente acclarate in seguito alla realizzazione di numerose metanalisi, di cui ricordiamo soprattutto quelle svolte dal gruppo di ricerca del Cooperative Learning Center dell'Università del Minnesota coordinato dai fratelli Johnson (Johnson *et al.*, 1981; Johnson and Johnson, 1987; Johnson *et al.*, 1983, Johnson and Johnson, 1989). Questi studi hanno definitivamente dimostrato la superiorità delle metodologie cooperative in ambito educativo rispetto a quelle competitive e individualiste, laddove nelle prime gli studenti lavorano in competizione tra loro per ottenere delle valutazioni migliori rispetto a quelli dei compagni, mentre nelle seconde l'acquisizione di conoscenza avviene singolarmente e indipendentemente dalle performance degli altri (Johnson *et al.*, 1996). I risultati ottenuti possono essere così riassunti: "le situazioni cooperative sono sempre superiori a quelle competitive e individualiste, sia nel caso in cui si considerino queste in una forma pura sia considerando casi in cui si mescolino cooperazione e competizione all'interno o tra i gruppi; inoltre, non si constatano mai differenze significative tra le situazioni di competizione e quelle individualiste"[1] (Serrano *et al.*, 2008, pp. 116-117).

Alla luce delle conclusioni raggiunte da questa prima generazione di studi, i nuovi interessi di ricerca si sono suddivisi lungo quattro aree specifiche inerenti le dinamiche interne ai metodi di apprendimento cooperativo, la formazione degli insegnanti, come si apprende a cooperare e l'uso della peer education in aree specifiche del curricolo. Per quanto concerne il caso specifico dell'insegnamento-apprendimento della matematica, le prime ricerche sull'applicazione di metodologie cooperative in quest'area disciplinare non hanno mostrato in generale dei risultati significativi nell'apprendimento di concetti matematici e nello sviluppo di metodi di risoluzione di problemi (Davidson, 1979; Weissglass, 1979). Nonostante questo, nei casi di attività incentrate sull'uso di abilità basiche quali il calcolo, la comprensione di semplici concetti e la risoluzione di problemi elementari, i metodi che producevano dei risultati significativi erano quelli che prevedevano delle forme di motivazione estrinseca, come ad esempio un sistema di valutazione di gruppo basato sulle prestazioni individuali di ogni membro. Tali metodi nello specifico sono il TGT – Teams Games Tournament (De Vries and Slavin, 1978), lo STAD – Student Teams Achievement Divisions (Slavin, 1978) e il TAI – Team Accelerated Instruction (Slavin, 1985) creati da Slavin e dal suo gruppo di ricerca.

[1] Traduzione italiana dallo spagnolo a cura dell'autore.

Per quanto riguarda gli aspetti legati al tipo di interazione da instaurare tra gli alunni, le prime ricerche in questo ambito si sono concentrate soprattutto sulle forme di tutoring, in cui si è osservato che i miglioramenti registrati nel rendimento degli alunni erano quelli legati al verificarsi di spiegazioni dettagliate da parte dei tutori, piuttosto che a semplici risposte affermative o negative in merito alle soluzioni determinate dai tutorandi (Devin-Sheeman, Feldman and Allen, 1976).

Le successive ricerche basate sull'osservazione di *learning groups* hanno poi mostrato come l'interazione tra pari possa contribuire alla formulazione e alla condivisione di rappresentazioni multiple di uno stesso problema o di un'idea (Smith *et al.*, 1981) e allo sviluppo del pensiero critico (Johnson *et al.*, 1991). In seguito agli studi di Webb (1991) sono stati individuati alcuni elementi significativi che influiscono sull'apprendimento della matematica nei *peer-directed small groups*. Fornire spiegazioni dettagliate ad altri studenti migliora fortemente i risultati di apprendimento, così come, al contrario, ricevere solamente dei feedback sintetici o delle risposte corrette senza alcun commento esplicativo provoca addirittura dei peggioramenti. La composizione dei gruppi, le abilità dei singoli studenti, la loro percezione della materia sono tutti fattori che esercitano un'importante influenza sulle interazioni di gruppo.

Le migliorie e gli aggiustamenti apportati dalle ricerche degli ultimi trent'anni hanno definitivamente permesso di dimostrare anche nell'area matematica la supremazia della peer education - qualsiasi sia la forma nella quale si presenti - rispetto alle altre strategie didattiche (Hossain & Tarmizi, 2013; Lehrer & Lesh, 2013; Nunnery, Chappell, & Arnold, 2013; Zakaria *et al.*, 2013).

Alla luce di questi significativi risultati internazionali, negli ultimi cinque anni sono state portate avanti presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Ferrara delle ricerche sperimentali sull'insegnamento delle funzioni lineari in modalità cooperativa. Le sperimentazioni sono state svolte in classi prime afferenti a dei Licei Linguistici, indirizzi in cui la matematica non rappresenta una delle discipline caratterizzanti e il cui insegnamento prevede solo tre ore alla settimana. Obiettivo di queste ricerche era quello di disporre di una indagine sui comportamenti adottati da studenti italiani chiamati per la prima volta a impegnarsi all'interno di gruppi di lavoro su argomenti curricolari di matematica (Spagnuolo, 2017). Le percezioni positive rilevate tra gli studenti e gli insegnanti coinvolti in merito all'innovatività delle metodologie utilizzate e agli aspetti motivazionali e affettivi ad esse connesse non devono però distogliere l'attenzione da determinate situazioni problematiche che possono crearsi durante il percorso didattico. Nella prossima sezione analizzeremo alcune delle problematiche riscontrate nello sviluppo di processi argomentativi in situazioni di scoperta.

4. Descrizione dell'attività didattica

Nell'insegnamento-apprendimento della matematica la risoluzione di ostacoli in ambito cognitivo, specie di fronte ad attività di scoperta, passa attraverso la capacità di mettere a fuoco le proprie idee e i propri dubbi sul problema in questione. Fondamentali in questa circostanza risultano essere le capacità di argomentare e di congetturare, le quali possono essere definite in questo modo: *processi eminentemente discorsivi che risultano da un intreccio tra rappresentazioni simboliche (come segni dell'aritmetica e figure geometriche) e attività discorsive su queste, con cui il soggetto dà significato ad enunciati matematici che sono generalmente di tipo misto (segni specifici del linguaggio simbolico proprio della matematica e parole del linguaggio naturale)* (MIUR-UMI-SIS, 2003).

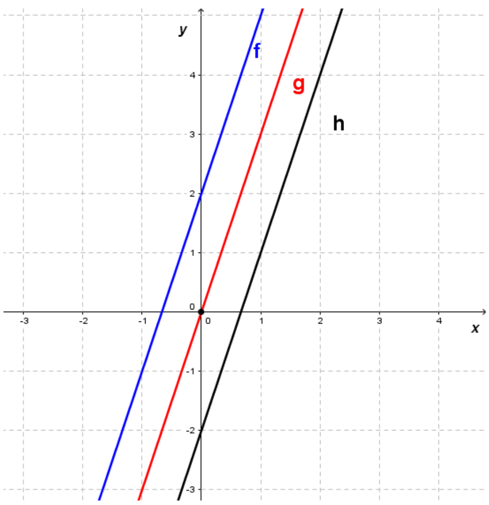
La simbiosi tra l'elaborazione di azioni di tipo cooperativo e lo sviluppo di capacità argomentative rappresenta una componente essenziale nella costruzione comune di conoscenza matematica. Si è pertanto qui considerato ogni atto conoscitivo come "un'attività che coinvolge sempre tutte le componenti delle persone, ad esempio la sensibilità, le emozioni, l'impegno, l'assunzione di rischi, le decisioni, le scelte, le credenze, il rispetto per gli altri" (Pesci, 2003, p. 527), il cui campo di azione si sviluppa all'interno di una '*discussione matematica*' definita come un "purposeful talk on a mathematical subject in which there are genuine pupil contributions and interaction" (Pirie e Schwarzenberger, 1988).

Per questa ragione, nell'elaborazione delle attività didattiche sulle funzioni lineari oggetto di questo studio si è cercato di favorire lo sviluppo dell'argomentazione, la quale verrà analizzata nei protocolli di interazione sulla base dei seguenti costrutti linguistici (Pesci, 2016): a) Il ragionamento per assurdo; b) Il ragionamento condizionale; c) Esempi e controesempi; d) L'utilizzo di più componenti di rappresentazione; e) La presenza di verbalizzazione in strategie risolutive "autonome".

In questo articolo ci soffermeremo in particolare sull'analisi del seguente problema di scoperta relativo al significato geometrico dei coefficienti *m* e *q* di una generica funzione lineare.

1) Sul piano cartesiano sottostante sono riportati i grafici delle funzioni:

- $\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$;
- $\boldsymbol{g(x) = 3x}$;
- $\boldsymbol{h(x) = 3x - 2}$.



Quale coefficiente differisce tra le funzioni? Su cosa e in che modo influisce questo coefficiente sull'andamento del grafico?

Nelle attività precedenti era già stata introdotta la definizione formale di funzione lineare, la sua rappresentazione algebrica del tipo $f(x) = mx + q$ e la sua rappresentazione grafica mediante l'individuazione di due punti sul piano cartesiano. Con questa attività gli studenti erano chiamati ad elaborare alcune congetture in merito all'influenza del coefficiente q sull'andamento dei grafici delle tre rette.

5. Analisi dei protocolli di interazione

In questa sezione verranno illustrati i protocolli di interazione relativi a tre gruppi di studenti che hanno lavorato sul problema prima descritto. I tre gruppi appartengono a classi differenti organizzate secondo diverse modalità cooperative: peer tutoring, cooperative learning e peer collaboration. Nonostante le possibili implicazioni legate all'utilizzo di una specifica modalità, l'analisi di questi dialoghi ha come primo obiettivo quello di individuare le difficoltà caratteristiche dei costrutti linguistici prima citati. La trascrizione ha inizio subito dopo il termine della lettura della traccia.

Caso Peer Tutoring

Modalità		Peer Tutoring
Ruoli		Tutor: Paola; Tutorandi: Rachele e Natalia
1	P.	Quale coefficiente differisce tra le funzioni … Cioè qua … è sempre 3x, ma qua è -2, qua 0 e qua +2 (indica le rappresentazioni algebriche).
2	R.	Però cosa vuol dire? (silenzio)
3	P.	Non capisco …
4	R.	Allora aspetta …
5	P.	Cioè forse è questo che cambia … (silenzio)
6	P.	Quale coefficiente differisce tra le funzioni? Ah io scrivo +2, 0 e -2. Va bene?
7	P.	(silenzio assenso) Su cosa e in che modo influisce questo coefficiente sull'andamento del grafico? Cioè … si spostano sull'asse delle x. Va bene? Cioè, perché uno è qua, uno è qua e uno è qua (indicando il grafico delle tre rette).
8	R.	Sì sì.
9	N.	(silenzio, P. trascrive)
10	P.	Non capisco cosa stai dicendo.
11	N.	Cioè semplicemente che in base al + 2, al 0 e al -2 si spostano … non so se hai capito … cioè vedi sono tutte parallele.

12	P.	Al +2, 0 e -2?
13	R.	Esatto.
14	P.	Però aspetta un attimo …
		Aspetta un attimo, scusa …
15	P.	(silenzio prolungato)
16	R.	Cioè avete capito perché ho scritto così?
		Sì sì certo però … secondo me non va bene …
17	N.	(silenzio)
18	P.	Cioè tu hai preso questi tre e li hai scritti?
		Sì, cioè vedi che è tutto uguale: 3x, 3x e 3x, tranne +2, 0 e -2 e quindi li ho scritti. E che cosa cambia? Che si spostano sull'asse …
19	P.	(silenzio)
		Aspetta un attimo … Forse ho capito …
20	P.	(silenzio)
		+2, 0 e -2 (indica con le dita le intersezioni con l'asse delle y). Passano tutte per … cioè quella che ha +2 passa per +2, quella che ha 0 passa per
21	R.	l'origine e quella che ha -2 passa per -2.
22	P.	E' vero! Sei un genio! Forse è così.
23	R.	Allora si spostano sull'asse delle y … Sì, sull'asse delle y si spostano …
24	P.	Sì, perché sono …
25	R.	Hai capito cosa ho detto?
26	P.	Sì, cioè …
		Quella che ha +2 passa per +2, quella che ha 0 passa per l'origine e quella
27	R.	che ha -2 passa per -2.
28	P.	Bon, ci proviamo, poi vediamo se è giusto.
		Ok.

La mancanza di risposte più o meno elaborate da parte di Rachele e Natalia rispetto alle riflessioni di Paola fa pensare che non vi sia stata una reale comprensione del problema assegnato. Sicuramente le richieste di chiarimenti, implicite o esplicite che siano [2, 9], sono un segnale positivo, in quanto di fronte ad una difficoltà non ci si chiude nel silenzio ma si cerca in un compagno/a una qualche forma di aiuto. Durante queste fasi è tutto il gruppo che ne trae vantaggio, in quanto lo stesso studente avente una strategia risolutiva è chiamato a rispiegare e a rielaborare i suoi pensieri, in modo tale da renderli più chiari ai richiedenti [10, 18]. Pur non sapendo se direttamente o indirettamente, ciò potrebbe anche aver permesso a Paola stessa di perfezionarsi e di trovare una soluzione ancora più precisa della prima data [19, 20]. Dal punto di vista dei costrutti linguistici utilizzati, è possibile riscontrare l'utilizzo da parte di Paola di più componenti di rappresentazione [simbolica 1, 18; testuale 7, 10, 18; grafica 7, 10, 20] e di forme di verbalizzazione 'autonome', come ad esempio il semplice ripetere ad alta voce i quesiti prima di esprimere la propria idea risolutiva [1, 6, 7] o l'utilizzo di domande retoriche [18]. Mancano sicuramente degli esempi di ragionamento per assurdo, di esempi e controesempi diversi dai tre dati (*f*, *g* e *h*) e, soprattutto, di ragionamento condizionale. Non si è riusciti infatti a generalizzare in maniera chiara la rappresentazione grafica del coefficiente *q*, il quale tra l'altro non è stato mai nominato, ma solo citato attraverso i casi numerici trattati (+2, 0 e -2).

Caso Cooperative Learning

Modalità		Cooperative Learning
Componenti		Vittorio, Ana Maria, Lucia, Giorgia
1	L.	Non credo che influisca in nessun modo visto che le linee vanno tutte nella stessa direzione.
2	A.M.	Vanno tutte nella stessa direzione, ma non sono nello stesso punto.
3	L.	Sì, lo so che non sono nello stesso punto, ci mancherebbe altro.
4	A.M.	E allora cambia.
5	V.	Q… q cambia tra le varie… cose… guarda, prima è +2…
6	L.	Q è sempre uguale.
7	V.	No.
8	L.	Ah giusto, quella è m, giusto.
9	V.	Q è +2, poi dopo qui è 0 …
10	A.M.	Ah, tu dici che mantenendo sempre lo stesso …
11	L.	Coefficiente, cioè lo stesso coefficiente numero uno e coefficiente numero due.
12	A.M.	No dico lo stesso … non so come dire …
13	L.	Aspetta, dice: quale coefficiente differisce, allora intanto la prima risposta è il coefficiente q.
14	A.M.	Ok, allora scrivo: il coefficiente che differisce è q … e influisce su cosa?
15	V.	Nel differire il punto di intersezione della retta con l'asse x e y.
16	A.M.	Come?
17	V.	Nel differire il punto di intersezione della retta con l'asse x e y, tra la retta e gli assi.
18	A.M.	Tra le rette.
19	V.	Tra una retta e gli assi.
20	G.	Non sto capendo niente.
21	A.M.	Aspetta un attimo, fammi finire di scrivere e dopo riproviamo a ragionarci …allora, e influisce… ripeti.
22	V.	Influisce sul punto di intersezione della retta con gli assi x e y.
23	A.M.	Sul punto di intersezione o sui punti? Perché si interseca …
24	V.	Sui punti.
25	L.	Eh son due … però mica tutte le intersecano l'asse y, solo una.
26	V.	Sui punti di intersezione delle rette con gli assi, con gli assi x e y, quindi individua il punto di intersezione tra le rette e gli assi x e y, che può essere uno o due.
27	A.M.	Mah, comunque è giusto dire sui punti di intersezione.

28	L.	Scrivi sui punti di intersezione e non farti problemi. (A.M. scrive)
29	A.M.	Tra l'ascissa e l'ordinata?
30	V.	Tra le rette e l'ascissa e l'ordinata. (L. prova a girare il foglio e A.M. la ferma)
31	A.M.	Aspetta, aspetta, aspetta, cos'è… (rivolta a G.)
32	L.	Cos'è che non avevi capito? Tutto?
33	G.	Qui su q, non ho capito.
34	A.M.	Allora q è la parte … è sempre lo stesso schema, no? Come quello lì: $mx + q$ (indica la lavagna).
35	G.	Aaaa!
36	A.M.	È sempre lo stesso schema soltanto che cambia ...
37	V.	Può esserci $q, mx, mx + q$ (si riferisce ai tre casi possibili di rette)
38	A.M.	È sempre lo stesso stampino che viene ripetuto ogni volta, soltanto che cambia con qualche particolare…
39	G.	Ok.

Una delle situazioni più problematiche che possono verificarsi durante i lavori di gruppo è rappresentata dalla tendenza di uno dei membri ad imporsi a ogni costo sugli altri. Ciò rientra nella casistica di quella che in letteratura viene denominata *deviazione fusionale* (Carletti e Varani, 2005, p. 185). Sin dalle prime battute, infatti, è possibile notare una certa irruenza da parte di Lucia, la quale pretende che la sua affermazione [1] sia accettata dagli altri senza apportare alcuna giustificazione. Il comportamento adottato da Ana Maria sembrerebbe riuscire ad arginare tale intento, anche se Lucia continuerà, seppur in forma ridotta, a seguire la sua condotta [3, 28].

L'analisi delle dinamiche sociali si intreccia fortemente con l'uso dei costrutti linguistici relativi all'argomentazione in matematica. Le risposte puntuali di Ana Maria [2, 4] descrivono un buon esempio di uso del ragionamento condizionale, il quale costituisce un ottimo strumento di contrasto degli atteggiamenti predominanti.

Superata questa prima fase controversa, la discussione continua grazie agli interventi di Vittorio, il cui uso del solo registro verbale [15, 17, 19, 22, 24, 26, 30], non coadiuvato da forme di rappresentazione simbolica e grafica, non facilita la comprensione degli altri compagni [16, 20] (e forse anche di Vittorio stesso), i quali si limitano ad accettare e registrare per iscritto la prima risposta data senza troppe discussioni [21, 28]. Allo stesso tempo, il ripetersi della stessa espressione [15, 17, 22] per illustrare la propria strategia risolutiva non è indice di una piena consapevolezza della tesi sostenuta.

Di positivo c'è sicuramente il tentativo chiarificatore di Ana Maria e Vittorio nei confronti di Giorgia in merito agli oggetti matematici coinvolti, vale a dire i coefficienti *m* e *q* [34, 36, 37, 38]. In queste espressioni è possibile osservare l'uso di rappresentazioni simboliche come sussidi alla spiegazione verbale del quesito in esame. Tuttavia, l'assenza di descrizioni dettagliate da parte di Giorgia [33] e di rielaborazioni delle informazioni ricevute [39] potrebbero rappresentare degli indizi di una parziale comprensione del problema.

Caso Peer Collaboration

Modalità		Peer Collaboration
Componenti		Cesare, Sofia, Gaia, Sara
1	G.	Devo leggerle?
2	SO.	Adesso guardiamo …
3	G.	Allora $f(x) = 3x + 2$ quindi … qual è?
4	S.	Questa (indica sul grafico), quella viola.
5	G.	No, sicura?
6	SO.	È la più scura, cioè a parte (indica la funzione h di color nero) …
7	C.	Sta roba mi sembra già …
8	SO.	La seconda è questa più chiara e la terza è quella nera ... Ah sì, c'è anche scritto f, g e h!
9	SA.	Quindi 3 è sempre m … +2, 0 … o 1? ... +2, 0 e -2 è q.
10	SO.	Sì… qual è la domanda?

In questo gruppo alcuni membri hanno tenuto a illustrare la situazione di partenza ancor prima di leggere la domanda assegnata (si veda la tabella soprastante). Si tratta chiaramente di un esempio di verbalizzazioni atte a esplicitare i significati delle componenti simboliche e grafiche presenti nella traccia. Questo atteggiamento (ahimè non scontato tra gli studenti) rivela un'attenzione particolare verso la lettura del quesito assegnato che, probabilmente, permetterà al gruppo (o perlomeno ai membri coinvolti in questa analisi a priori) di essere più consapevole circa la tesi richiesta.

Modalità		Peer Collaboration
Componenti		Cesare, Sofia, Gaia, Sara
11	G.	Allora quale coefficiente differisce tra le funzioni? Su cosa e in che modo influisce questo coefficiente sull'andamento del grafico?
12	SO.	Quale coefficiente differisce tra le funzioni…
13	C	G (indica il grafico della retta g).
14	SA.	Son tutte diverse invece… la m è 3 (indica le rappresentazioni algebriche sul foglio).
15	G.	Cioè?
16	SO.	Ah è vero!
17	C.	G.
18	G.	Non capisco, non ho capito.

19	SO.	Aspetta (gira il foglio).
20	SA.	I coefficienti sono m e q…
21	SO.	M e q, vero.
22	SA.	M è in tutte le funzioni 3 e q invece cambia, prima è -2, poi 2 …
23	SO.	Nel secondo non c'è, cioè non c'è il coefficiente.
24	SA.	Prima è 2, poi è 0 e poi è -2, quindi quello è…
25	G.	Quindi la g?
26	SA.	Ma perché g?
27	G.	Ma non c'è q?
28	SA.	Il coefficiente, i coefficienti sono solo m e q, questi due, quella è la funzio-
29	G.	ne.
30	C.	Aaa, ah ok… quindi il coefficiente è q. Devi scrivere tu?
31	SO.	Perché? Perché? Cosa state dicendo?
32	G.	Se avessi ascoltato prima mentre stava leggendo lei, magari …
33	C.	Allora, dobbiamo dire qual è il coefficiente che differisce tra le funzioni?
34	SA.	Cos'è un coefficiente?
35	SO.	Il coefficiente è quello che abbiamo letto prima.
36	G.	Esatto, mentre tu stavi guardando la telecamera!
37	SO.	M è quello prima della x, questo qui (indicandolo) e la q è…
38	G.	La q è un numero…
39	C.	Dei numeri reali, no… è un numero razionale.
40	G.	Aaa ok.
		Allora… su cosa e in che modo influisce questo coefficiente sull'andamento del grafico?
41	SA.	(silenzio)
42	C.	Allora là viene… il primo è +2… eh, sono sempre minori…
43	SA.	Ah quindi questo è il coefficiente?
44	C.	Sì, quei due lì sono i coefficienti (indicando le formule).
45	SA.	Questa rappresenta cos'è la funzione?
		Il primo pezzo è la funzione, questa riga (intende colonna indicando le rap-
46	SA.	presentazioni algebriche) qua è m e questa è q.
47	SO.	Secondo me è che… qua diminuisce…
48	SA.	Ma rispetto a cosa diminuisce?
49	C.	Prima qui è +2, poi è 0 e poi è - … cioè va sempre di 2!
50	G.	Eh, g differisce, non ha né il +2 né il -2!
51	C.	Ah anch'io pensavo g all'inizio, ma invece dice qual è il coefficiente...
		Aaaaaah il coefficiente!
52	C.	(silenzio)
53	SO.	F e g sono uguali…
54	C.	No, non sono uguali!
		Ma si, una sta + 2 e sta qua, una sta – 2 e sta qua … son tre linee parallele
55	SO.	…
56	SA.	Esatto, son parallele, non sono uguali!
57	C.	-2, 0 e +2 (indicando le intersezioni delle rette con l'asse y).
		Cosa vuol dire, anche se sono piazzate in posizioni diverse, sono uguali…

58	SA.	facci caso.
59	G.	No, secondo me no.
60	C.	Sono parallele, però non sono uguali.
61	G.	Qui c'è scritto…
62	SA.	Ma no! Appunto!
63	C.	Quelle due lì sono…
64	SO.	Passiamo al prossimo esercizio…
65	C.	Noooo, dobbiamo fare solo il primo!
66	SA.	Aaa, solo questo?
67	G.	Finisce lì l'esercizio 1?
		Sì.
68	G.	(silenzio)
		In che modo influisce questo coefficiente… secondo me come ha detto la
		Sara, che diminuisce sempre di 2… perché qua è vero, qua è vero… (indi-
69	SO.	cando sul grafico)
70	SA.	È vero, è vero hai ragione. Perché… perché… è vero, quindi… Quindi…
		Questo coefficiente influisce sull'andamento del grafico diminuendo le fun-
71	G. e S.	zioni di due in due.
		Sì scriviamo.

In questo protocollo ritroviamo per la prima volta alcune forme di ragionamento condizionale ad opera di Sara. All'inizio e alla fine della discussione, infatti, ritroviamo delle forme implicite del tipo *"…quindi…"* volte ad illustrare in maniera logico-consequenziale le risposte rispettivamente al primo e al secondo interrogativo [22-24, 70]. Il dibattito purtroppo si inasprisce ad un certo punto con l'inserimento di Cesare, rimasto inizialmente indietro in quanto distratto dalla telecamera. Nonostante i chiarimenti ricevuti sulla risoluzione della prima parte, Cesare pretende di avere ragione senza addurre delle motivazioni valide, ma anzi confondendosi tra uguaglianza e parallelismo tra rette [57]. Sara ad un certo punto sembra aver individuato la risposta al secondo quesito [56], ma il gruppo è ormai concentrato nel controbattere alle affermazioni di Cesare. Malgrado l'utilizzo ad opera di tre membri del gruppo di svariati costrutti linguistici con l'intento di raggiungere una idea condivisa, le dinamiche sociali legate all'influenza di un singolo membro hanno preso il sopravvento sullo sviluppo dei processi argomentativi in atto. Ciò ha provocato una diminuzione delle verbalizzazioni interpretative, fino ad arrivare ad una decisione finale non del tutto compresa e giustificata [68, 69].

6. Riflessioni finali e prospettive future

Lo sviluppo di processi argomentativi rappresenta uno degli obiettivi principali dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado. La stessa UMI-CIIM, nella sua proposta di curricolo "*Matematica 2003*" (MIUR-UMI-SIS, 2004) per la scuola secondaria di II grado, denominò un intero nucleo trasversale "*argomentare, congetturare, dimostrare*", proponendo in esso delle attività che favoriscono il passaggio dalle nozioni intuitive a forme di pensiero più rigoroso e sistematico. Ciò non è banale, perché così come sono importanti le regole grammaticali per l'insegnamento della lingua italiana o delle lingue straniere, anche in matematica occorre definire, studiare e fare propri gli strumenti di lavoro caratterizzanti questa disciplina. Se non vengono proposti esempi di ragionamento per assurdo o di ragionamento condizionale, difficilmente uno studente li utilizzerà al momento di argomentare le sue idee.

Dall'analisi dei protocolli si evince per l'appunto questa difficoltà nel giustificare le proprie affermazioni, sia in casi impliciti che espliciti di richieste di chiarimento. L'assenza di una analisi completa e puntuale della traccia, la scelta di operare sin da subito sui valori numerici, la trascrizione della prima idea avuta in mente senza alcuna discussione aggiuntiva rappresentano tutte situazioni facilmente verificabili, ma difficilmente modificabili senza alcuno intervento. In mancanza di questo, prevalgono quindi dei comportamenti che, il più delle volte, sfociano in dinamiche sociali allarmanti, come i casi già citati di deviazione fusionale o situazioni di polarizzazione e di deriva produttivistica (Carletti e Varani, 2005).

Un primo intervento migliorativo adottato durante i lavori ha visto l'assegnazione di un ruolo di presentatore in ciascun gruppo. Tale studente era incaricato di elaborare una proposta orale da presentare all'intera classe in rappresentanza del proprio team. Si è voluto in questo modo ricreare a livello globale una seconda *mathematical discussion*, questa volta diretta dall'insegnante, il cui compito era quello di stimolare e mostrare all'intera classe esempi di argomentazioni valide ed elaborate. Tali suggerimenti, il più delle volte proposti sotto forma interrogativa, sono stati in parte ripresi da quelli elaborati da Polya nel suo celebre libro *"How to solve it"* (1957). Porsi le giuste domande durante lo svolgimento di un esercizio o nella discussione di un problema è fondamentale per la scelta delle decisioni strategiche da intraprendere. Quando poi queste decisioni vanno prese insieme con altri soggetti allora occorre prestare attenzione anche alle relazioni interpersonali che inequivocabilmente si vengono a creare. Come forma di controllo è stato quindi assegnato un ruolo di mediatore, i cui compiti erano quelli di moderare la discussione (assicurandosi che i membri del gruppo rispettassero i turni di intervento) e di incoraggiare la partecipazione (assicurandosi che tutti i componenti del gruppo dessero il loro contributo).

Tutti questi accorgimenti sono stati affiancati da momenti di riflessione e di sviluppo di abilità metacognitive (Schoenfeld, 1987) mediante la visione di spezzoni di filmati dei lavori di gruppo realizzati nella stessa classe. L'influenza di questo specifico intervento non è al momento valutabile e rappresenta un interessante campo di ricerca da sviluppare in futuro. È auspicabile che l'attenzione rivolta all'auto-analisi possa contribuire efficacemente ad un miglioramento sia delle dinamiche sociali che della qualità dei dialoghi matematici.

Ulteriori ricerche sull'argomento sono sicuramente necessarie per evidenziare eventuali collegamenti tra lo sviluppo di abilità argomentative e la specifica modalità di interazione utilizzata (peer tutoring, cooperative learning e peer collaboration). Rendere più chiaro questo quadro di riferimento permetterebbe di facilitare il lavoro di tutti quei docenti interessati a sperimentare e utilizzare queste metodologie nella loro pratica quotidiana.

7. Bibliografia

Baines, E., Blatchford, P., & Kutnick, P. (2008). Pupil grouping for learning: developing a social pedagogy in the classroom. In R. Gillies, A. Ashman, & J. Terwel (Eds.), *The teacher's role in implementing cooperative learning in the classroom* (pp. 55-71). New York: Springer.

Baldrighi, A., Bellinzona, C., & Pesci, A. (2007). Una esperienza sull'intreccio di linguaggi per un uso consapevole di simboli matematici. In R. Imperiale, B. Piochi, P. Sandri (Eds.), *Atti del Convegno Nazionale n. 15 Matematica e difficoltà: I nodi dei linguaggi* (pp. 60-65). Bologna: Pitagora.

Baldrighi, A., Pesci, A., & Torresani, M. (2003). Relazioni disciplinari e sociali nell'apprendimento cooperativo. Esperienze didattiche e spunti di riflessione. *Matematica e Difficoltà*, 12, 170-178.

Cacciamani, S. (2008). *Imparare cooperando: dal cooperative learning alle comunità di ricerca*. Roma: Carocci.

Carletti, A., & Varani, A. (Eds.) (2005). *Didattica costruttivista: dalle teorie alla pratica in classe*. Trento: Edizioni Erickson.

Cavalli, A. (a cura di) (2000). *Gli insegnanti nella scuola che cambia: seconda indagine IARD sulle condizioni di vita e di lavoro nella scuola italiana*. Bologna: il Mulino.

Cavalli, A., Argentin, G. (a cura di) (2010). *Gli insegnanti italiani: come cambia il modo di fare scuola: terza indagine dell'Istituto IARD sulle condizioni di vita e di lavoro nella scuola italiana*. Bologna: il Mulino.

Comoglio, M. (1996). Verso una definizione del Cooperative Learning. *Animazione Sociale*, 4.

Damon, W. (1984). Peer education: The untapped potential. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 5, 331-343.

Damon, W., & Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International Journal of Educational Research*, 13(1), 9-19.

Dansereau, D. F. (1985). Learning strategy research. In J. Segal, S. Chipman, & R. Glaser (Eds.). *Thinking and learning skills. Relating instruction to basic research (Vol. 1)*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Davidson, N. (1979). The small group discovery method: 1967-1977. In J. Harvey & T. Romberg (Eds.). *Problem solving studies in mathematics*. Wisconsin Research and Development, Center for Individualized Schooling, University of Wisconsin. Madison.

De Vries, D. L., & Slavin, R. E. (1978). Teams-Games-Tournaments (TGT): Review of Ten Classroom Experiments. *Journal of Research and Development in Education*, 12(1), 28-38.

Deutsch, M. (1949). A Theory of cooperation and competition. *Human Relations*, 2(2), 129-152.

Deutsch, M. (1962). Cooperation and trust: Some theoretical notes. In M. R. Jones (Ed.) *Nebraska Symposium on Motivation* (pp. 275-319). Lincoln: University of Nebraska Press.

Devin-Sheehan, L., Feldman, R.S., & Allen, V. L. (1976). Research on children tutoring children: A critical review. *Review of Education of Research*, 46, 355-385.

Faggiano, E. (2005). Apprendimento Cooperativo in matematica con le tecnologie di rete. *Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno*, 208-211.

Gillies, R.M., & Boyle, M. (2010). Teachers' reflections on cooperative learning: Issues of implementation. *Teaching and Teacher Education*, 26(4), 933-940.

Hossain, A., & Tarmizi, R.A. (2013). Effects of cooperative learning on students' achievement and attitudes in secondary mathematics. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 93, 473-477.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1987). *A meta-analysis of cooperative, competitive and individualistic goal structures*. Hillsdale, NJ.: LEA.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1989). *Cooperation and competition: Theory and research*. Interaction Book Company.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1996). Cooperation and the use of technology. *Handbook of research for educational communications and technology: A project of the Association for Educational Communications and Technology*, 785-811.

Johnson, D. W., Johnson, & R. T., Holubec, E. J. (1996). *Apprendimento cooperativo in classe*. Trento: Erickson.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Maruyama, G. (1983). Interdependence and interpersonal attraction among heterogeneous and homogeneous individuals: A theoretical formulation and a meta-analysis of the research. *Review of Educational Research*, 53(1), 5-54.

Johnson, D. W., Johnson, R.T., & Smith, K. A. (1991). Cooperative learning: Increasing college faculty instructional productivity. In *ASHE-ERIC Higher Education Report No. 4*. The George Washington University, School of Education and Human Development: Washington, D.C.

Johnson, D. W., Maruyama, G., Johnson, R., Nelson, D., & Skon, L. (1981). Effects of cooperative, competitive, and individualistic goal structures on achievement: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 89(1), 47.

Lehrer, R., & Lesh, R. (2013). Mathematical learning. In W. M. Reynolds, & G. E. Miller (Eds.). *Handbook of psychology. Vol. 7: educational psychology* (pp. 283-320). Hoboken, NJ: Wiley & Sons.

Lew, M., Mesch, D., Johnson, D. W., & Johnson, R. (1986). Components of cooperative learning: Effects of collaborative skills and academic group contingencies on achievement and mainstreaming. *Contemporary Educational Psychology*, 11(3), 229-239.

Lewin, K. (1948) *Resolving social conflicts; selected papers on group dynamics*. Gertrude W. Lewin (Ed.). New York: Harper & Row, 1948.

MIUR-UMI-SIS (2003). *Matematica 2001. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola Primaria e Scuola Secondaria di primo grado*. Liceo Vallisneri, Lucca.

MIUR-UMI-SIS (2004), *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola Secondaria di secondo grado*. Liceo Vallisneri, Lucca.

Nunnery, J. A., Chappell, S., & Arnold, P. (2013). A meta-analysis of a cooperative learning models effects on student achievement in mathematics. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 8(1), 34-48.

Pesci, A. (2003). Insegnanti di matematica e studenti: come migliorare il lato umano delle loro relazioni?. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 26B(4), 521-545.

Pesci, A. (2011). Studi di esperienze collaborative in presenza per una loro eventuale implementazione on-line. *TD – Tecnologie Didattiche*, 19(3), 183-188.

Pesci, A. (2016). L'interazione fra pari per favorire l'abilità argomentativa di studenti "bravi" nella soluzione di problemi matematici: i risultati di uno studio. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 39A(1), 61-74.

Pesci, A., Sgrignoli, M., Andreoletti, M., Scarpaci, C., Turlon, S., (2015). Aspetti metodologico-didattici nell'apprendimento collaborativo della matematica e sperimentazione di percorsi disciplinari, Aisberg (Archivio istituzionale Università degli Studi di Bergamo), Working papers MEQ. *Education Series*, reperibile direttamente all'indirizzo: https://aisberg.unibg.it/retrieve/handle/10446/36451/30206/1-2015_education_con_cover.pdf.

Pirie, S. E. B., & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 19(4), 459-470.

Polya, G. (1957). *How to Solve it: A New Aspects of Mathematical Methods* (2nd Ed.). Prentice University Press.

Saborit, J. A. P., Fernández-Río, J., Estrada, J. A. C., Méndez-Giménez, A., & Alonso, D. M. (2016). Teachers' attitude and perception towards cooperative learning implementation: Influence of continuing training. *Teaching and Teacher Education*, 59, 438-445.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Eds.). *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215).

Serrano, J. M., González-Herrero, M. E., Pons, R. M. (2008). *Aprendizaje cooperativo en Matemáticas. Diseño de actividades en Educación Infantil, Primaria y Secundaria*. Universidad de Murcia. Servicio de Publicaciones.

Slavin, R. E. (1978). Student teams and achievement divisions. *Journal of Research and Development in Education*, 12(1), 39-49.

Slavin, R. E. (1985). Cooperative learning: Applying contact theory in desegregated schools. *Journal of Social Issues*, 41(3), 45-62.

Slavin, R. E. (1990). *Cooperative learning. theory, research, and practice*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Smith, K., Johnson, R.T., & Johnson, D.W. (1981). Can conflict be constructive? Controversy versus concurrence seeking in learning groups. *Journal of Educational Psychology*, 73(5), 651-663.

Spagnuolo, A. (2017). *The effects of the equality parameter on mathematics students' performance. A comparative analysis of Peer Education interventions in teaching-learning of linear and quadratic functions*. Tesi di dottorato. Università degli Studi di Ferrara.

Thanh, P. T. H. (2011). An Investigation of Perceptions of Vietnamese Teachers and Students toward Cooperative Learning (CL). International Education Studies, 4(1), 3-12.

Webb, N. M. (1983). Predicting learning from student interaction: Defining the interaction variable. *Educational Psycholgist*, 18, 33-41.

Webb, N. M. (1985). Student interaction and learning in small groups: A research summary. In R. E. Slavin, S. Sharan, S. Kagan, R. Hertz-Lazarowitz, C. Webb, & R. Schmuck (Eds.). *Learning to cooperate, cooperating to learn* (pp. 147-172). New York: Plenum.

Webb, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small group. *Journal of Research in Mathematics Education*, 22, 366-389.

Weissglass, J. (1979). *Exploring elementary mathematics. A small-group approach for teaching*. San Francisco, CA: WH Freeman.

Zakaria, E., Solfitri, T., Daud, Y., & Abidin, Z. Z. (2013). Effect of cooperative learning on Secondary school students' mathematics achievement. *Creative Education*, 4, 98-100.

Received October 10, 2017
Revision received December 3, 2017/December 4, 2017
Accepted January 12, 2018

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 146-173 – ISSN 2038-1034

La progettazione a ritroso di un percorso didattico di Geometria.
Un esempio nel contesto della formazione insegnanti del settore primario

Gemma Carotenuto
Mario Castoldi
Silvia Sbaragli

Abstract – *This article presents the teaching design work carried out within a course in Geometry and Geometric Teaching, which is part of a university course for the formation of primary school teachers. The aim is to show the possible advantages of the “backward design”, through a practical example accompanied by the critical reflections of the course teacher. This design reverses the traditional scheme, in which the teacher starts by programming the teaching activities, leaving the planning of the evaluation to the end. The backward design requires, first of all, a reflection on the competence to be developed, which is identified and analyzed according to the prevailing situation, and then goes on to determine the most appropriate ways of evaluation. Only after these steps, does it proceed to planning the teaching activities. Therefore, backward design ensures a strong coherence between desired learning outcomes, students’ basic performances and teaching activities. In this work, we will describe the choices made during each design phase, which enabled the implementation of a flipped classroom teaching sequence aimed at the development of the following competence: ability to explain basic geometric concepts relating to plane figures, using several semiotic representation registers.*
.

Riassunto – *Nell’articolo viene presentato il lavoro di design didattico effettuato all’interno di un corso di geometria e didattica della geometria, facente parte di una formazione universitaria rivolta a futuri insegnanti di scuola primaria, allo scopo di mostrare attraverso un esempio, corredato dalle riflessioni critiche della docente del corso, i possibili vantaggi della progettazione a ritroso. Tale progettazione si basa su un ribaltamento dello schema progettuale tradizionale, che vede il docente partire dalla programmazione degli interventi didattici per lasciare la strutturazione della valutazione come atto finale. La progettazione a ritroso prevede innanzitutto una riflessione sulla competenza che si intende sviluppare, che va individuata e analizzata attraverso l’identificazione delle dimensioni prevalenti che concorrono alla sua manifestazione, per poi passare a determinare le più opportune azioni di valutazione; solo dopo questi passaggi si procede alla pianificazione delle attività didattiche. La progettazione a ritroso garantisce perciò una profonda coerenza tra i risultati di apprendimento desiderati, le prestazioni fondamentali degli studenti e gli interventi didattici che si mettono in atto. Nel lavoro si descriveranno le scelte attuate nelle singole fasi progettuali, che hanno permesso la realizzazione di un percorso didattico con approccio flipped classroom orientato allo sviluppo della seguente competenza: sapere comunicare concetti geometrici fondamentali relativi alle figure del piano, utilizzando diversi registri di rappresentazione semiotica.*

Keywords – backward design, mathematics formation of the teachers, communicative competencies, geometry, flipped classroom

Parole chiave – progettazione a ritroso, formazione matematica degli insegnanti, competenze comunicative, geometria, flipped classroom

Gemma Carotenuto è collaboratrice scientifica in *Didattica della matematica* presso l'Università Suor Orsola Benincasa di Napoli. Dottore di ricerca in Matematica, con una tesi in teoria degli insiemi, negli ultimi anni si è dedicata alla ricerca in didattica della matematica e alla formazione insegnanti, in Italia e in Svizzera. I suoi principali interessi di ricerca sono nel ruolo del linguaggio nei processi di apprendimento/insegnamento e nella formazione insegnanti del settore primario. Tra le sue più recenti pubblicazioni*: Educating to rationality in a narrative context: an experimentation* (in press, con C. Coppola e R. Tortora, in *Proc. of 10th Congress of European Research in Mathematics Education*); *Handmade density sets* (in "The Journal of Symbolic Logic", 2017).

Mario Castoldi è Professore Associato di *Didattica e Pedagogia speciale* presso l'Università degli Studi di Torino, Facoltà di Scienze della Formazione. I suoi principali interessi di ricerca riguardano le problematiche relative alla qualità e alla valutazione dei sistemi scolastici e alla progettazione per competenze e certificazione di competenze. È impegnato da sempre nella ricerca didattica sul campo a fianco delle scuole e dei docenti. Tra i suoi contributi più recenti: *Capire le prove INVALSI* (Roma, Carocci, 2014); *Didattica generale* (Milano, Mondadori Education, 2015); *Valutare e certificare le competenze* (Roma, Carocci, 2016); *Costruire unità di apprendimento* (Roma, Carocci, 2017).

Silvia Sbaragli è Professore SUPSI e responsabile del centro competenza di *Didattica della Matematica* del Dipartimento Formazione e Apprendimento della SUPSI di Locarno (Svizzera). È membro del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Bologna. I suoi principali interessi di ricerca riguardano i processi di insegnamento-apprendimento della matematica, in particolare il ruolo che assume il linguaggio e le cause di eventuali difficoltà degli allievi. È direttrice della rivista "Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula" e membro di diversi comitati scientifici di altre riviste. Ha al suo attivo vari libri e articoli di didattica della matematica. Tiene molti corsi per insegnanti ed ha partecipato a diversi convegni e seminari in Italia e all'estero.

1. Introduzione

Il lavoro progettuale è spesso sottovalutato dai docenti, indipendentemente dal livello di istruzione in cui operano: quando viene richiesta un'attività più strutturata e maggiormente consapevole di design didattico, questa viene solitamente percepita come onere aggiuntivo, se non superfluo, al compito già di per sé impegnativo di realizzazione di un percorso didattico. Eppure tale progettazione riveste un ruolo cruciale al fine di indirizzare l'apprendimento degli allievi verso un traguardo ben definito e attraverso dispositivi efficaci.

In questo articolo viene presentato il lavoro di progettazione, svolto nell'a. a. 2016/2017, di un percorso didattico realizzato all'interno del corso teorico a grande gruppo di *Geometria*, della durata di 24 ore, di cui è docente una delle autrici e che ha visto la partecipazione di 74 studenti. Il corso appartiene al primo anno del piano degli studi del Bachelor in Insegnamento per il livello elementare, offerto dal Dipartimento formazione e apprendimento con sede a Locarno (Svizzera) della Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana. Tale corso fa parte di una formazione di livello terziario e di natura professionalizzante della durata di 3 anni.

Il lavoro di progettazione rappresenta una delle parti salienti di un progetto di ricerca dal titolo "Flipped classroom come approccio per lo sviluppo di competenze (FliSCo)", che ha visto coinvolti docenti e ricercatori di vari dipartimenti della Scuola Universitaria della Svizzera Italiana, della Fernfachhochschule Schweiz e dell'Università di Torino, coinvolti nel testare le potenzialità dell'approccio didattico flipped classroom, per favorire lo sviluppo di competenze professionali in un contesto di formazione terziaria.

La *flipped classroom* consiste essenzialmente nel capovolgere la dinamica didattica tradizionalmente egemone sia a scuola sia nella formazione terziaria, spostando l'acquisizione dei contenuti a casa, attraverso un approccio individuale mediato da testi, video, audio ecc., e portando il lavoro di rielaborazione dei saperi in aula, attraverso il loro impiego in contesti reali e situazioni problematiche complesse, il tutto sotto la guida del docente. Il valore aggiunto della flipped classroom risiede quindi nella possibilità di riorganizzare il tempo e lo spazio e creare degli ambienti d'apprendimento efficaci che sostituiscono la classica "classe" (Bergmann & Sams, 2012; Cecchinato & Papa, 2016). All'interno del progetto FliSCo, il quadro operativo assunto per strutturare percorsi didattici flipped classroom è stato quello della "progettazione a ritroso".

La *progettazione a ritroso*, proposta da Wiggins e McTighe (2004a) e da questi denominata "*backward design"*, si basa su un ribaltamento dello schema progettuale tradizionale, che vede il docente partire dalla programmazione degli interventi didattici per poi passare a strutturare la valutazione. I due autori suggeriscono, invece, di riflettere innanzitutto sulla competenza che si intende sviluppare, selezionata sulla base del profilo dello studente atteso in uscita dalla formazione. Fatto ciò, si tratta di analizzare tale competenza, attraverso l'identificazione delle dimensioni prevalenti che concorrono alla sua manifestazione, determinando così le più opportune azioni di valutazione; solo dopo questi passaggi si può procedere alla pianificazione delle singole attività didattiche (Castoldi, 2011). La progettazione a ritroso permette perciò di tener conto di una profonda coerenza tra i risultati di apprendimento desiderati, le prestazioni fondamentali degli studenti e gli interventi didattici che si mettono in atto.

Nel presente lavoro, dopo aver introdotto il quadro teorico della progettazione a ritroso, si descrivono le scelte attuate nelle singole fasi progettuali, che hanno permesso la realizzazione di un percorso didattico che ha utilizzato un approccio flipped classroom e che è stato orientato prevalentemente allo sviluppo della seguente competenza, di fondamentale rilevanza per futuri docenti della scuola primaria: *Sapere comunicare concetti geometrici fondamentali relativi alle figure del piano, utilizzando diversi registri di rappresentazione semiotica*[1].

Si tratta di un traguardo solo a prima vista facilmente raggiungibile, a causa di difficoltà sia concettuali sia linguistiche e che necessita perciò di grande attenzione da parte dei formatori.

Si conclude l'articolo con una riflessione sull'esperienza progettuale presentata, tenendo conto dei punti critici e dei punti di forza riscontrati dalla docente del corso.

[1] Per motivi di brevità, in questo contributo non si forniscono i dettagli procedurali della progettazione attuata: questi, insieme con il resoconto del percorso formativo e, più in generale, la descrizione e i risultati dell'intero progetto FliSCo, sono disponibili online (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017).

2. Un framework teorico: la progettazione a ritroso

L'esperienza progettuale presentata nell'articolo si basa su una proposta elaborata da due autori statunitensi, Grant Wiggins e Jay McTighe, per conto della Association Supervision for Curriculum Development (ASCD), autorevole comunità di professionisti dell'educazione (insegnanti, dirigenti, consulenti, ed esperti) presente in oltre 100 paesi con lo scopo di supportare la qualità dei processi di insegnamento/apprendimento[2]. Il titolo originale della proposta, "*Understanding by Design*", intende proprio focalizzare lo sguardo sulla questione chiave prima richiamata: l'apprendimento che giustifica il lavoro didattico, inteso come "comprensione profonda" dei diversi contenuti curricolari, capacità di comprendere il senso e trasferire i propri apprendimenti nei loro contesti di vita. Se dovessimo tradurre il significato dell'espressione potremmo parlare di "comprensione come scopo progettuale", a richiamare la necessità che l'intenzionalità progettuale dell'insegnante sia consapevolmente orientata verso lo sviluppo di una comprensione profonda da parte dell'allievo, nel tentativo di colmare quel "gap" tra le dichiarazioni di intenti infarcite di maturazione di competenze e sviluppo di padronanze e le prassi quotidiane, schiacciate sulla acquisizione di contenuti di sapere, spesso parcellizzata e meramente riproduttiva.

L'espressione "comprensione profonda", o "significativa", utilizzata nella proposta di Wiggins e McTighe, si sovrappone pienamente al concetto di *competenza*: in entrambi i casi al centro dell'attenzione viene posta la capacità del soggetto di utilizzare il proprio "sapere" nelle più diverse situazioni di vita che si trova ad affrontare, che presuppone una consapevolezza del significato e delle potenzialità d'uso di questo "sapere" e una padronanza nel metterlo in gioco nei vari contesti di esercizio (formali, informali, professionali, sociali, personali ecc.). Se quindi le espressioni "comprensione profonda" e "competenza" rinviano allo stesso ambito di significato, una differenza tra loro possiamo riconoscerla nella diversa enfasi posta sulle due componenti che abbiamo richiamato: il termine "comprensione" si centra maggiormente sul momento dell'"apprendere", ovvero sul riconoscere e appropriarsi dell'orizzonte di senso di un dato sapere; il termine "competenza" tende a spostarsi sul momento dell'"agire", ovvero sul trasferire ed utilizzare un dato sapere in un determinato contesto.

Proprio questa diversa sfumatura di significato permette di capire l'importanza di mettere al centro dell'attenzione dell'insegnante la "comprensione profonda", in quanto risultato atteso focale del lavoro formativo che pone le premesse per un successivo trasferimento di questo apprendimento nei contesti di vita del soggetto. Nel linguaggio e nella prospettiva culturale degli insegnanti questa scelta può aiutare a evitare derive funzionalistiche associate al termine "competenza", visto come qualcosa di "altro" rispetto al lavoro formativo, una sorta di "corpo estraneo" che sposta l'attenzione dal processo di apprendimento al suo utilizzo nella vita reale. Potremmo infatti riformulare quanto detto affermando che se la progettazione è centrata sulla comprensione, ovvero sulla piena consapevolezza di un determinato apprendimento o set di apprendimenti, la valutazione è centrata sulla competenza, ovvero sull'accertamento della misura in cui l'allievo sa riutilizzare tali apprendimenti. Tale conclusione permette di rico-

[2] Per un approfondimento si veda http://www.ascd.org.

noscere, all'interno del medesimo nucleo di significato che accomuna "comprensione" e "competenza", la diversa accentuazione data ai due momenti della acquisizione e dell'utilizzo di un determinato apprendimento; momenti strettamente connessi e inscindibili nella loro reciproca complementarietà (la comprensione profonda consente la manifestazione di competenza, la manifestazione di competenza richiede la comprensione profonda).

Il quadro di riferimento di *Understanding by design* si fonda su una logica progettuale "a ritroso" (*backward design*), a partire dall'assunto che un percorso progettuale richiede di "partire dalla fine", ovvero da una chiarezza circa i risultati attesi e il modo con cui poterli verificare. Ciò determina una sorta di inversione tra il momento progettuale e il momento valutativo, almeno se pensati in successione lineare, e propone un approccio progettuale che muove da alcune scelte valutative per svilupparne poi le implicazioni sugli altri aspetti della progettazione didattica. Più specificamente, gli interrogativi da cui prende spunto un percorso progettuale di questo tipo si possono così sintetizzare (Wiggins & McTighe, 2004a):

– Qual è l'apprendimento che voglio contribuire a sviluppare con il mio percorso?

– In termini operativi, quale evidenze del proprio apprendimento mi aspetto che gli allievi siano in grado di manifestare a conclusione del percorso?

Si tratta, come si vede, di anteporre alcune questioni tipicamente valutative alla strutturazione del percorso progettuale, allo scopo di poterlo traguardare in relazione ad una idea di apprendimento definito ed articolato. Da ciò discende la successiva pianificazione delle attività e delle esperienze di apprendimento che consentiranno agli allievi di "prepararsi" a quelle richieste previste nella fase conclusiva del percorso formativo.

È necessario evidenziare come la logica progettuale proposta dagli autori rinvii, come esplicitamente affermato da loro stessi, ai fondamenti dell'approccio progettuale, già presenti nella concettualizzazione proposta da Ralph Tyler alla metà del secolo scorso (Tyler, 1949): assumere i risultati attesi come riferimento per lo sviluppo di un progetto rappresenta un caposaldo di qualsiasi modello progettuale. L'elemento di novità ancora una volta è da ricercare nell'idea di apprendimento a cui si rimanda: mentre i modelli progettuali derivati dai principi posti da Tyler si sono orientati verso un approccio analitico e parcellizzato all'apprendimento, centrato sull'acquisizione di specifici contenuti di sapere in termini di conoscenze e abilità rigidamente delimitate e circoscritte (per esempio, l'area del triangolo o l'organizzazione politica nell'età carolingia), la proposta *Undestanding by Design* si orienta verso un approccio globale e integrato all'apprendimento, centrato su una comprensione profonda e significativa dei contenuti di sapere (per esempio, l'area del triangolo come strumento per leggere molteplici situazioni reali e affrontare la risoluzione di svariati problemi).

La cosiddetta "pedagogia per obiettivi", egemone anche nel nostro paese a partire dagli anni '70, evidenzia questo punto di criticità fondamentale connesso all'idea di apprendimento verso cui si è orientata; un'idea di apprendimento, peraltro che è alla base di quel travisamento tra contenuto di sapere e traguardo formativo, per il quale il fine del lavoro didattico diventa il contenuto di sapere. Rimettere al centro dell'attenzione dell'insegnante la "comprensione profonda", intesa come riconoscimento del senso di un dato apprendimento e capacità di trasferirlo ad altri contesti, consente di restituire al contenuto di sapere il suo vero ruolo, ovvero rappresentare uno strumento culturale per interpretare e agire sulla esperienza reale. Parliamo di vero ruolo per richiamare il significato epistemologico del sapere e della sua organizzazione in un insieme di discipline: strumenti culturali costruiti e in progressiva evoluzione nel corso della storia dell'umanità per consentire all'umanità stessa di interpretare la realtà che la circonda ed intervenire su di essa in relazione ai propri scopi.

Undestanding by Design oltre a centrarsi su un'idea di apprendimento intesa come "comprensione profonda" accentua ulteriormente la prospettiva progettuale a ritroso richiamando l'importanza di analizzare il significato dell'apprendimento che si intende perseguire; sia sul piano concettuale, in rapporto alle dimensioni che lo compongono e alle domande di fondo a cui consente di rispondere, sia in termini operativi, in rapporto alla definizione delle situazioni in cui si manifesta e che l'allievo deve essere in grado di affrontare. In tal modo si accentua la prospettiva valutativa del lavoro formativo (quale apprendimento sviluppare? Quali evidenze dell'apprendimento raggiunto?), giustificando l'espressione "a ritroso" per qualificare questo percorso che muove da domande valutative per arrivare a domande didattiche.

Il percorso a ritroso si concretizza nella individuazione di tre fasi chiave (Tavola 1):

– identificare i risultati dell'apprendimento che si intende sviluppare attraverso il percorso formativo, in termini di comprensione profonda;

– determinare quali evidenze di accettabilità consentiranno di verificare il livello di comprensione profonda raggiunto dagli studenti;

– pianificare il percorso didattico che si intende realizzare per sviluppare i risultati di apprendimento attesi.

Le tre fasi sono tra loro logicamente interconnesse e la loro integrazione consente lo sviluppo di unità di apprendimento nei suoi diversi aspetti; l'accentuazione della prospettiva valutativa è riconoscibile in particolar nelle prime due fasi, che richiamano domande essenzialmente spostate sul momento valutativo del lavoro formativo.

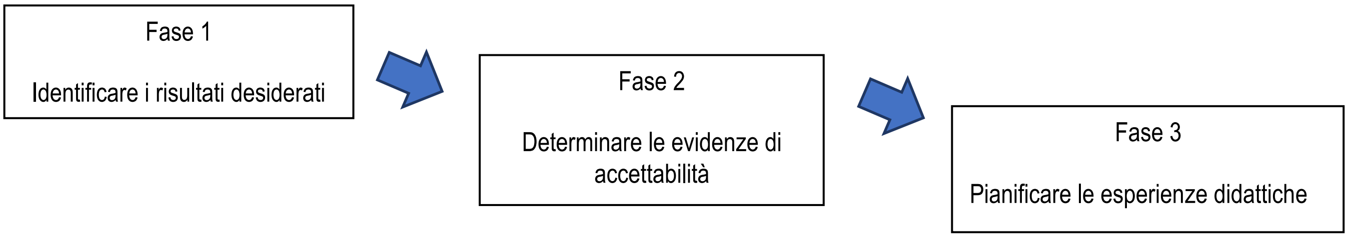


Tavola 1 – Fasi del processo di progettazione a ritroso (Wiggins & McTighe, 2004a, p. 32)

Presentiamo di seguito la progettazione effettuata all'interno del corso di Geometria tenendo conto del quadro teorico qui introdotto.

3. Prima fase: Identificare i risultati desiderati

La fase di progettazione del percorso didattico rientrante nel corso di Geometria è iniziata col rintracciare i traguardi di competenza afferenti al modulo nel quale è inserito il corso e nel valutarne la coerenza con il profilo del piano degli studi del Bachelor[3]. L'attenzione è ricaduta sul seguente traguardo: "Formulare e perseguire obiettivi coerenti con il contesto e la disciplina". Questo è risultato troppo generico per un segmento del corso pari a 8 ore-lezione (su 24 complessive), ciascuna della durata effettiva di 50 minuti, nelle quali si voleva sperimentare l'approccio flipped classroom. Si è scelto perciò di restringerne il campo di applicazione, individuando il già citato traguardo focus del percorso: *Sapere comunicare concetti geometrici fondamentali relativi alle figure del piano, utilizzando diversi registri di rappresentazione semiotica* (va tenuto in considerazione che le figure dello spazio erano già state trattate nella prima parte del corso).

Per un futuro docente saper comunicare e argomentare rappresenta un traguardo trasversale di fondamentale importanza, dato che per l'insegnamento di qualsiasi disciplina è necessaria una certa padronanza linguistica, come sottolineato dagli standard stabiliti dall'istituzione per la formazione in uscita dal percorso Bachelor in Insegnamento elementare[4]. In particolare, saper comunicare e argomentare rappresenta un traguardo importante in ambito matematico, a tal punto da essere uno dei processi specifici dell'area matematica prevista dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) e, più in generale, dai diversi piani di studi a livello internazionale[5].

Anche l'*ambito tematico* scelto, delle figure del piano e della loro didattica, rappresenta un argomento importante per futuri docenti di scuola primaria. In particolare, si è puntata l'attenzione sul seguente processo: *comunicazione (attraverso diversi registri, come ad esempio quello proposizionale, figurale o grafico) dei concetti fondamentali legati prevalentemente agli enti e alle grandezze dei poligoni, della classificazione dei triangoli e dei quadrilateri e del calcolo delle loro aree*.

La scelta di tale processo è stata guidata e riletta in maniera critica in relazione ai quattro *criteri* o *filtri* proposti in (Wiggins & Mc Tighe, 2004a, pp. 34-35), appositamente predisposti per questo tipo di selezione in funzione di una comprensione profonda.

[3] Il Piano degli studi e il prospetto del profilo delle competenze in uscita del Bachelor of Arts in Insegnamento per il livello elementare, per l'a. a. 2016/2017, sono entrambi disponibili in http://www.supsi.ch/dfa/bachelor-diploma-master/bachelor/insegnamento-elementare/piani-di-studio.html.

[4] Nella prima colonna del prospetto si trova la macro-competenza *Comunicare in modo chiaro ed efficace nei diversi contesti legati alla professione,* che viene declinata in sette competenze, tra cui le seguenti due, con le quali il traguardo focus è completamente in linea: *Esprimersi nella lingua orale e nella lingua scritta con la padronanza, la precisione e l'efficacia richiesta a un professionista dell'insegnamento; Utilizzare una pluralità di linguaggi espressivi e comunicativi nell'interazione con gli allievi.*

[5] Per il territorio italiano, un'attenzione analoga a questo aspetto di competenza è data nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* (MIUR, 2012).

Filtro 1 – *Trasferibilità*

In quale misura il processo è dotato di valore durevole in diversi contesti e al di là della formazione?

Focalizzare l'attenzione sulla comunicazione in ambito matematico durante l'azione didattica può rappresentare per gli studenti universitari "una rivoluzione", come da loro stessi affermato in diverse occasioni. La maggior parte di loro è infatti abituata dalla propria esperienza scolastica a un tipo di insegnamento della matematica fatto di addestramento ai calcoli e di imposizione di articolati apparati di "regole senza ragioni" (Skemp, 1976, p. 21), che poco spazio lasciano ai processi di verbalizzazione, in cui si descrivono oggetti e risultati e si spiegano processi argomentando. Ciò fa sì che spesso l'apprendimento in ambito matematico rimanga epidermico, senza diventare consapevole e profondo. L'intento del percorso è stato di proporre agli studenti un diverso modello di insegnamento/apprendimento a cui ispirarsi, che potesse permettere a loro stessi come studenti di comprendere i concetti matematici in gioco e di mobilitarli nelle diverse situazioni di realtà che saranno chiamati ad affrontare e, come docenti, di implementare un'azione didattica in grado di sviluppare negli allievi una comprensione profonda in ambito matematico.

Filtro 2 – *Centralità*

In quale misura il processo appartiene al nucleo centrale di una determinata disciplina?

Le conoscenze e abilità relative alle figure del piano rappresentano certamente un nucleo centrale della geometria per futuri maestri di scuola primaria, ma al punto precedente si è anche accennato all'importanza della comunicazione nell'apprendimento della matematica: questo orientamento ha origine nei risultati e nelle riflessioni della ricerca in didattica della matematica (Radford & Demers, 2006). Il processo di comunicazione aiuta gli allievi ad approfondire le loro conoscenze in matematica, tramite argomentazioni e giustificazioni che consentono una comprensione profonda dei concetti in gioco.

Il fatto che la didattica della matematica ha puntato tutta la sua attenzione sulle attività degli esseri umani che hanno a che fare con la matematica (non solo risolvere problemi, ma anche comunicare la matematica), è uno dei meriti del punto di vista antropologico, ispiratore di altri punti di vista: la TAD, teoria antropologica della didattica (della matematica) (Chevallard, 1999).

Il punto cruciale è che "la TAD pone l'attività matematica, e dunque l'attività di studio in matematica, nell'insieme delle attività umane e delle istituzioni sociali" (Chevallard, 1999, p. 221).

Questa posizione ha segnato una svolta interessante all'interno delle cornici teoriche nelle quali oggi si situa ogni ricerca in didattica della matematica, tanto più se si sottolineano i successivi studi compiuti da più autori, per chiarire e rendere operative le nozioni di Chevallard, creando strumenti concettuali adeguati e paragonandoli a quelli messi in campo da altre posizioni al riguardo (D'Amore, Fandiño Pinilla & Sbaragli, 2017).

Inoltre, l'attuale ricerca in didattica della matematica è notevolmente influenzata dal pensiero di Vygotskij (1990), che considera lo sviluppo cognitivo come un processo fortemente connesso alle interazioni sociali e secondo cui la verbalizzazione è strettamente connessa al pensiero (si pensi ad esempio all'idea di pensiero come comunicazione con se stessi di Sfard, 2001). L'apprendimento rappresenta una costruzione più o meno personale, sottoposta al bisogno di "socializzare", il che avviene ovviamente grazie a un mezzo comunicativo (che può essere il linguaggio) e che nella matematica sempre più decisamente sarà condizionato dalla scelta del mediatore simbolico, cioè del registro semiotico di rappresentazione prescelto (o imposto, a vario titolo, anche solo dalle circostanze).

Prendiamo a prestito da Duval (1993) l'affermazione: "non c'è noetica senza semiotica". Gli oggetti dell'indagine matematica, infatti, a differenza di quelli di tutte le altre discipline scientifiche, non possono essere percepiti tramite i sensi o attraverso attrezzature specifiche. Ciò caratterizza l'uso cognitivo dei segni all'interno della disciplina: sebbene gli oggetti matematici non vadano confusi con le loro rappresentazioni semiotiche, queste ultime sono necessarie per qualsiasi tipo di attività matematica (Duval, 2006, p. 126). Dunque la traduzione e la gestione dell'esperienza matematica tramite parole, disegni, formule, grafici ecc. è parte integrante della disciplina stessa.

La "costruzione della conoscenza in matematica" può essere interpretata come l'unione delle seguenti tre "azioni" sui concetti, cioè l'espressione stessa della capacità di:

– *rappresentare* gli oggetti matematici scegliendo i tratti distintivi che li caratterizzano o che si vogliono evidenziare;

– *trattare* le rappresentazioni ottenute all'interno di un registro stabilito; e

– *convertire* le rappresentazioni da un registro ad un altro.

Filtro 3 – *Difficoltà*

In che misura il processo richiede attenzione didattica, ovvero può comportare misconcezioni o risulta di difficile comprensione per gli studenti?

Lo sviluppo di competenze comunicative specifiche – che non si esauriscono nella buona padronanza del linguaggio specialistico, ma comprendono anche l'esprimersi in maniera efficace in relazione al contesto e agli scopi - richiede un'attenzione particolare nel contesto della formazione insegnanti in ambito matematico. Le ripercussioni di una comunicazione inadeguata sull'efficacia dell'azione didattica, infatti, costituiscono un problema diffuso (Ferrari, 2004; Zan, 2016). D'Aprile e colleghi (2004, p. 32), riferendosi al caso delle interazioni verbali, sintetizzano così: "Non occorre frequentare convegni di didattica e leggere riviste specialistiche per sapere che una notevole parte delle difficoltà d'insegnamento e d'apprendimento della matematica si genera nell'atto stesso del comunicare questa scienza, attraverso il principale mezzo d'interazione tra esseri umani, cioè il linguaggio naturale. Basta passare qualche ora in una classe per verificarlo".

I problemi comunicativi non esauriscono però le potenziali difficoltà della trasposizione didattica di concetti matematici, anche a livello di scuola primaria. Come mostrano diversi studi (Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla & Sbaragli, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sbaragli, 2008), molte delle criticità nell'apprendimento della matematica di base sono legate a convinzioni scorrette degli insegnanti sugli oggetti matematici e a scelte didattiche sbagliate. Le specifiche tematiche affrontate dal percorso didattico oggetto di analisi sono caratterizzate da diverse difficoltà, riscontrate nelle precedenti edizioni del corso e documentate dalla ricerca. Si pensi, ad esempio, al caso emblematico delle misconcezioni da posizioni vincolanti che emergono anche a causa di scelte didattiche inadeguate nella trattazione elementare dei poligoni (Martini & Sbaragli, 2005; Sbaragli & Mammarella, 2010) o alle diffuse misconcezioni concernenti il concetto di altezze dei poligoni (Sbaragli, 2017).

Filtro 4 – *Coinvolgimento*

In quale misura il contenuto di sapere risulta interessante, può essere potenzialmente coinvolgente per gli studenti?

Il percorso oggetto di analisi si è inserito in un contesto formativo di carattere professionalizzante incentrato su pratiche di tirocinio settimanali realizzate nella scuola primaria, che favoriscono intrinsecamente il coinvolgimento e la motivazione degli studenti. La necessità di preparare fin dal primo semestre di formazione interventi disciplinarmente corretti e didatticamente efficaci nelle proprie classi di pratica professionale rende gli studenti solitamente attenti ai contenuti, alle metodologie e alle dinamiche dell'intero modulo, sia di geometria sia di didattica della geometria.

Successivamente, dopo aver individuato il traguardo di competenza focus e l'ambito tematico, si è passati a determinare i bisogni formativi degli allievi rispetto all'ambito tematico selezionato, individuati in base all'esperienza della docente del corso, e a elaborare le domande chiave attraverso cui interrogare i contenuti formativi.

Si riportano le scelte relative a questa prima fase di identificazione dei risultati desiderati in Tavola 2.

Bisogni formativi
– Prendere coscienza, in maniera critica, delle proprie conoscenze e abilità relative ai concetti geometrici fondamentali delle figure del piano e saperle far evolvere in relazione alla trasposizione didattica per allievi di scuola primaria.
– Superare un approccio insicuro e mnemonico nei confronti dell'ambito geometrico, diventando abili a comunicare, con flessibilità, coerenza e al tempo stesso correttezza, i saperi di base relativi alle figure del piano.

Competenza focus
Sapere comunicare concetti geometrici fondamentali relativi alle figure del piano, utilizzando diversi registri di rappresentazione semiotica.

Ambito tematico
Figure del piano e loro didattica

Disciplina coinvolta
Geometria e didattica della geometria

Domande chiave
1) Come comunicare in maniera efficace le conoscenze geometriche fondamentali relative al piano?
2) Come affrontare le diverse argomentazioni relative alle proprietà e relazioni delle diverse figure del piano?
3) Quali sono i nodi concettuali da affrontare e le eventuali tipiche misconcezioni di cui essere consapevoli per effettuare una efficace trasposizione didattica delle figure piane nella scuola primaria?

Tavola 2 – Idea progettuale

4. Seconda fase: Determinare evidenze di accettabilità

In relazione alla fase precedente, si è poi passati alla definizione di una "situazione problema", che è stata il fulcro intorno a cui si è sviluppato l'intero percorso progettuale.

In generale, per *situazione problema* si intende un'occasione per mobilitare l'insieme delle risorse, sia interne che esterne, di cui l'allievo dispone in rapporto al traguardo di competenza focus attraverso una dialettica tra intenzione da perseguire, riflessione sul proprio agire e percezione del contesto reale. In rapporto allo sviluppo del progetto formativo, la situazione-problema definisce l'orizzonte di senso condiviso tra insegnante e studenti entro cui strutturare il progetto e prefigura il prodotto verso cui orientare il lavoro progettuale.

Più specificamente, si possono identificare due significati nel concetto di situazione problema, che aiutano a precisarne il ruolo nello sviluppo di un percorso formativo: da un lato rappresenta un'occasione per farsi delle domande, per interrogarsi sulle proprie risposte, per avviare un percorso di ricerca orientato a costruire delle soluzioni condivise alle questioni poste; dall'altro prefigura un prodotto verso cui tendere, intorno a cui finalizzare il lavoro di ricerca, rendere visibile agli altri il proprio percorso di apprendimento. Dal punto di vista dello sviluppo progettuale la situazione problema assume quindi una duplice funzione: in primo luogo pone delle domande, diviene il "motore" per l'attivazione delle proprie risorse durante il percorso di ricerca verso possibili risposte alle domande iniziali; in secondo luogo sollecita la realizzazione di un prodotto, fornisce l'occasione per manifestare la propria competenza nello strutturare la propria risposta, renderla comunicabile agli altri, oggettivabile, esprimibile in una prestazione.

Nel caso del percorso in esame la situazione problema scelta è stata la seguente:

Comunicare in modo pertinente ed efficace concetti e proprietà relative all'ambito delle figure del piano in attività ludo-geometriche (cruciverba geometrico, schiena contro schiena, Taboo geometrico) tenendo conto dei vincoli imposti dal gioco, delle esigenze comunicative e, contemporaneamente, delle caratteristiche specifiche del linguaggio matematico.

Le attività ludo-geometriche sono state pensate per attivare la competenza focus in un *contesto significativo* di tipo ludico. Questa proposta, oltre ad aver favorito il coinvolgimento degli allievi, ha prefigurato una possibile situazione didattica scolastica. Descriviamo brevemente le attività di seguito:

– il *cruciverba geometrico* consiste nella preparazione e nella risoluzione di due cruciverba che coinvolgono parole di ambito geometrico. In una prima fase, gli studenti formulano in gruppo diverse definizioni al fine di creare un cruciverba da proporre a un altro gruppo; in una seconda fase, risolvono il cruciverba creato per loro dai compagni (Allegato 1);

– nel gioco *schiena contro schiena* tutti gli studenti dispongono di quattro triangoli di carta congruenti. Un solo studente, posizionato in modo da rivolgere le spalle al resto della classe, costruisce liberamente una figura utilizzando i suoi triangoli di carta e la descrive in termini matematici ai compagni affinché possano ottenere una figura congruente;

– il *Taboo geometrico* è una rivisitazione del popolare gioco *Taboo*. Inizialmente, gli studenti individuano in gruppo le parole *Taboo* di un certo numero di carte, la cui parola da indovinare è già stata scritta dal docente; successivamente, si dividono in squadre e giocano secondo le regole del *Taboo* con le carte create e utilizzando il linguaggio geometrico per far comprendere le parole ai componenti della propria squadra.

Con riferimento al traguardo focus, tra i sei aspetti della comprensione profonda proposti da Wiggins e McTighe (2004b)[6], quello maggiormente coinvolto dalla situazione-problema è stato l'*applicazione*, ossia "la capacità di usare conoscenze efficacemente in nuove situazioni e in vari contesti" (Wiggins & McTighe, 2004b, p. 35). Tale aspetto è stato promosso dalle particolari caratteristiche e regole dei vari giochi e dai diversi interlocutori, che possono essere riletti come vincoli e variabili comunicative. Da subito si è ipotizzato di effettuare una valutazione tra pari durante le attività ludo-geometriche, così che gli studenti potessero essere valutati dai compagni sulle proprie capacità di mobilitare efficacemente conoscenze geometriche e linguistiche in una situazione nuova, che si discostasse dalle attività che l'avevano preceduta.

[6] Secondo gli autori una comprensione profonda è analizzabile attraverso sei aspetti: *spiegazione*, *interpretazione*, *applicazione*, *prospettiva*, *empatia*, *autoconoscenza*. Per un approfondimento si rimanda a Wiggins & McTighe, 2004b, pp. 28-47.

In relazione alla situazione problema, sono stati richiamati altri traguardi di competenza correlati al percorso e le principali conoscenze e abilità di tipo disciplinare, che sono riassunti nella Tabella 1.

<table>
<tr><td colspan="2">Altri traguardi formativi
Interrogarsi sulla propria competenza disciplinare in riferimento alla propria professione,
sui traguardi raggiunti e sui bisogni formativi.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Competenze correlate
Riconosce, denomina, descrive, classifica e rappresenta figure del piano, ne individua proprietà,
ne coglie relazioni tra gli elementi e ne determina misure significative.</td></tr>
<tr><td>Conoscenze
– Conoscere i principali termini, concetti, proprietà e relazioni relative alle figure del piano.
– Conoscere le formule delle aree dei triangoli e quadrilateri.
– Conoscere le classificazioni dei triangoli e quadrilateri.
– Conoscere le misconcezioni tipiche degli allievi di scuola primaria relative alle figure del piano.</td><td>Abilità
– Utilizzare i principali termini, concetti, proprietà e relazioni relative alle figure del piano in modo coerente rispetto alla situazione data.
– Individuare analogie e differenze tra le varie figure del piano e le loro proprietà.
– Esplicitare procedure per mezzo di rappresentazioni semiotiche coerenti con le situazioni proposte.
– Scomporre figure piane in più figure conosciute per determinare lunghezze e aree sfruttando l’additività di queste grandezze.
– Argomentare e giustificare l’esistenza di relazioni fra figure a partire da proprietà geometriche e la correttezza di formule (p.es. formule per il calcolo delle aree).</td></tr>
</table>

Tabella 1 – Altri traguardi di competenza, conoscenze e abilità

Il secondo passo dell’attività progettuale ha previsto una macro-pianificazione dell’azione valutativa che è stata poi definita nel dettaglio nella fase successiva. Si premette che le particolari condizioni del contesto formativo, corso teorico a grande gruppo del primo semestre del primo anno di formazione, che ha coinvolto 74 studenti, ha consentito sì un’azione *valutativa continua e formativa*, ma che è risultata *prevalentemente collettiva o realizzata tra pari*. Nonostante questo limite, una tale azione valutativa, basata sull’identificazione delle difficoltà e dei bisogni degli allievi, ha permesso di orientare in itinere l’azione didattica del docente e la riflessione di ciascuno studente. La valutazione sommativa degli apprendimenti dei singoli, invece, è stata inglobata in un esame scritto formato da alcune domande a risposta chiusa e altre a risposta aperta, basate sulla capacità di sapere argomentare e giustificare il proprio apprendimento, concernenti l’intero modulo di *Geometria*. Questa scelta era vincolata dal Piano di studio Bachelor già in vigore all’interno dell’Istituzione.

Sono stati ipotizzati numerosi interventi valutativi da integrare nelle varie attività didattiche che si sarebbero progettate: restituzione dei prodotti degli studenti realizzati a casa tramite la piattaforma *Moodle*, a cui far seguire una restituzione collettiva in aula o su piattaforma da parte della docente; controlli cognitivi tramite quiz individuali, da inserire nel lavoro a casa (su piattaforma) (Allegato 2) o nelle attività in aula (in tempo reale attraverso i *clicker*) (Allegato 3); utilizzo in aula della metodologia di valutazione formativa del *semaforo*, attraverso cui gli studenti possono riconoscere nel corso di un'attività se sentono di procedere bene, di aver bisogno di un aiuto da parte del docente o di essere bloccati nel lavoro (Franchini, Salvisberg & Sbaragli, 2016); risposte ai dubbi, alle sollecitazione e alle domande degli studenti che nascono a seguito dello studio a casa o delle attività in classe; continui feedback sulle attività svolte. Prima della realizzazione della situazione problema ("partita") è stata proposta, inoltre, una riflessione auto-valutativa da svolgere individualmente, guidata dalle seguenti tre voci: "cose che vorrei capire meglio", "cose che ho imparato da questo lavoro" e "cose che già sapevo ma che ora ho capito meglio" (Castoldi, 2016) (Allegato 4); infine, come anticipato, per supportare una riflessione metacognitiva specifica sul processo previsto dalla competenza focus durante la partita, è stata creata una rubrica di valutazione tra pari (Allegato 5), per la quale si è prevista una fase di restituzione collettiva.

5. Terza fase: Pianificare esperienze e istruzione[7]

Nell'ultima fase della progettazione sono stati struttati gli interventi didattici, che hanno messo in gioco i principi chiave dell'approccio *flipped classroom,* sulla base del seguente canovaccio sintetizzato nella Tavola 3 (Castoldi, 2017).

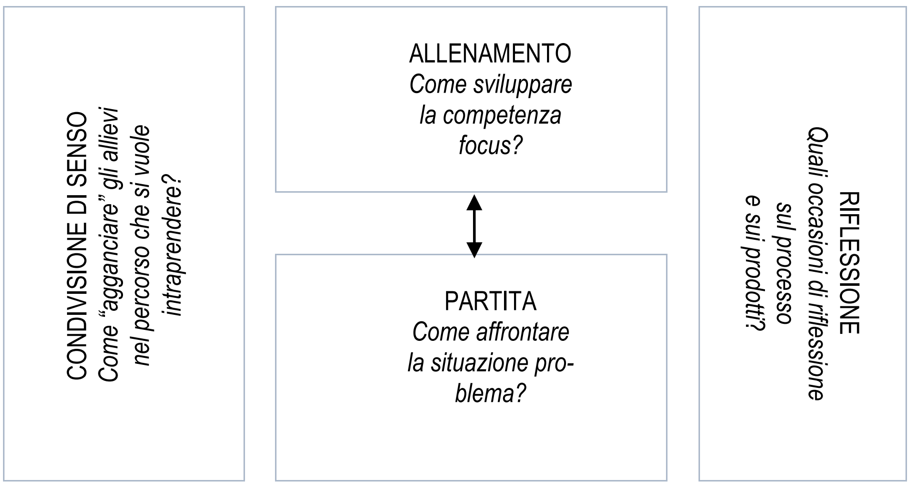


Tavola 3 – Domande guida fasi articolazione operativa (Castoldi, 2017, p. 191).

[7] Questo paragrafo è una rielaborazione dello studio di caso presentato in Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017, pp. 67-85.

Il percorso è stato strutturato secondo le quattro componenti esplicitate dal canovaccio: la partita, l'allenamento, la condivisione di senso e la riflessione, descritte di seguito.

Partita. La realizzazione di un "prodotto" attraverso cui manifestare la competenza focus del percorso didattico rappresenta un passaggio cruciale del percorso stesso. Metaforicamente tale passaggio può essere associato all'idea di partita in quanto, come avviene nell'attività sportiva, la manifestazione della competenza trova la sua espressione più piena proprio nel momento in cui si "scende in campo" e bisogna dimostrare il proprio valore (ovvero la propria competenza, sia a livello individuale che collettivo). Nello specifico del percorso in esame, si tratta della lezione finale in cui gli studenti hanno messo in campo le proprie competenze comunicative in attività ludo-geometriche, già descritte nel paragrafo 4, pensate per essere affrontate con la stessa metodologia didattica adottata nelle attività laboratoriali degli incontri che la precedono. L'incontro ha avuto una durata di due unità didattiche, corrispondenti a un tempo di un'ora e quaranta minuti.

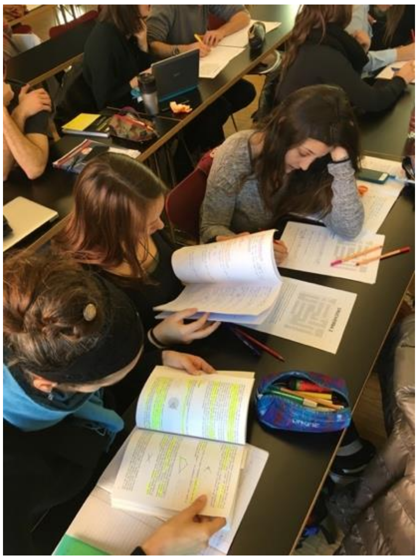


Figure 1, 2, 3 – Foto dalla realizzazione della situazione problema
(a sinistra, formulazione delle definizioni del cruciverba geometrico; a destra in alto, attività schiena contro schiena; a destra in basso, gioco del Taboo geometrico)

Allenamento. Rimanendo all'interno della metafora sportiva, la partita è preceduta dall'allenamento, ovvero da quell'insieme di attività ed esperienze che dovrebbero "preparare" i giocatori alla partita; fuor di metafora, la fase di "allenamento" si caratterizza per sviluppare l'insieme delle dimensioni implicate nella competenza: le risorse cognitive richieste, quindi le conoscenze e le abilità che devono essere acquisite per sviluppare una data competenza; i processi cognitivi e operativi attraverso cui mobilitare efficacemente le proprie risorse in funzione del compito da affrontare (messa a fuoco del compito, strategie di azione, autoregolazione); le disposizioni ad agire necessarie per utilizzare al meglio le proprie risorse nel contesto d'azione.

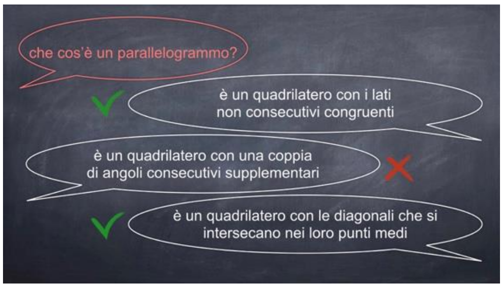
Nella gestione della fase di allenamento, in particolare, la flipped classroom ha rappresentato una risorsa preziosa, in quanto approccio didattico che permette di lavorare sui diversi aspetti della competenza: sia l'acquisizione dei contenuti di sapere (conoscenze e abilità) attraverso un lavoro individuale guidato e orientato a questo scopo, sia il potenziamento dei processi e delle disposizioni con cui mobilitare i propri saperi e le proprie risorse, grazie a una maggior attenzione dedicata alle metodologie attive ed esperienziali nel lavoro in aula. La flipped classroom ha trovato nella fase di allenamento il suo significato più pieno: tale approccio ha potenziato l'efficacia del lavoro formativo e ha fornito una diversa strutturazione all'allenamento, spostando l'acquisizione dei fondamentali sul lavoro individuale e valorizzando il lavoro sociale come opportunità per mettere in gioco i propri apprendimenti e prepararsi alla partita, ovvero alla manifestazione della competenza in situazioni di diversa complessità.

Per quanto riguarda il tipo di approccio flipped classroom adottato, si è scelto di andare oltre il riduttivo metodo che ha come motto "teorica a casa, compiti in classe". Le proposte didattiche messe in atto sono risultate affini al *livello 2* di flipped classroom elaborato da Lebrun (2016), in cui lo studente assume un ruolo attivo sia a casa che in aula. Come lavoro di preparazione agli incontri sono state create attività sia di scoperta di contenuti disciplinari sia di riflessione – erogate attraverso svariate risorse tecnologiche – che hanno permesso agli studenti di arrivare in aula pronti per partecipare a discussioni collettive e per affrontare ricche attività laboratoriali.

Nello specifico del percorso, sono stati progettati tre periodi di lavoro a casa, seguiti da altrettanti incontri in aula. Per quanto riguarda la durata di ciascuno dei tre periodi di attività fuori dall'aula, il primo è stato di circa un mese, coincidente con la pratica professionale degli studenti, il secondo di cinque giorni e, infine, il terzo di quattro giorni. Ognuno dei tre incontri in aula, invece, è stato come già anticipato di due unità didattiche, corrispondenti a un tempo di un'ora e quaranta minuti.

Allenamento a casa. Tutte le attività a casa sono state rese fruibili attraverso la piattaforma *Moodle iCorsi*, attraverso l'uso di diversi suoi strumenti. In particolare, lo strumento *Libro* ha fatto da contenitore per ciascuno dei tre gruppi di consegne. La sua struttura a pagine ha risposto bene alle esigenze di progettazione che hanno previsto: per ciascuna consegna, la visione di un insieme di brevi video, riuniti in un unico "contenitore", riguardanti ciascuno una tematica relativa a un unico macroargomento, della durata complessiva di 20-25 minuti, accompagnati da attività che stimolano l'approfondimento di alcuni aspetti specifici. La maggior parte delle pagine virtuali dei libri *iCorsi* realizzati contengono, quindi un breve video (della durata di pochi minuti), seguito da una o più consegne ad esso relative. Gli strumenti multimediali utilizzati per la creazione delle attività su piattaforma sono stati di vario genere: file di testo (articoli di ricerca, schede, estratti di libri), quiz multimediali (*iCorsi*), link web, quaderni *Cabri*[8].

La componente visiva dei filmati è stata realizzata a partire da slide *Keynote* appositamente predisposte, che hanno permesso una rappresentazione grafica dinamica degli enti geometrici coinvolti (Figure 4-7). I video consistono, quindi, in registrazioni di presentazioni, il cui audio con la voce della docente è stato catturato con un microfono. Il loro contenuto è ispirato al libro *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria*, di Fandiño Pinilla e Sbaragli (2011), nel quale si utilizza un linguaggio colloquiale e scherzoso.



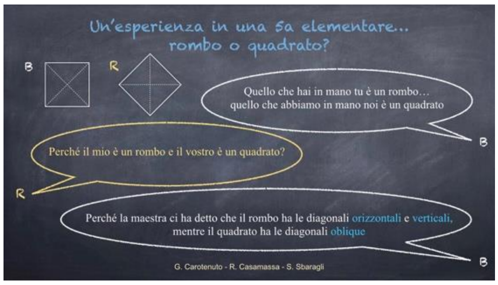


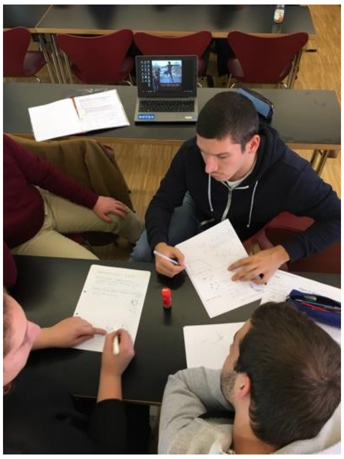
Figure 4, 5, 6, 7 – Immagini tratte dai video realizzati

[8] *Cabri* è un software che permette la creazione di attività per lo studio della matematica, utilizzato in Canton Ticino nella scuola dell'infanzia e nella scuola elementare (http://www.e-sco.ch/CE/Home.html). Le attività realizzate attraverso il software ad opera dei membri del gruppo CabriTicno sono dette *quaderni*, per via della loro struttura in schermate sequenziali. La scelta di proporre all'interno del percorso quaderni *Cabri*, opportunamente modificati per rispondere alle esigenze formative degli allievi, è motivata da una duplice intenzione. In primo luogo, si volevano impegnare a casa gli studenti in attività di tipo laboratoriale, utilizzando canali differenti; inoltre, si desiderava che gli studenti prendessero contatto con il software, che potrebbe rivelarsi un valido strumento per la loro attività professionale.

Tutte le attività del lavoro a casa, fatta eccezione per quelle di visione dei filmati e di lettura di articoli o estratti di libri, hanno previsto la restituzione da parte degli studenti di un prodotto attraverso la funzione *Compito* di *iCorsi*. Ciò ha permesso alla docente di avere un controllo sul lavoro svolto dagli studenti, ma soprattutto di restituire un feedback durante gli incontri in aula, in ottica di valutazione formativa e valorizzazione del lavoro a casa, e di apportare modifiche alla progettazione delle lezioni.

Allenamento in aula. I tre incontri in aula in modalità flipped classroom relativi alla fase di allenamento si sono svolti in un periodo di tre settimane. Ogni lezione è cominciata con una ripresa da parte della docente dei contenuti teorici e delle attività precedentemente affrontate a casa, per la quale sono state scelte diverse modalità, prevedendo sempre però uno spazio di interazione con gli studenti per rispondere alle loro richieste di chiarimenti e per fornire un feedback sul lavoro svolto a casa. Questi momenti iniziali sono stati dedicati anche ad approfondimenti teorici e pratici, in cui si è data particolare rilevanza agli aspetti relativi alla trasposizione didattica dei saperi in gioco nel contesto della scuola elementare.

La parte più consistente degli incontri ha previsto lo svolgimento di attività laboratoriali in piccoli gruppi collegate alle risorse cognitive proposte a casa, durante le quali la docente ha assunto il ruolo di tutor, allo scopo di dare suggerimenti e chiarire dubbi, e ha orchestrato le fasi di discussione collettiva in cui gli studenti hanno condiviso strategie e risultati.



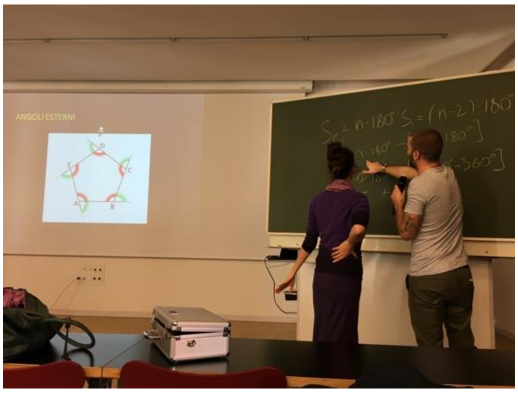


Figure 8, 9, 10 – Immagini tratte dagli incontri in aula

La competenza focus del percorso ha guidato la progettazione di ogni attività proposta: ampio spazio si è dato, infatti, alle definizioni, alle spiegazioni e alle argomentazioni degli studenti. Per andare in profondità sull'articolazione tra lavoro a casa e in aula si veda (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017, pp. 67-85).

Accanto ai due momenti chiave dell'allenamento e della partita, nel canovaccio didattico sono stati presenti altri due passaggi che lo hanno caratterizzato: la condivisione di senso e la riflessione.

Condivisione di senso. La condivisione di senso è, in generale, l'occasione per rendere visibili agli studenti i significati del percorso formativo proposto e motivarli a intraprendere il percorso stesso puntando a suscitare il loro interesse e a coinvolgerli nel lavoro formativo.

Nel percorso oggetto di analisi, alla condivisione di senso è stato dedicato il primo incontro e altri momenti durante l'allenamento. Agli studenti sono stati presentati il traguardo di competenza che si voleva raggiungere e la partita che si aveva intenzione di giocare insieme, secondo la situazione problema stabilita, sottolineando che in essa la comunicazione e il linguaggio della matematica avrebbero avuto un ruolo rilevante, così come le risorse cognitive in gioco. In quest'ottica e in maniera scherzosa, nella lezione introduttiva si è mostrato un breve filmato tratto dal noto quiz televisivo italiano "Chi vuole essere milionario?", all'interno del quale dalle parole della concorrente emergono diverse misconcezioni relative al concetto di altezza di un triangolo e una scarsa padronanza del linguaggio matematico. La visione del video è diventata un'occasione per coinvolgere gli studenti in una discussione collettiva sulla competenza focus. Si è discusso dell'importanza di conoscere le risorse cognitive di base della disciplina e di saper comunicare contenuti matematici, con il fine professionale di riuscire a spiegare efficacemente ai propri allievi i saperi in gioco, in accordo con quanto previsto dal profilo di competenze in uscita della formazione Bachelor e con quanto già sperimentato durante le giornate di tirocinio a scuola.

Riflessione. La riflessione è, invece, l'occasione per gli studenti di rileggere il proprio lavoro formativo e i suoi risultati, riconoscerne le potenzialità e i limiti, le acquisizioni sviluppate e i miglioramenti ancora da fare.

L'attività di riflessione non è stata pensata in questo contesto come una fase del percorso formativo circoscritta a un momento finale, ma come descritto nel paragrafo 4 e come mostrato alla voce "allenamento", è stata costantemente presente nel lavoro a casa e in aula, attraverso i differenti dispositivi di valutazione formativa adottati.

Le ultime due "fasi", perciò, più che collocarsi in un momento cronologicamente preciso, hanno attraversato l'intero percorso formativo, sebbene i loro nomi tendano anche a richiamare le mosse di apertura e di chiusura di un percorso di apprendimento.

6. Riflessioni critiche sull'esperienza di progettazione

Nell'esperienza che è stata presentata si è scelto di adottare la progettazione a ritroso come cornice entro cui strutturare un percorso didattico con un approccio flipped classroom orientato verso lo sviluppo di competenze.

Molte sono state le nuove sfide che la docente del corso ha dovuto cogliere per realizzare una progettazione a ritroso dell'itinerario, che è stata inizialmente percepita complessa da essere implementata. Prima tra tutte, l'individuazione a priori di un unico traguardo di competenza focus, che fosse in linea con il profilo atteso in uscita dalla formazione Bachelor e con le proprie convinzioni su ciò che risulta importante per gli studenti per la loro futura professione, e al tempo stesso potesse orientare gli scopi della docente durante l'intero percorso didattico. Anche l'anticipazione delle questioni valutative alla strutturazione operativa del percorso didattico ha richiesto un faticoso cambio di mentalità, impegnando la docente in un design didattico che prevedesse a priori una chiara idea della meta da raggiungere.

Tali sforzi sono stati però ripagati, in fase di attuazione del percorso. Innanzitutto, una *maggiore consapevolezza progettuale* ha guidato, anche a livello pratico, gli interventi didattici verso lo sviluppo di un traguardo di competenza ben identificato. Inoltre, l'introduzione di strumenti di valutazione formativa in itinere più strutturati, come i quiz individuali, la riflessione auto-valutativa o la rubrica di valutazione tra pari, ha dato possibilità di monitorare con maggiore accuratezza gli apprendimenti e, tenendo conto dei diversi sguardi coinvolti (*cosa so fare*, *come mi vedo*, *come mi vedono*), ha permesso di mettere sempre di più al centro dell'attenzione le esigenze degli allievi.

Una considerazione emersa da parte della docente durante il bilancio del progetto è che spesso si gestiscono i corsi per diversi anni spendendo molte energie, ma senza profondità progettuale, rischiando così di perdere l'occasione di massimizzarne l'efficacia. L'intero percorso formativo e i risultati della valutazione finale dimostrano infatti, nella maggior parte dei casi, che gli allievi hanno mobilitato con entusiasmo, consapevolezza e in maniera adeguata la competenza focus. Ne sono una testimonianza le significative risposte fornite nella valutazione dell'intero corso (ad esempio, "Le sfide proposte in classe hanno aiutato a creare lo spirito adeguato. I "giochini" proposti hanno aiutato a tenere l'attenzione sul focus e ci hanno consentito di esercitarci. Ho apprezzato molto anche il libro di riferimento") o durante la riflessione auto-valutativa (Allegato 6), e le centrate argomentazioni date alle domande aperte della prova d'esame che, se confrontate globalmente con quelle fornite in occasione delle prove analoghe degli anni precedenti, testimoniano un miglioramento nell'apprendimento che sembrerebbe merito di questo tipo di impostazione didattica del corso.

Più in generale, i risultati del progetto FliSCo hanno dimostrato come la progettazione a ritroso sia stata ben accolta come *impianto progettuale adeguato a implementare un approccio flipped classroom* per lo sviluppo di competenze nei propri corsi da parte dei diversi docenti coinvolti nella sperimentazione (Sbaragli, Carotenuto & Castelli, 2017). Infatti, tale tipo di progettazione pone al centro dell'attenzione le competenze che si intendono sviluppare, così come avviene per le diverse interpretazioni di flipped classroom attualmente considerate dal dibattito internazionale che fanno anch'esse riferimento a una costruzione attiva dell'apprendimento da parte degli studenti al fine, appunto, di favorire lo sviluppo di competenze.

Inoltre, nel particolare contesto formativo della didattica disciplinare all'interno della formazione insegnanti, i filtri proposti in (Wiggins & McTighe, 2004a) risultano uno strumento di grande utilità per determinare ciò che merita di essere compreso in profondità all'interno della sempre più vasta gamma di tematiche rientranti in una disciplina, al fine di raggiungere un necessario *equilibrio tra ampiezza e profondità della comprensione*. Un rischio a cui i disciplinaristi che operano in questo contesto sono esposti è, infatti, la tentazione di affrontare diversi argomenti considerati importanti per gli esperti della disciplina, ma che poco rispondono ai reali bisogni formativi dei futuri docenti. Eppure, affrontare contenuti non facilmente riconducibili al nucleo centrale della materia, o con un basso potenziale di coinvolgimento e spendibilità, non motiva certamente gli studenti ad assumersi la responsabilità di perseguire una comprensione profonda della disciplina che possa successivamente trasformarsi in competenze di insegnamento. Tale pericolo non andrebbe sottovalutato soprattutto nell'ambito della didattica della matematica nel particolare contesto formativo della formazione primaria, in cui gli studenti in entrata dimostrano molto di frequente un atteggiamento negativo nei confronti dello studio della matematica. Diversi studi documentano infatti la grande diffusione del problema delle emozioni negative verso la matematica dei docenti della scuola primaria fin dall'inizio della loro formazione (Di Martino & Sabena, 2011) e come queste possano interferire con la loro crescita professionale (Hannula, Liljedahl, Kaasila & Rösken, 2007).

7. Bibliografia

Bergmann, A., & Sams, J. (2012). *Flip your Classroom: Reach every Student in every Class every Day*. New York: Intl Society for Technology.

Campolucci, L., Maori, D., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica, 3*, 353-400.

Castoldi, M. (2011). *Progettare per competenze*. Roma: Carocci.

Castoldi, M. (2016). *Valutare e certificare le competenze*. Roma: Carocci.

Castoldi, M. (2017). *Costruire unità di apprendimento*. Roma: Carocci.

Cecchinato, G., & Papa, R. (2016). *Flipped Classroom: un nuovo modo di insegnare e apprendere*. Novara: De Agostini.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *19*(2), 221–266.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., & Sbaragli, S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *25, 2, 117–161.*

D'Aprile, M., Squillace, A., Armentano, P., Cozza, P., D'Alessandro, R., Lazzaro, C., Rossi, G., Scarnati, A. L., Scarpino, G., Servi, G., & Sicilia, R. (2004). Dillo con parole tue. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 27 B (1), 31-51.

DECS (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch/ (consultato il 27.09.2017).

Di Martino, P., & Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. In K. Kislenko (Ed.). *Current state of research on mathematical beliefs XVI* (pp. 89-105). Tallinn: Tallinn University.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 5, 37-65.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2011). *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Franchini, E., Salvisberg, M., & Sbaragli, S. (2016). *Riflessioni sulla valutazione formativa tramite l'uso di video. Linee guida per formatori*. Locarno: SUPSI – Dipartimento formazione e apprendimento.

Hannula, M., Liljedahl, P., Kaasila, R., & Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds.), *Proc. of 31st PME Conference* (Vol. 1, pp. 153-156), Seoul, Korea.

Lebrun, M. (2016). La classe inversée au confluent de différentes tendances dans un contexte mouvant. In A. Dumont & D. Berthiaume (Eds.), *La pédagogie inversée,* pp. 13-39. Louvain–la-Neuve: De Boeck.

Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la Matematica*. Napoli: Tecnodid Editrice.

MIUR (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Disponibile in http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf (consultato il 27.09.2017).

Radorf, L., & Demers, S. (2006). *Comunicazione e apprendimento. Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. Bologna: Pitagora.

Sbaragli, S. (2017). Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, A-B (40), pp. 227-248.

Sbaragli, S., & Mammarella, I. C. (2010). L'apprendimento della geometria. In D. Lucangeli & I. C. Mammarella (Eds.), *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento*, pp. 107-135. Milano: FrancoAngeli.

Sbaragli, S., Carotenuto, G., & Castelli, L. (Eds.). (2017). *Flipped classroom come approccio per lo sviluppo di competenze. Rapporto interdipartimentale dell'Asse 8*. Disponibile in www.supsi.ch/go/rapporto-flisco (consultato il 22.10.2017).

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77.

Tyler, R. W. (1949). *Basic Principles of Curriculum and Instruction*. Chicago: The University of Chicago.

Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza.

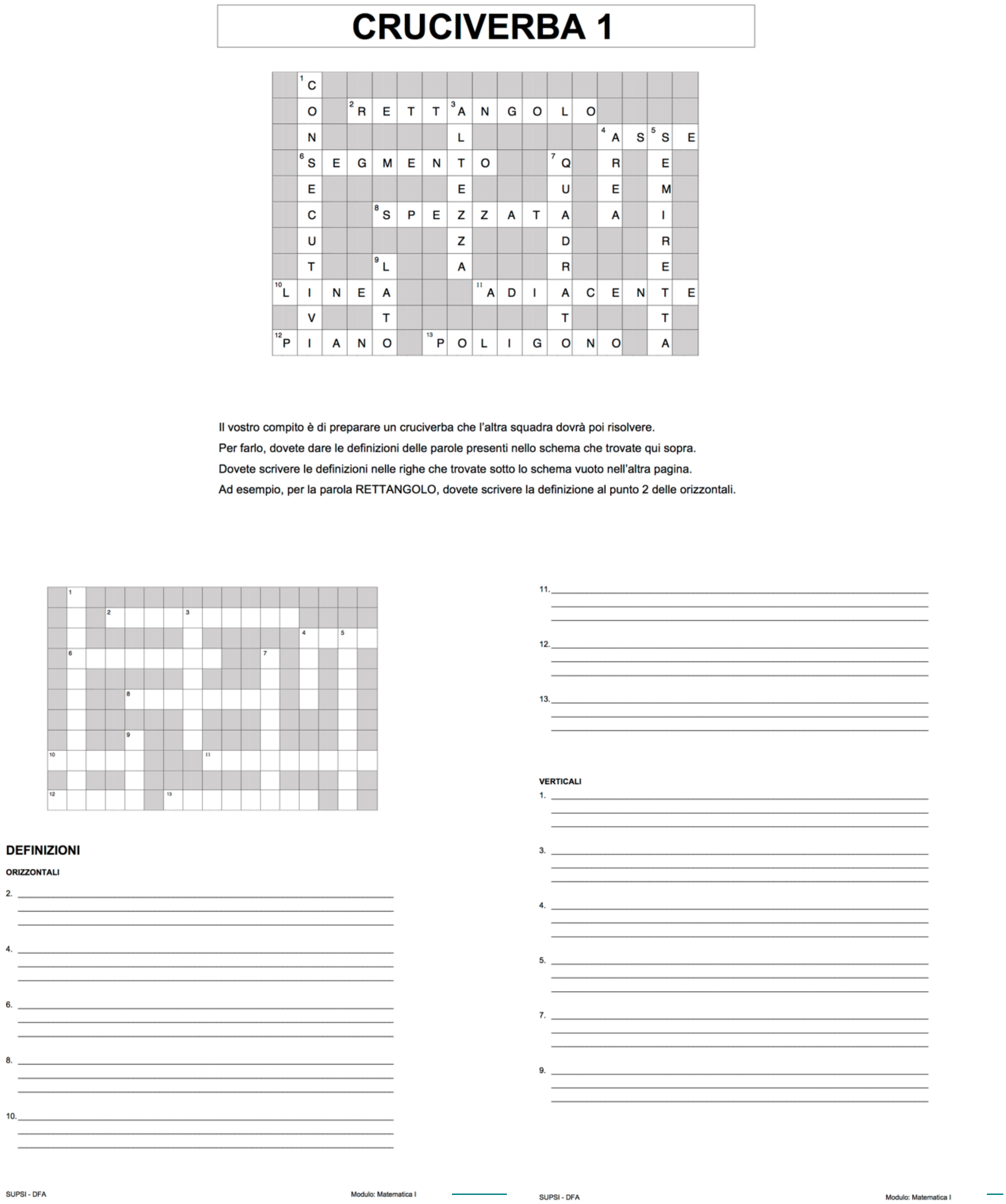
Wiggins, G., & McTighe, J. (2004a). *Fare progettazione. La teoria di un percorso didattico per la comprensione significativa*. Roma: LAS.

Wiggins, G., & McTighe, J. (2004b). *Fare progettazione. La pratica di un percorso didattico per la comprensione significativa*. Roma: LAS.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci Faber.

Allegato 1

Una delle due schede dell'attività del cruciverba.



CRUCIVERBA 1

	1 C															
	O		2 R	E	T	T	3 A	N	G	O	L	O				
	N						L						4 A	S	5 S	E
	6 S	E	G	M	E	N	T	O			7 Q		R		E	
	E						E				U		E		M	
	C			8 S	P	E	Z	Z	A	T	A		A		I	
	U						Z				D				R	
	T			9 L			A				R				E	
10 L	I	N	E	A				11 A	D	I	A	C	E	N	T	E
	V			T							T				T	
12 P	I	A	N	O		13 P	O	L	I	G	O	N	O		A	

Il vostro compito è di preparare un cruciverba che l'altra squadra dovrà poi risolvere.
Per farlo, dovete dare le definizioni delle parole presenti nello schema che trovate qui sopra.
Dovete scrivere le definizioni nelle righe che trovate sotto lo schema vuoto nell'altra pagina.
Ad esempio, per la parola RETTANGOLO, dovete scrivere la definizione al punto 2 delle orizzontali.

DEFINIZIONI

ORIZZONTALI

2.

4.

6.

8.

10.

11.

12.

13.

VERTICALI

1.

3.

4.

5.

7.

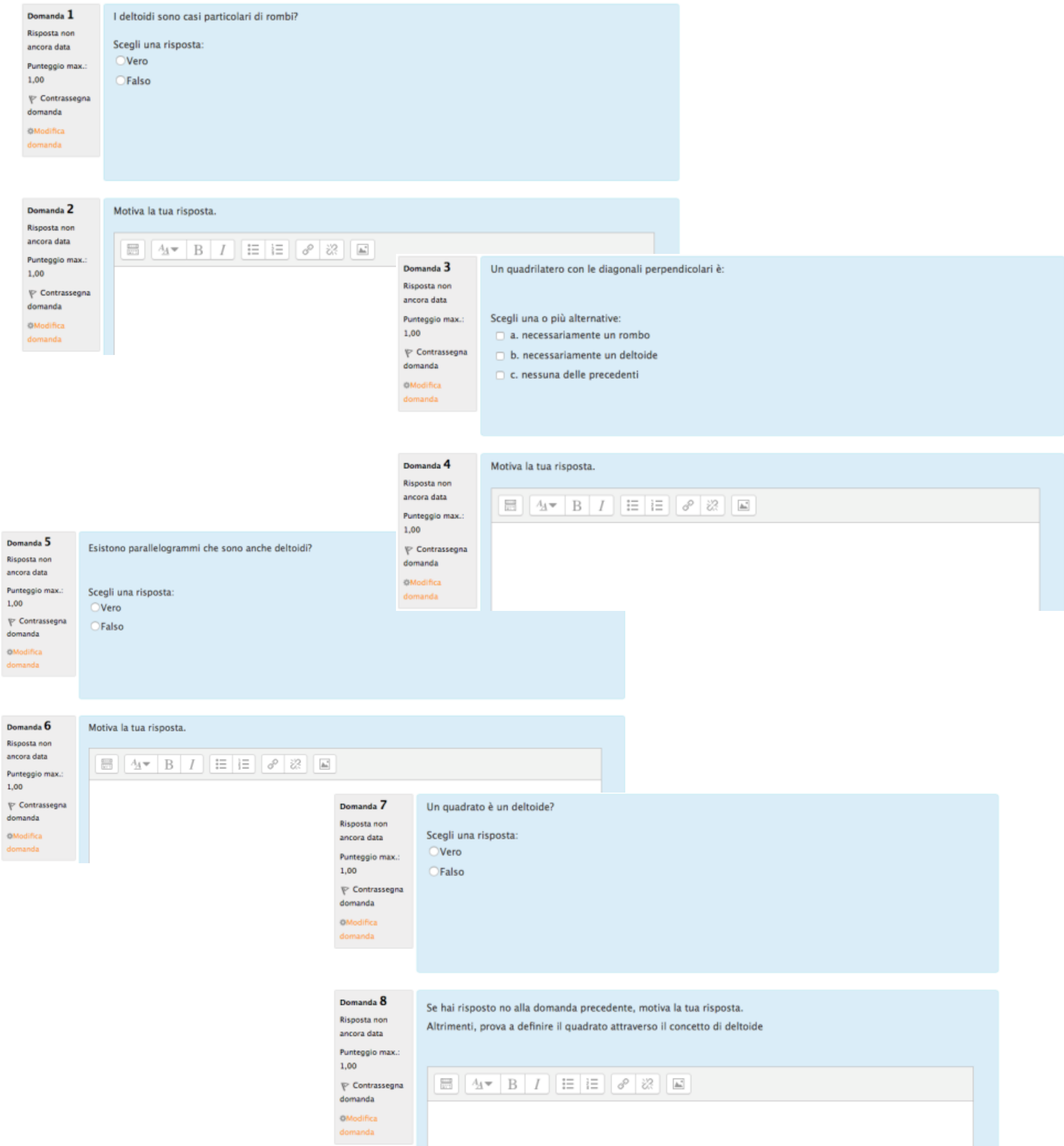
9.

SUPSI - DFA Modulo: Matematica I

SUPSI - DFA Modulo: Matematica I

Allegato 2

Alcune immagini tratte dal quiz online proposto tramite la piattaforma *iCorsi*.



Allegato 3

Quiz proposto attraverso lo strumento *web Socrative.*

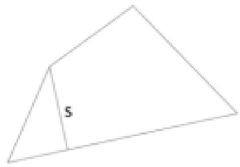
socrative
by MasteryConnect

Domande di verifica - lezione 02.12. Score:

1. Nell'immagine a lato sono rappresentati un quadrilatero e un segmento. Il segmento s può rappresentare un'altezza del quadrilatero?

(A) True

(B) False



2. Tra le seguenti combinazioni quali sono quelle possibili?

(A) triangolo rettangolo isoscele

(B) triangolo ottusangolo equilatero

(C) triangolo ottusangolo isoscele

(D) triangolo equiangolo scaleno

(E) triangolo acutangolo equilatero

3. L'insegnante chiede ai suoi allievi "che cos'è l'altezza di un poligono?". Tra le seguenti risposte fornite dagli allievi qual è quella corretta?

(A) Alice: "L'altezza è un segmento verticale e perpendicolare con estremi un vertice del poligono e un punto su un lato opposto a questo vertice".

(B) Chiara: "L'altezza è un segmento".

(C) Simone: "L'altezza rispetto ad un lato è la distanza massima dei punti della figura rispetto alla retta che contiene il lato".

(D) Roberto: "L'altezza corrisponde alla distanza dei vertici del poligono rispetto alla rette contenenti i lati opposti a questi vertici".

4. Un rettangolo è anche un trapezio rettangolo?

(A) True

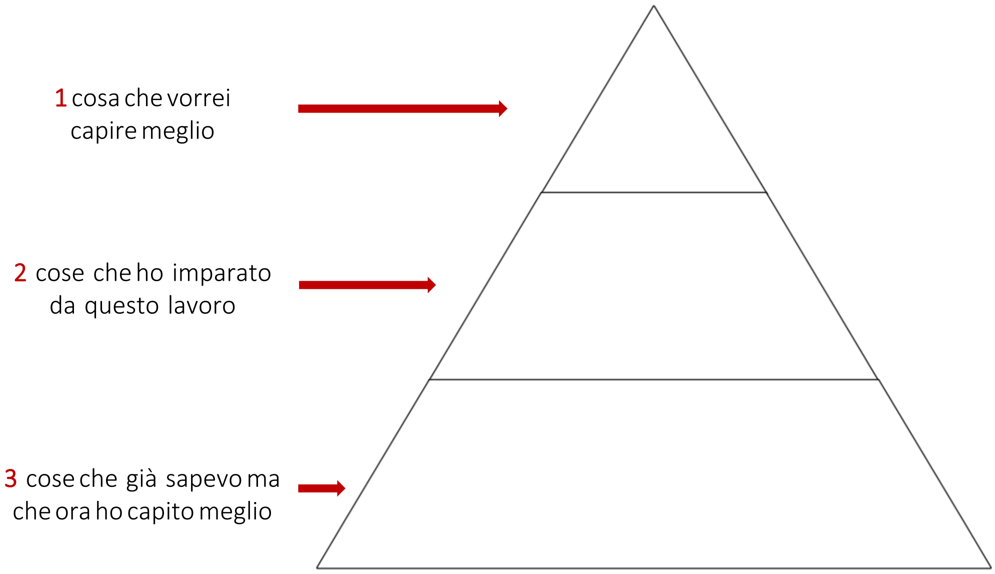
(B) False

Allegato 4

Prima pagina della scheda di riflessione auto-valutativa.

Autovalutazione – Percorso di geometria piana in modalità Flipped Classroom

Ti proponiamo una riflessione sul tuo apprendimento riguardante tutto il percorso di geometria piana che è stato svolto in modalità Flipped Classroom con lo scopo di offrire un'occasione di prendere consapevolezza rispetto al proprio apprendimento.



Allegato 5

Rubrica di valutazione tra pari

Cruciverba matematico
Valutazione tra pari

Criteri	1 punto	2 punti	3 punti
Tipi di linguaggio utilizzati	Utilizza prevalentemente il linguaggio quotidiano	Utilizza in egual misura il linguaggio quotidiano e quello matematico	Utilizza prevalentemente il linguaggio matematico
Correttezza delle definizioni rispetto ai concetti matematici	Coinvolge frequentemente proprietà che non appartengono ai concetti matematici da definire	Coinvolge raramente proprietà che non appartengono ai concetti matematici da definire	Coinvolge esclusivamente proprietà che appartengono ai concetti matematici da definire
Adeguatezza delle definizioni	Fornisce frequentemente proprietà che non sono sufficienti o che sono sovrabbondanti per definire	Fornisce raramente proprietà che non sono sufficienti o che sono sovrabbondanti per definire	Fornisce esclusivamente proprietà che sono sufficienti e non sono sovrabbondanti per definire
Efficacia comunicativa	Comunica in maniera poco efficace rispetto agli interlocutori e ai vincoli del compito	Comunica in maniera abbastanza efficace rispetto agli interlocutori e ai vincoli del compito	Comunica in maniera molto efficace rispetto agli interlocutori e ai vincoli del compito
Completezza del lavoro	Il lavoro risulta decisamente incompleto	Il lavoro risulta parzialmente completo	Il lavoro risulta completo in ogni sua parte
Punteggio totale:			

SUPSI-DFA Modulo: Matematica I

Allegato 6

Risposte di uno studente fornite alle domande di riflessione auto-valutativa.

1 cosa che vorrei capire meglio:
Per quanto riguarda l'aspetto teorico mi sembra di aver capito in maniera adeguata i vari concetti, magari si potrebbe approfondire e sviluppare con varie modalità l'ambito didattico.

2 cose che ho imparato da questo lavoro:
Questo lavoro mi ha permesso di approfondire e visionare maggiormente nel dettaglio le mie conoscenze.

3 cose che già sapevo ma che ora ho capito meglio:
Queste proposte mi sono servite per rinfrescare la memoria e tradurre queste competenze in un linguaggio adatto ai bambini delle scuole elementari.

SUPSI - DFA Modulo: Matematica I

Received October 23, 2017
Revision received November 11, 2017/December 28, 2017
Accepted January 8, 2018

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 174-189 – ISSN 2038-1034

La discussione collettiva: un’occasione per espletare il potenziale matematico delle fonti storiche

Andrea Maffia

Abstract – *Integrating the history of mathematics in class could be a hard task with young pupils. Indeed, the language of historical sources often poses problems for the modern reader.. Such texts represent cultural artefacts that can give access to mathematical knowledge. The teacher can exploit such potential by acting as a mediator between the mathematical signs of the source and those signs that are accessible to students. Through a case study, we investigate the role of the teacher in the process of semiotic mediation during a collective discussion. The intervention analysed is made up of two phases: firstly, the students work together and, secondly, the teacher mediates a discussion aimed at institutionalizing the knowledge gained. During the analysis of the discussion, working on a text from Tartaglia’s translation of Euclid’s Elements, a group of fifth graders construct a definition of prime numbers. Referring to Theory of Semiotic Mediation, we analyse the role of the teacher in building up semiotic chains linking the students’ productions to an institutionalized knowledge emerging from the discussion. We highlight how the teacher’s focalization on the students’ words facilitates the progress of the discussion, in other words, the potential of the historical text is exploited by fostering a definition that is close to culturally shared mathematics.*

Riassunto – *L’integrazione della storia della matematica può risultare difficile con gli studenti più giovani. Infatti, la fonte storica può presentare un linguaggio lontano da quello attuale. Tali testi rappresentano artefatti culturali che possono dar accesso a una conoscenza matematica. L’insegnante può espletare tale potenziale agendo da mediatore tra i segni matematici della fonte e i segni accessibili agli studenti. Con uno studio di caso, si indaga il ruolo dell’insegnante nel processo di mediazione semiotica durante una discussione collettiva. L’intervento analizzato si svolge in due fasi: una fase in cui gli studenti lavorano collaborando e una fase di istituzionalizzazione attraverso la discussione mediata dall’insegnante. Nella discussione analizzata, il lavoro su un testo tratto dalla traduzione di Tartaglia degli Elementi di Euclide, porta alla costruzione di una definizione di numeri primi all’interno di una classe quinta della scuola primaria. Facendo riferimento alla Teoria della Mediazione Semiotica, si analizza il ruolo del docente nella costruzione di catene semiotiche a partire dalle produzioni dei singoli gruppi fino all’istituzionalizzazione di un sapere condiviso emergente dalla discussione. Si mette in evidenza che la focalizzazione dell’insegnante sulle parole degli alunni permette l’avanzamento della discussione, ovvero viene espletato il potenziale del testo storico arrivando a una definizione vicina alla matematica culturalmente condivisa.*

Keywords – collective discussion, historical sources, mediation, semiotics, teacher

Parole chiave – discussione collettiva, fonti storiche, mediazione, semiotica, insegnante

Andrea Maffia ha conseguito il Dottorato di ricerca in Didattica della Matematica presso l'Università di Modena e Reggio Emilia. Attualmente è insegnante nella scuola del primo ciclo e docente a contratto di alcuni corsi e laboratori del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università di Bologna. È membro eletto del comitato della Società Europea di Ricerca in Didattica della Matematica come rappresentante dei giovani ricercatori. La sua ricerca riguarda principalmente gli aspetti semiotici nel processo di apprendimento e insegnamento dell'aritmetica nel primo ciclo, con una particolare attenzione verso il ruolo dell'insegnante.

1. La discussione matematica

Il costrutto di discussione matematica ha radici lontane e definizioni diverse. Per esempio, secondo Pirie e Schwarzenberger (1988) si tratta di una "conversazione intenzionale su un soggetto matematico in cui ci sono contributi e interazioni genuini degli allievi" (citato in Bartolini Bussi, 1991, p. 9). Nel documento Matematica per il cittadino, prodotto dall'Unione Matematica Italiana (2001), si parla invece di una "polifonia di voci articolate su un oggetto matematico che è uno degli scopi dell'attività di insegnamento/apprendimento" (p. 107). Quest'ultima definizione viene ripresa da lavori precedenti di Bartolini Bussi e colleghi (Bartolini Bussi & Boni, 1995; Bartolini Bussi *et al.*, 1995; Bartolini Bussi, 1996) in cui viene evidenziata la non casualità dell'uso del termine *voci*, da intendersi con riferimento all'uso che ne viene fatto da Wertsch (1991) seguendo la tradizione dei lavori di Bakhtin, ovvero come una forma di pensiero/comunicazione che rappresenta "la prospettiva di un individuo, il suo orizzonte concettuale, le sue intenzioni, il suo modo di vedere il mondo" (Bartolini Bussi, 1996, p. 16).

Una modalità di discussione matematica è il dibattito scientifico su un oggetto matematico comune; tale dibattito viene introdotto e orchestrato dall'insegnante per raggiungere delle conclusioni condivise sull'oggetto matematico al centro della discussione. La voce portata dall'insegnante rappresenta la cultura matematica ed è quindi diversa dalle voci che sono introdotte nella discussione dagli studenti; queste "portano in scena prospettive di altre categorie sociali e culturali (ad esempio quelle della pratica extrascolastica connessa al sapere matematico espresso dall'insegnante)" (Bartolini Bussi & Boni, 1995, p. 227).

Le parole del bambino coincidono con le parole dell'adulto nel loro riferimento all'oggetto, cioè indicano gli stessi oggetti, si riferiscono allo stesso cerchio di fenomeni; non coincidono però nel loro significato (Vygotskij, 1992, citato in Bartolini Bussi & Boni, 1995, p. 232).

Quando la classe ha una lunga esperienza in questo tipo di dibattiti, le diverse voci vengono sintetizzate negli interventi degli allievi (Bartolini Bussi, 1996). Nel caso in cui le voci emerse nell'attività collettiva riemergano nelle produzioni individuali allora tali voci sono *interiorizzate* (Vygotskij, 1978) e sono espresse, implicitamente o esplicitamente, da un attore individuale che sta parlando con se stesso (Bartolini Bussi, 1996).

Le discussioni possono essere classificate in diverse categorie a seconda dell'oggetto di discussione e della modalità (Bartolini Bussi, 1991). Sono discussioni di matematizzazione quelle in cui si risolve collettivamente un problema oppure si condividono le soluzioni individuali. Sono discussioni di concettualizzazione quelle che partono da domande relative al significato di un termine o di qualsiasi altro segno matematico (simbolico, grafico, ecc.). Quest'ultima modalità di discussione ha lo scopo di espandere tali significati ed è generalmente utilizzata all'inizio di un intervento didattico per richiamare esperienze pregresse degli studenti oppure al termine di discussioni di altro tipo per fare sintesi (*ibidem*).

La discussione che verrà analizzata in questo lavoro è classificabile proprio come una discussione di concettualizzazione. In particolare, a partire da una fonte storica gli studenti sono guidati verso la (ri)costruzione di una definizione. L'uso di una fonte storica porta nella discussione un'ulteriore voce, quella di Tartaglia, che si aggiunge a quelle dell'insegnante e dei discenti. Tale voce ha delle peculiarità che derivano dal tempo e dal luogo in cui il testo storico è stato scritto e che richiedono un particolare intervento dell'insegnante; tali peculiarità sono discusse nelle sezioni successive.

2. Fonti storiche come artefatti culturali

L'introduzione della storia della matematica all'interno dell'insegnamento della matematica ha le sue origini nella cosiddetta "teoria della ricapitolazione" per cui lo sviluppo culturale del singolo (ontogenesi) seguirebbe un cammino analogo a quello della storia della conoscenza così come vissuta dai suoi predecessori (filogenesi). Sebbene questo approccio teorico si sia rivelato fallace sia dal punto di vista biologico sia psicologico, è rientrato più volte nel discorso dell'educazione matematica (Furinghetti & Radford, 2008). In questo lavoro ci si discosta da tale approccio allineandosi invece alla prospettiva di Freudenthal (1973) secondo cui "Esortare a un insegnamento in prospettiva genetica non significa che le idee debbano essere presentate nell'ordine in cui sono emerse e neanche con i vicoli ciechi e tutte le deviazioni che sono stati tagliati fuori. Chi ha la vista di ciò che viene a posteriori, può dire come sarebbe stato ciò che il cieco ha inventato e scoperto se ci fossero stati insegnanti che sapevano ciò che adesso sappiamo… Non è l'impronta storica dell'inventore che dovremmo seguire, ma un corso della storia migliorato e meglio guidato" (pp. 101-103).

L'introduzione della storia può essere attuata attraverso fonti primarie, ovvero i manoscritti originali, o fonti secondarie, opere riedite, modificate o commentate. Le fonti primarie hanno notevoli potenzialità: Demattè e Furinghetti (2011) ritengono che l'uso delle fonti originali favorisca il contatto con linguaggi, rappresentazioni, forme di comunicazione e problemi stimolando la riflessione culturale sulle civiltà presenti e passate.

L'uso delle fonti originali può anche presentare vari problemi. Una difficoltà consiste nella scarsa accessibilità ai testi antichi; tuttavia, le moderne biblioteche digitalizzate permettono l'accesso libero a molti fonti che sarebbero altrimenti introvabili. Dal punto di vista didattico l'uso delle fonti primarie richiede una preparazione di tipo storico e la conoscenza della lingua utilizzata dal matematico considerato. Tutto ciò rende l'uso delle fonti primarie all'interno della scuola piuttosto raro, specialmente nel primo ciclo d'istruzione.

Nel presente lavoro si assume un'ottica vygotskiana partendo dall'idea che lo sviluppo di ogni persona è un processo di interiorizzazione di modi di vivere storicamente stabiliti e collettivamente implementati (Sfard, 2009). Si concorda con Radford quando afferma che "il modo in cui un'antica idea è stata forgiata può aiutarci a ritrovare quegli antichi significati che, mediante un'opportuna opera di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi compatibili con i moderni programmi scolastici" (Radford, 1997, citato in D'Amore e Bagni, 2005, p. 77). Per questo, come verrà specificato successivamente, si è fatta la scelta di integrare una fonte storica primaria in un intervento didattico nella scuola primaria. Tuttavia, visto quanto gli autori sopracitati sottolineano l'importanza dell'*adattamento* didattico, si vuole studiare con particolare attenzione il ruolo dell'insegnante nel proporre l'uso della fonte storica.

Ci si ispira al lavoro di Mariotti e Maracci (2012) che utilizzano un brano di Eulero tratto dal suo *Introductio in Analysis Infinitorum, Tomus secundus, Theoriam Linearum curvarum* (1748) per avviare una discussione sul grafico di una funzione con degli studenti di scuola secondaria di secondo grado. La classe coinvolta nella loro sperimentazione ha fatto uso del software Cabri-Geometre per rappresentare grafici di funzione come co-variazione di due variabili e viene loro proposto un testo in cui Eulero suggerisce un approccio simile a quello seguito dal programma. Dopo aver chiesto agli studenti di dar senso al testo di Eulero, l'insegnante chiede di rappresentare con una figura quello che il testo storico spiega. Immediatamente emerge dagli studenti un richiamo al software utilizzato. Come notano gli autori, "Il testo di Eulero, per via del suo potere evocativo, funziona come artefatto secondario in relazione all'artefatto primario Cabri: la descrizione dinamica di variabili, funzione e grafico fornita è consistente con quella che si può esperire con Cabri. Allo stesso tempo, realizzare la costruzione di Eulero con Cabri può aiutare a dar senso al testo stesso. Quindi i due artefatti hanno il potere di evocarsi l'un l'altro. L'articolazione del mondo di Cabri e del mondo matematico evocato dal testo fornisce una polifonia di voci… tale polifonia offre all'insegnante *una risorsa che può essere sfruttata nella discussione collettiva*: una prospettiva multipla che mette in relazione le attività in Cabri con il significato matematico di grafico" (Mariotti & Maracci, 2012, p.69, enfasi aggiunta).

Pertanto la fonte storica agisce come un artefatto in quello che gli autori interpretano, all'interno del quadro di riferimento della Teoria della Mediazione semiotica, come il processo di *mediazione semiotica* attuato dall'insegnante nel corso della discussione di classe con gli studenti. La finalità del presente lavoro è proprio quella di studiare questo processo nel caso, però, del primo ciclo di istruzione. Una definizione più precisa di tale processo e il quadro teorico di analisi dello stesso sono oggetto della prossima sezione.

3. L'insegnante come mediatore: Teoria della Mediazione Semiotica

La Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) propone un modello del processo di insegnamento-apprendimento basato sulla possibilità di ri-contestualizzare i concetti matematici mettendo al centro dell'attenzione un artefatto e i suoi modi d'uso, come mediatori tra pratica e teoria, tra significati spontanei e matematici (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Prendendo una prospettiva a un tempo didattica e semiotica, elabora il costrutto della mediazione semiotica di Vygotskij (1978) e in particolare ipotizza che lo sviluppo dei significati emergenti dalle attività con strumenti possa fornire la base potenziale per la costruzione, opportunamente guidata, di conoscenze matematiche (Maffia & Mariotti, 2016).

Nella classe, la richiesta di usare un artefatto in relazione a un compito specifico determina il modo in cui è effettivamente usato dagli studenti, e dunque i significati che dall'attività con esso possono emergere. Tali significati possono richiamare per l'esperto (l'insegnante) significati matematici e dunque conoscenze che possono essere obiettivi didattici di un intervento. Tuttavia, non è detto che lo studente sia immediatamente consapevole dei significati matematici che possono essere associati all'artefatto stesso.

Si definisce potenziale semiotico di un artefatto la duplice relazione che lo lega da un lato con i significati personali degli allievi, così come emergono nelle attività di classe, e dall'altro con i significati matematici evocati (agli occhi dell'esperto) dall'uso dell'artefatto (connessioni sul lato sinistro della Figura 1). In questo senso, l'analisi dei modi d'uso di un artefatto in relazione a compiti specifici diventa un elemento chiave della pianificazione di un intervento didattico centrato sull'uso dell'artefatto stesso. La sequenza di attività da presentare agli allievi, così come l'organizzazione di tali attività, deve basarsi sull'analisi del potenziale dell'artefatto in modo che i significati emergenti nello svolgimento del compito con l'artefatto possano svilupparsi acquisendo, anche per gli allievi, lo status di significati matematici.

In che modo si esplicita il potenziale semiotico dell'artefatto? Quando viene chiesto loro di svolgere una consegna con l'artefatto, gli allievi producono testi (verbali, scritti, rappresentazioni grafiche) composti di segni che hanno significato se riferiti alla particolare consegna o all'artefatto stesso: sono segni situati. Per via dello stretto legame che intercorre fra questi segni e l'artefatto, sono detti *segni artefatto*. Attraverso il processo di insegnamento/apprendimento i segni prodotti dagli studenti sono messi in relazione con quelli culturalmente condivisi, quelli che possono essere chiamati *segni matematici* (lato destro della Figura 1).

La differenza sostanziale fra i segni artefatto e quelli matematici è il contesto a cui si riferiscono: i segni artefatto fanno riferimento all'attività realizzata con l'artefatto stesso, possono essere messi in relazione con quella che Radford (2003) chiama *generalizzazione contestuale* o con ciò che Sfard (2009) definisce come *uso guidato da una routine*. Per esempio: se uno studente usa la parola "circonferenza" per riferirsi a tutte le linee chiuse che vengono prodotte usando un compasso, sta utilizzando un segno che appare come matematico ma che può essere ben lontano dal significato culturalmente condiviso di luogo dei punti equidistanti dal centro.

In definitiva, uno degli obiettivi cruciali dell'insegnamento è quello di promuovere "l'evoluzione dei segni che esprimono la relazione tra l'artefatto e i compiti in segni che esprimono la relazione tra artefatto e sapere" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 283).

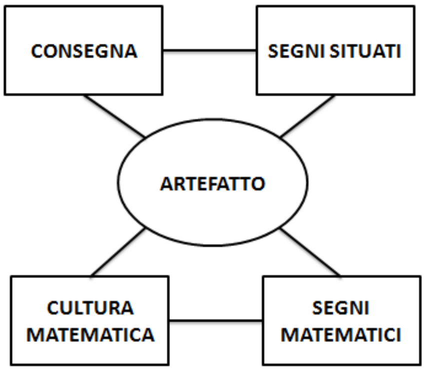


Figura 1 – Modello della polisemia dell'artefatto nella TMS

Un ruolo centrale è giocato dall'insegnante. Durante il processo di mediazione semiotica, l'insegnante usa diversi segni specificatamente per passare dai segni artefatto a quelli matematici. Tutti i segni che sono utilizzati con questo obiettivo vengono definiti *segni pivot* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Esempi di segni pivot sono le ibridazioni di parole o frasi che appartengono al dominio dell'artefatto (come il riferimento a parti dell'artefatto) con altre parole prese dalla cultura matematica. Un artefatto sarà chiamato strumento di mediazione semiotica quando viene usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato intenzionalmente.

L'insieme dei segni artefatto e matematici, insieme ai pivot che li mettono in relazione, viene chiamato catena semiotica.

Lavorando con un artefatto si costruiscono significati legati a esso: le attività semiotiche libere o programmate (dialogo, scrittura di testi, conversazioni) che accompagnano o seguono l'azione con l'artefatto non solo rivelano l'emergere di tali significati, ma costituiscono, in una prospettiva vygotskiana, il contesto sociale nel quale i significati evolvono.
"Nello sviluppo culturale del bambino ogni funzione compare due volte, su due piani: dapprima compare sul piano sociale, poi sul piano psicologico. Prima compare tra due persone, sotto forma di categoria interpsicologica, poi all'interno del bambino, come categoria intrapsicologica" (Vygotskij, 2010, p. 28).

Pertanto la transizione dai significati personali a quelli culturalmente condivisi deve necessariamente passare attraverso l'interazione con gli altri: i pari e i più esperti. In particolare l'insegnante assume il particolare ruolo di *voce* della cultura condivisa dal mondo che si trova all'esterno della classe. Il ruolo chiave del docente è quello dell'esperto che è consapevole del potenziale semiotico dell'artefatto e quindi organizza attività collettive finalizzate alla costruzione di significati matematici.

Pertanto, l'uso di un artefatto all'interno della didattica non può essere studiato senza tener conto delle azioni del docente. "L'insegnante, introducendo un artefatto in una discussione matematica per interpretarne il funzionamento o discutere la soluzione di uno specifico problema, ne sfrutta il potenziale semiotico; evoca situazioni già vissute o ne crea di nuove e concede tempo per l'articolarsi delle voci" (Maffia & Mariotti, 2016, p. 9), sia quelle portate dagli allievi, e centrate sull'esperienza con l'artefatto, sia quella della matematica portata dall'insegnante stesso e, nel nostro caso, anche dalle fonti storiche. Cercherà di rendere accessibili agli allievi i nuovi significati che sono il suo obiettivo didattico. Il docente consapevole del potenziale semiotico di un artefatto organizza tutte le fasi del lavoro al fine di farlo emergere nelle attività che coinvolgono direttamente l'artefatto e di svilupparlo nell'ambito della discussione collettiva della classe.

"L'insegnante agisce come mediatore che utilizza l'artefatto per mediare contenuti matematici agli studenti. In altre parole: l'insegnante utilizza l'artefatto come strumento di mediazione semiotica. Per via dell'importanza culturale di questo processo noi possiamo definire l'insegnante un *mediatore culturale*. Tale espressione non si riferisce all'atto concreto dell'utilizzare uno strumento per svolgere un compito, ma piuttosto al fatto che significati nuovi, legati al reale utilizzo di uno strumento, possono essere generati e possono evolvere sotto la guida di un esperto" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 285, enfasi nell'originale).

Mariotti e Maracci (2010) hanno studiato le azioni degli insegnanti durante la discussione matematica e le hanno classificate in schemi, ovvero insiemi di situazioni in cui l'insegnante mostra dei comportamenti invarianti. A ciascuno schema corrispondono specifici obiettivi che sono di seguito descritti.

Lo schema *back to the task* (ritorno alla consegna) è definito dalla classe di situazioni caratterizzate dalla necessità di promuovere negli studenti la produzione di segni artefatto. In queste situazioni l'insegnante richiede esplicitamente di ricostruire quanto fatto con l'artefatto, il tentativo di richiamare tale attività contribuisce alla ricostruzione di un contesto condiviso e quindi alla condivisione di segni. L'obiettivo è quello di provocare la maggiore produzione possibile di segni artefatto personali all'interno di tale contesto condiviso.

Quando dalla discussione emerge una rete di segni che viene condivisa si crea l'esigenza di selezionare gli aspetti pertinenti rispetto all'obiettivo di raggiungere significati culturalmente condivisi. Queste situazioni corrispondono allo schema *focalization* (focalizzazione) i cui obiettivi sono, appunto, l'evidenziazione di specifici segni al fine di selezionare gli aspetti pertinenti dei significati di tali segni e la circoscrizione dei riferimenti all'artefatto per supportare la presa di coscienza degli aspetti chiave da parte degli studenti. Per far questo, l'insegnante dirige verbalmente l'attenzione degli studenti su certi aspetti dell'artefatto, circoscrive il significato di alcuni segni isolando aspetti chiave dalla molteplicità degli altri possibili. Questi primi due schemi, insieme, costituiscono quella che viene chiamata costruzione collettiva di segni condivisi (*ibidem*).

Lo sviluppo dei segni artefatto verso segni matematici consiste di altri due schemi. Il primo è detto *ask for a synthesis* (richiesta di sintesi) e raccoglie le situazioni in cui la discussione ha già portato all'emergere di segni condivisi stabili che condensano gli aspetti chiave dell'esperienza comune con l'artefatto. In queste situazioni si ha la necessità di generalizzare e decontestualizzare i significati emersi. L'insegnante ha l'obiettivo di promuovere tale decontestualizzazione/generalizzazione mantenendo solo quei significati personali che sono considerati pertinenti al segno matematico obiettivo. Per farlo, richiede esplicitamente di fare sintesi supportando la formazione di un ambiente semiotico in cui segni matematici possono essere prodotti e messi in relazione con segni artefatto. Può incentivare esplicite connessioni fra le due tipologie di segni.

Quando la discussione ha portato a una generalizzazione o a una decontestualizzazione dei significati dall'uso dell'artefatto, è necessario ratificare l'accettabilità di un segno nel contesto della matematica. Queste sono le situazioni in cui l'insegnante fornisce una sintesi; si tratta dello schema *provide a synthesis*. Obiettivi di questo schema sono una formulazione matematica che introduca i segni matematici desiderati come evoluzione dei segni personali emersi precedentemente e l'evidenziazione delle relazioni fra i segni emersi nei vari momenti della discussione. L'insegnante fornisce una esplicita sintesi in cui possono essere introdotti dei nuovi segni matematici in continuità coi segni emersi nella discussione. "Un'orchestrazione della discussione matematica realizzata attraverso un continuo avanti e indietro fra il contesto dell'artefatto e quello matematico può promuovere un ricco intreccio di significati personali e matematici" (Mariotti & Maracci, 2010, p. 103).

Tenendo conto di questo quadro teorico, in questo lavoro si vuole studiare il processo di mediazione semiotica messo in atto dall'insegnante per espletare il potenziale semiotico di una fonte storica primaria nel contesto della scuola primaria. In particolare ci si domanda: nell'orchestrare una discussione matematica su un testo storico, un'insegnante di scuola primaria mette in atto gli stessi schemi di comportamento che in letteratura sono documentati per gli insegnanti di scuola secondaria?

Per rispondere a questa domanda verrà analizzato un singolo studio di caso. I dati saranno analizzati attraverso le lenti teoriche della TMS al fine di individuare se gli schemi classificati da Mariotti e Maracci (2010) sono evidenziabili anche nel nostro contesto.

4. Uno studio di caso

Lo studio di caso qui presentato consiste nell'analisi di una discussione collettiva orchestrata da un'insegnante dopo che gli alunni hanno lavorato alla parafrasi in italiano moderno di un testo in italiano volgare di Tartaglia, tratto dal *Euclide Megarense Acutissimo Philosopho* (1543), ovvero la traduzione commentata degli Elementi di Euclide. L'estratto proposto agli studenti (Figura 2) è il commento del traduttore (cioè Tartaglia stesso) alla seconda definizione dell'ottavo libro, la definizione di numero superficiale. Nel suo commento, Tartaglia mette in guardia il lettore dal pensare che siano numeri superficiali solo quelli che possono essere espressi come prodotto di due numeri maggiori dell'unità, ovvero i numeri non primi. Nel farlo fornisce esempi di numeri superficiali e di numeri primi.

Diffinitione .ii.

[2/17] Lo numero che è contenuto da duoi lati è detto numero ſuperficiale.

Il Tradottore.

Exempli gratia .12. sera detto numero superficiale per essere contenuto da duoi lati liquali sono .3. e .4. ouero .2. e .6. & ſimilmente il .15. & i suoi lati sono .3. e .5. ma alcuni dicono che ne.13. ne.17. ne.19. ne alcuno altro numero primo se pone dire realmente numeri ſuperficiali perche non sono contenuti da duoi lati ouer da dui numeri . ideo & c. Ma questi tali se inganano perche inuero, ogni numeri primo e ſuperficiale, & l'un di suoi lati e la unita e l'altro e il medesimo numero primo.

Figura 2 – Riproduzione del testo consegnato agli studenti

Agli studenti è stata consegnata una foto della fonte originale in cui le lettere appaiono così come riportate nella Figura 2. Si può notare che la mancanza di accenti, l'uso del simbolo "&" per la congiunzione "e" nonché l'uso della "s" lunga costituiscono degli elementi di difficoltà legati alla particolare fonte storica. La classe coinvolta, una quinta primaria, non ha mai svolto lavori di parafrasi di testi in volgare prima di questa consegna. Gli studenti sono stati coinvolti in numerose attività di rappresentazione di moltiplicazioni attraverso diagrammi rettangolari (Maffia & Mariotti, 2016; Maffia, 2017) e in passato è stata loro presentata la tavola di Laisant. Si tratta una tavola pitagorica in cui la prima colonna è larga un quadretto, la seconda due, la terza tre e così via. Allo stesso modo l'altezza delle righe cresce di un quadretto a partire dalla prima fino alla decima. In questo modo ogni casella ha dimensioni che corrispondono ai fattori della moltiplicazione che rappresenta e contiene un numero di quadretti equivalente al risultato; per esempio la casella che corrisponde a 2×3 è un rettangolo con dimensioni di due e tre quadretti, quindi contiene sei quadretti.

Nonostante la partecipazione ad altra sperimentazione didattica in passato, l'insegnante coinvolta non conosce il quadro di riferimento che verrà utilizzato per l'analisi proposta in questo lavoro. Inoltre, l'insegnante è giovane e con pochi anni di esperienza alle spalle, ma con una solida preparazione pedagogica.

Prima della fase di lavoro vera e propria, l'insegnante racconta agli studenti alcuni cenni biografici su Tartaglia e, successivamente, spiega la provenienza del testo su cui gli studenti lavoreranno. Una copia del testo viene consegnata a ciascuno degli alunni. Viene chiesto di lavorare in piccoli gruppi alla seguente consegna:

1) Riscrivete in parole moderne la definizione ii e il testo del "Tradottore".
2) Inventate dei disegni che possano aiutare a capire quello che viene detto nel testo.
3) Inventate altri esempi di "numeri superficiali" e di "numeri primi".

La prima consegna è pensata per spingere gli studenti a un'attenta lettura del testo e un'analisi del significato delle parole in esso riportate. La seconda consegna richiede una trasformazione dei segni riportati nel testo (tutti di tipo verbale) in segni grafici. Lo scopo è quello di sollecitare l'uso dei diagrammi rettangolo come strumento interpretativo per il testo, ovvero realizzare la doppia evocazione tra artefatti (in questo caso la fonte storica e il diagramma rettangolare) messa in evidenza da Mariotti e Maracci (2012) e discussa nella sezione 2. L'ultimo punto della consegna vuole rendere esplicita l'interpretazione che gli studenti danno ai termini matematici che compaiono nel testo e che per loro sono completamente nuovi. Le tre parti della consegna e gli obiettivi sono stati discussi e concordati a priori tra l'autore e l'insegnante della classe.

Lo svolgimento della consegna in piccoli gruppi è seguito da una discussione collettiva in cui l'insegnante richiede agli studenti di riportare quanto emerso dalla prima fase di lavoro e, nel farlo, riporta alla lavagna una traduzione del testo di Tartaglia che tenga conto dei contributi di tutti i gruppi per poi corredarla con i disegni degli studenti e gli ulteriori esempi da loro proposti.

Sia durante la fase di lavoro in gruppi sia durante la discussione collettiva è presente in classe un osservatore (l'autore) che dirige una videocamera che può essere puntata sulla lavagna, sull'insegnante o sugli alunni che intervengono. Inoltre, gli elaborati scritti degli studenti sono stati raccolti come dati aggiuntivi.

5. Analisi dei dati

La discussione collettiva è stata interamente videoregistrata. Gli interventi sono stati tutti trascritti, successivamente il video è stato rivisto per valutare la correttezza della trascrizione e contemporaneamente integrare le parole con immagini della lavagna o dei gesti utilizzati dall'insegnante o dagli studenti. Gli interventi dell'insegnante sono stati poi classificati con i quattro schemi di Mariotti e Maracci (2010) presentati nella sezione 3. Per limiti di spazio, non si riporterà la codifica dell'intera discussione ma solo alcuni estratti ritenuti significativi per far comprendere al lettore la narrativa della discussione ad integrare quelli che esemplificano gli schemi d'azione messi in atto dalla docente.

Di seguito l'inizio della discussione. I nomi degli studenti sono stati sostituiti con nomi di fantasia; allo stesso nome corrisponde sempre lo stesso studente.

Maestra: Useremo le lavagne per fare una traduzione che più o meno metta dentro tutto quello che avete fatto e anche gli esempi. Va bene? Allora, Davide comincia con la prima frase.

Davide: Il numero che è contenuto da due lati è detto numero superficiale. […] il dodici è detto numero superficiale per essere contenuto da due lati uguali.

Maestra: "Uguali" dice Davide.

Daniele: I quali!

Nadia: Ah!

Maestra: I quali. Siete d'accordo? "I quali", cioè "che".

Davide: I quali sono tre e quattro o due e sei.

Maestra: Tutto ok fino a qui? Qualcuno ha qualcosa di importante da modificare?

Alessio: Tre per quattro dodici!

Maestra: Allora si può andare avanti? Passiamo la parola ad Andrea allora.

Andrea: E finalmente il quindici. Punto. I suoi lati furono tre e cinque.

Maestra: Stop un attimo Andrea. Qualcuno ha qualche commento? O qualche modifica? Alessandro?
Alessio: Finalmente?!
Maestra: Finalmente. Si poteva leggere così, però forse... Viola?
Viola: Similmente.
Maestra: Similmente [annuisce col capo]. Guarda un po' il testo Andrea, se ti può tornare. Cioè che vuol dire? Allo stesso…
In coro: Modo.

All'inizio della discussione l'insegnante specifica subito che lo scopo dell'attività collettiva è quello di "mettere dentro" tutto quello che è stato fatto. Viene quindi richiesto esplicitamente di ricostruire quanto fatto nel lavoro con l'artefatto per arrivare alla ricostruzione di un testo condiviso, ovvero alla condivisione di segni. Secondo la definizione data nella sezione 3 si tratto dello schema "back to the task", cioè il ritorno alla consegna. In questo specifico caso la consegna viene ripetuta in una forma diversa: la parafrasi prima svolta nei piccoli gruppi viene ora affrontata dalla classe intera, ma non allo scopo di risvolgere la consegna quanto piuttosto di mettere insieme il lavoro fatto dai singoli gruppi per arrivare a un testo condiviso da tutto il gruppo classe. Lo si può notare dalle continue richieste per proposte di modifiche, da domande come "siete d'accordo?" che appaiono proprio finalizzate a ottenere un testo il più possibile condiviso. Inoltre, l'insegnante chiama gli alunni man mano che alzano la mano e lo fa selezionando studenti che appartenevano a gruppi diversi.

Questa prima frase di ritorno alla consegna prosegue finché sulla lavagna compare una traduzione di tutto il testo di Tartaglia:

Esempio: 12 è detto numero superficiale per essere contenuto da due lati, i quali sono 3 e 4 o 2 e 6 e similmente il 15. I suoi lati sono 3 e 5. Ma 13 né 17 né 19 né nessun altro numero primo si possono dire realmente numeri superficiali perché non sono contenuti da due lati ovvero da due numeri. Ma quelli ingannano perché, in verità, ogni numero primo è un numero superficiale, l'uno è l'unità e l'altro è lo stesso numero primo.

La maestra rilegge il testo e poi richiede agli studenti di commentarlo:

Maestra: Chi prova a spiegarlo? Ora si capisce meglio. Dice: ma quelli ingannano perché in verità anche [segue col dito sulla lavagna] ogni numero primo è un numero superficiale e poi c'è: l'uno è l'unità e l'altro è lo stesso numero primo. Cosa sono questi "uno" e questo "altro"?
Marco: Il quindici e il dodici?
Maestra: In un numero primo, dice, una cosa è l'unità e l'altra cosa è lo stesso numero primo…
Matteo: Maestra, non capisco.

Il lavoro con l'artefatto ha portato alla produzione di un testo condiviso che però non è ancora stato messo in relazione con le conoscenze matematiche che potenzialmente il testo potrebbe evocare. L'insegnante richiede agli studenti di "spiegarlo". Possiamo interpretare questa nuova consegna come una richiesta di spostarsi dai segni artefatto che compaiono alla lavagna ("uno" e "l'altro") verso segni più vicini a quelli matematici, ovvero la richiesta di produrre segni che possano fungere da pivot. Ci troviamo nella situazione in cui la discussione ha già portato all'emergere di segni condivisi stabili che condensano gli aspetti chiave dell'esperienza comune con l'artefatto. La maestra ha ora la necessità di generalizzare e de-contestualizzare i significati emersi e richiede esplicitamente di fare sintesi supportando la formazione di un ambiente semiotico in cui segni matematici possono essere prodotti e messi in relazione con segni artefatto. Si tratta evidentemente dello schema "ask for a synthesis". Tuttavia, la richiesta non ottiene l'esito sperato e quindi l'insegnante ritorna ai segni artefatto:

Maestra: Ok. Rileggo, ma attenzione. [Inizia a leggere scorrendo col dito sotto le frasi scritte alla lavagna] Il numero contenuto da due lati è detto numero superficiale. Passiamo all'ultima frase: s'ingannano perché in verità [torna a indicare le scritte sulla lavagna] ogni numero primo è [enfasi su questa parola, alza la voce] un numero superficiale, l'uno è l'unità e l'altro è lo stesso numero primo. Cosa sono uno e l'altro? Sono i due?

Federico: I due lati.

Maestra: I due lati.

Matteo: Maestra! Quindi ogni numero primo è anche superficiale!

Maestra: Quindi anche un numero primo è sempre numero superficiale. Ci siamo ingannati dicendo di no, in realtà… Ci siamo fatti ingannare, in realtà anche quelli sono numeri superficiali perché hanno [disegna nell'aria le due dimensioni di un rettangolo] due lati. Di questi due lati, un lato è l'unità [indica la parola unità sulla lavagna] cioè [alza il dito indice verso l'alto] uno.

Matteo: Maestra tutti i numeri sono superficiali.

Maestra: [annuendo] Quindi tutti i numeri sono superficiali.

Federico: Che figata!

Al termine della rilettura dei segni artefatto è un alunno (Matteo) a fornire una sintesi. L'insegnante fa eco alle parole dell'alunno ripetendole, ovvero dirige verbalmente l'attenzione degli studenti su un particolare aspetto dell'artefatto, circoscrive il significato di alcuni segni isolando aspetti chiave dalla molteplicità degli altri possibili. Si tratta dello schema "focalization". Dopo aver ripetuto la frase di Matteo, l'insegnante fornisce delle ulteriori specifiche. Fornisce una formulazione "più matematica" introducendo la parola "lati" e un gesto che enfatizza questa parola richiamando il rettangolo (rappresentazione della moltiplicazione che è già condivisa dalla classe). Così come descritto nella definizione dello schema "provide a synthesis", fornisce una esplicita sintesi in cui sono introdotti dei nuovi segni matematici (i rettangoli) in continuità coi segni emersi nella discussione sul testo di Tartaglia.

Quest'ultimo schema ritorna successivamente al termine della discussione. Come previsto dalla consegna, l'insegnante chiede agli studenti di riferire quali sono state le figure disegnate durante l'attività nei gruppi; si ha nuovamente un "back to the task".

Quando diversi segni sono apparsi alla lavagna (Figura 3), l'insegnante decide di decontestualizzare, probabilmente al fine di istituzionalizzare un significato per i "numeri primi". Nel farlo richiede una sintesi a uno studente:

Maestra: Tra questi, Daniele, me lo sai dire quali sono i numeri primi? Anzi, prima dimmi quali sono i numeri superficiali.

In coro: Tutti!

Daniele: Tutti.

Maestra: I numeri superficiali sono tutti.

Daniele: Poi tredici e diciassette sono i numeri primi.

Maestra: E come si fa a vedere?

Daniele: Perché hanno soltanto… non si possono formare con un numero che è più grande di uno.

Maestra: Cioè dici che un lato non può essere… un lato non può essere più grande di uno. Quindi un lato è per forza uno.

Daniele: Sì, però l'altro lato deve essere quanto è l'area.

Maestra: [indicando le parole finali della parafrasi del testo che appare sulla lavagna e le sottolinea] Lo stesso numero.

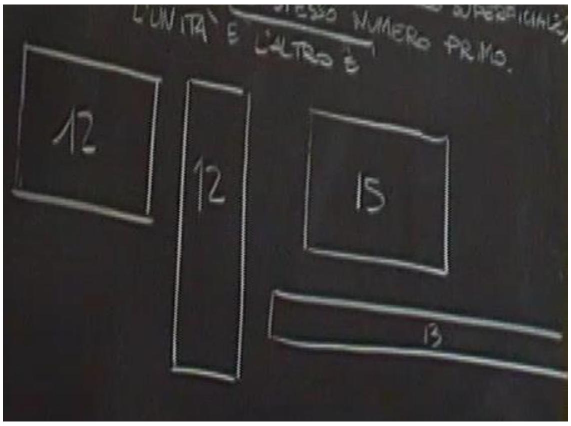


Figura 3 – La lavagna con riportati i disegni che gli studenti hanno suggerito

Le domande della maestra "quali sono i numeri primi?" e "come si fa a vedere?" sono richieste di sintesi allo studente a cui seguono poi due diverse azioni dell'insegnante. Dopo che lo studente ha affermato che un lato non è maggiore di uno, la maestra specifica che il lato è "per forza uno"; di fatto prima ripete l'affermazione dello studente focalizzando l'attenzione degli altri compagni su quanto detto da Daniele, ma poi lo rielabora per spostarsi verso segni più vicini a quelli matematici che sono obiettivo della discussione. Notare che "un lato è per forza uno" è un primo passo verso il fatto che tra i due divisori di un numero primo si ha il numero uno. La maestra, notando la potenzialità della frase dello studente, focalizza su essa e modifica il segno, probabilmente con l'obiettivo di usarlo come pivot.

L'ultimo intervento può invece essere interpretato in modo diverso: l'insegnante utilizza il gesto per indicare la frase scritta sulla lavagna dopo che lo studente ha terminato la sua sintesi. In questo modo si sta creando un collegamento fattuale tra i segni artefatto presenti sulla lavagna e i segni matematici che stanno emergendo nella discussione. Vengono esplicitate le connessioni tra i segni emersi precedentemente e quelli su cui si sta lavorando al momento, ovvero vengono generate connessioni nella catena semiotica. Mediante un'orchestrazione della discussione matematica realizzata attraverso un avanti e indietro fra il contesto dell'artefatto e quello matematico viene promosso un intreccio tra i significati personali degli studenti legati all'attività con l'artefatto e quelli matematici obiettivo dell'intervento didattico. I nuovi segni matematici sono presentati in continuità coi segni emersi nelle precedenti fasi della discussione; questo è proprio l’obiettivo dello schema “provide a synthesis”.

6. Conclusioni

Si è analizzato il ruolo del docente nella costruzione di una catena semiotica che parte dalla condivisione nella discussione collettiva delle produzioni di singoli gruppi e giunge fino a momenti di istituzionalizzazione dei saperi emergenti dalla discussione e che vengono condivisi da tutti.

Le azioni dell’insegnante risultano particolarmente significative: la focalizzazione dell’insegnante sulle parole degli alunni permette l’avanzamento della discussione in cui si alternano momenti di ritorno alla consegna e sintesi date dagli allievi. A partire da quest’ultime, l’insegnante fornisce sintesi che si avvicinano sempre più alla definizione matematica obiettivo dell’intervento didattico, in altre parole viene espletato il potenziale semiotico del testo storico utilizzato mettendolo anche in relazione con le conoscenze pregresse degli studenti (i diagrammi rettangolo).

Mariotti e Maracci (2010; 2012) hanno messo in luce alcuni schemi di comportamento dell’insegnante nel gestire una discussione matematica di concettualizzazione, anche nel caso in cui una fonte storica funga da artefatto su cui è incentrata la produzione di testi da parte degli allievi. Il loro esempio sul testo di Eulero (*ibidem*) mostra che la conduzione di una discussione matematica nella scuola secondaria di secondo grado può portare alla creazione di una fitta rete di significati in cui diversi artefatti entrano in relazione gli uni con gli altri.

In questo lavoro abbiamo mostrato che anche a livello di scuola primaria l’insegnante può utilizzare una fonte storica primaria e metterla in relazione con i contenuti matematici nonché con altri artefatti. In particolare, nello studio di caso analizzato si è potuta evidenziare la creazione di connessioni tra il testo di Tartaglia e i diagrammi rettangolari utilizzati in precedenza dalla classe. Ci siamo chiesti se l’insegnante mostrasse comportamenti classificabili con tutti gli schemi proposti da Mariotti e Maracci (2010); negli estratti di discussione riportati è possibile evidenziare comportamenti relativi a tutti gli schemi; comportamenti che si riscontrano anche in altre parti di discussione che qui non è stato possibile riportare per limiti di spazio.

Si può inoltre mettere in evidenza che tali comportamenti non si presentano sempre in modo sequenziale: la discussione su ciascuna delle parti della consegna parte da un “back to the task” a cui segue una fase di focalizzazione e quindi richieste di sintesi da parte della docente. Tuttavia, quando alcuni studenti incontrano difficoltà, oppure quando l’intervento dell’insegnante non fornisce l’esito atteso, la maestra ritorna nuovamente alla consegna ripetendo il ciclo finché emergono segni che hanno il potenziale di fungere da pivot. In questi casi la docente fornisce una sintesi per poi passare alla discussione di una parte successiva della consegna, ovvero un altro “back to the task”. Si tratta quindi di un continuo andirivieni tra consegna, focalizzazioni e sintesi che istituzionalizzano i saperi.

Il ricorso ad un solo studio di caso ci permette di mettere in evidenza nel dettaglio comportamenti fruttuosi dell'insegnante nell'espletare il potenziale semiotico del testo. Chiaramente, il fatto che tali comportamenti siano risultati positivi in questo particolare contesto non ci consente di generalizzare induttivamente che lo siano in generale. Tuttavia, l'allineamento dei risultati qui riportati con quelli di altri studi di caso presentati in letteratura (si veda la sezione 2) porta a pensare che alcune delle conclusioni qui riportate potrebbero essere generalizzate con opportune ricerche.

Infine, si può notare che alcune delle azioni dell'insegnante messe in evidenza hanno un carattere estemporaneo. Un esempio palese è dato dai gesti deittici (l'indicare) rivolti verso la lavagna che però sono così fondamentali nel mettere in connessione le parole degli studenti con i segni scritti. Se ne potrebbe dedurre una difficoltà nel formare gli insegnanti alla progettazione di questo tipo di discussione collettiva. Tuttavia, l'analisi di dialoghi come quelli riportati in questo articolo, così come la visione di video appositamente preparati (Ferretti & Maffia, 2017) potrebbero costituire validi strumenti per l'educazione degli attuali e dei futuri docenti.

6. Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. In F. Furinghetti, *Proceedings of the 15th International PME Conference, vol. 1* (p. 1-16). Assisi: IGPME.

Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational studies in mathematics, 31(1-2)*, 11-41.

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 18(3)*, 221-256.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32*, 269-294.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.* Modena: Centro documentazione educativa.

D'Amore, B., & Bagni, T. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socioculturale. *La matematica e la sua didattica 1*, 73-89.

Demattè, A., & Furinghetti, F. (2011). History, figures, and narratives in mathematics teaching. In V. Katz, & C. Tzanakis, *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education. MAA series* (p. 103-112). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ferretti, F., & Maffia, A. (2017). Peer evaluation: apprendimento e valutazione formativa in matematica. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, A. Veste , & F. Ricci, *Quaderni GRIMeD, vol. 3* (p. 39-47). Torino: Il Capitello.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. E. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (p. 630-659). London: Routlegde.

Maffia, A. (2017). *Insegnamento e apprendimento di fatti moltiplicativi: un approccio relazionale mediante la tavola di Laisant.* Tesi di dottorato reperibile su https://morethesis.unimore.it.

Maffia, A., & Mariotti, M. A. (2016). Semiotic mediation: from multiplication properties to arithmetical expressions. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete, 16(1)*, 4-19.

Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique: une ressource pour le professeur. In L. Trouche, & G. Gueudet, *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (p. 91-107). Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2012). Resources for the teacher from a semiotic mediation perspective. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, *From text to 'lived resources': curriculum material and* (p. 59-75). New York, NY: Springer.

Pirie, S. E., & Schwarzenberger, R. L. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in mathematics, 19(4)*, 459-470.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching os Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17(1)*, 26-33.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 51(1)*, 37-70.

Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico.* Trento: Erickson.

UMI. (2001). *Matematica 2001: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica.* www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotskij, L. S. (1992). *Pensiero e linguaggio.* Bari: Laterza.

Vygotskij, L. S. (2010). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori.* Firenze: Giunti (originale pubblicato nel 1974).

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the Mind: Sociocultural Approach to Mediated Action.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Received October 29, 2017
Revision received November 16, 2017/December 4, 2017
Accepted December 30, 2017

"Annali online della Didattica e della Formazione Docente"
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 190-208 – ISSN 2038-1034

Una visione formativa della Chimica per la scuola primaria

Antonio Martino
Gaia Clara Mercedes Naponiello

Abstract – *Implementation of scientific subjects (mathematics, physics, chemistry, and natural science) for a primary science education degree programme has represented a cultural challenge to the Italian scientific community in the last years. In the international context, there are still few articles in the literature available concerning teachers working at this primary level, in spite of the fact that children's first encounter with science could play a decisive role in creating a vocation for science in at an early age. This work proposes to consider humanistic education as both a scientific and literary formation: according to this interpretation, introducing children to symbolic thought in school education stimulates involvement on the part of the pupils and leads them through a completion process that includes several perspectives on the world (expressive, linguistic, geometric and quantitative). The authors describe herein the application of this approach to chemistry teaching through significant examples showing integration of institutional content with historical and epistemological aspects; the results obtained during the years 2014-17 are discussed from a qualitative point of view at the Primary Education Department at Roma Tre University.*

Riassunto – *Il rafforzamento della componente scientifica (matematica, fisica, chimica, scienze naturali) nel corso di laurea in scienze della formazione ha posto negli ultimi anni una sfida culturale alla comunità scientifica in Italia, ovvero la progettazione e l'implementazione di corsi di matematica e scienze e dei relativi aspetti didattici, rivolti a formare i futuri insegnanti della scuola primaria e della scuola dell'infanzia. La letteratura disponibile in ambito internazionale è scarsa per quanto riguarda gli insegnanti che lavorano in questo livello primario, eppure il primo incontro dei bambini con il mondo delle scienze potrebbe avere un ruolo determinante nell'emergere delle vocazioni scientifiche giovanili. Questo lavoro propone un approccio che vede la formazione umanistica declinarsi nel duplice aspetto sia letterario che scientifico: in quest'ottica, l'iniziazione al pensiero simbolico dei bambini attraverso la scolarizzazione, coinvolge gli allievi e li accompagna in un processo di maturazione che integra i diversi sguardi sul mondo (espressivo, linguistico, geometrico e quantitativo). Si descrive l'applicazione di un tale approccio al caso della chimica, attraverso alcuni esempi significativi di integrazione dei contenuti istituzionali con aspetti storici ed epistemologici; si discutono da un punto di vista qualitativo i risultati ottenuti nell'introduzione di questi elementi nel corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università Roma Tre negli anni 2014-17.*

Keywords – primary education, science, chemistry, didactics, history

Parole chiave – formazione primaria, scienze, chimica, didattica, storia

Antonio Martino, docente a contratto di *Chimica e didattica della chimica* del Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università degli Studi Roma Tre, è Dottore di ricerca in *Scienze dei materiali* e docente di Scienze delle scuole secondarie di primo e secondo grado a Roma. Si occupa di didattica della chimica, con particolare riguardo per la formazione degli insegnanti delle scuole primarie, e ha pubblicato diversi articoli in riviste internazionali sulla veicolazione specifica di farmaci e sullo studio computazionale di molecole di interesse biologico.

Gaia Clara Mercedes Naponiello, docente a contratto di *Chimica e didattica della chimica* del Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università degli Studi Roma Tre, è Dottore di ricerca in *Scienze chimiche* e insegnante di Matematica e Scienze nella scuola secondaria di primo grado. Si occupa di storia e didattica della chimica e ha pubblicato in riviste internazionali lavori sui materiali fotosensibili per la conversione di energia solare in energia elettrica, svolgendo anche collaborazioni in ambito internazionale.

1. Introduzione

L'insegnamento delle scienze naturali e la ricerca sperimentale sono considerate attualmente, a livello internazionale, fondamentali per la formazione dell'individuo, anche per acquisire una maggiore consapevolezza delle proprie abilità e per la costruzione delle capacità di interpretazione e di argomentazione.

Sempre di più si prende in considerazione introdurre le scienze fin dalla scuola primaria. La materia, l'universo, il movimento, i fenomeni atmosferici o riguardanti il pianeta Terra, sono questioni cui i bambini si accostano in modo ingenuo fin dai primi giochi ed esperienze; se il loro insegnamento fosse posticipato alla scuola secondaria, gli alunni vedrebbero la riflessione scientifica, con la sua carica di astrazione, inevitabilmente e maggiormente come un intruso.

In Italia, le indicazioni nazionali per il curricolo per la scuola del primo ciclo oggi in vigore attribuiscono uno spazio consistente non solo alla matematica, ma anche alle scienze della natura: l'intento è quello di "promuovere l'osservazione dei fatti e lo spirito di ricerca attraverso il coinvolgimento diretto degli alunni, con l'obiettivo di valorizzare il pensiero spontaneo senza fare ricorso a dogmatismi (Indicazioni nazionali della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione). Insieme a questa impostazione generale, negli obiettivi di apprendimento delle indicazioni sono elencati alcuni contenuti scientifici relativi ai saperi disciplinari; per quanto riguarda la chimica, si fa riferimento ad esempio alla "classificazione analitica degli oggetti in base alle loro proprietà". Appare opportuno che l'iniziazione dei bambini alla scienza includa effettivamente, come per la matematica, alcuni elementi di base (concetti scientifici quali la materia nella visione del continuo e del discreto, le trasformazioni fisiche e chimiche, le proprietà fisiche e chimiche dei diversi stati di aggregazione etc.) insieme a un primo accostamento al metodo scientifico incentrato sull'osservazione, in natura (il parco, ambienti naturali in gita, documentari audiovisivi) oppure nell'ambito di semplici esperienze di laboratorio (in ambienti ad hoc oppure trasformando temporaneamente l'aula in laboratorio).

Negli ultimi anni, a livello internazionale, il problema della mancanza di vocazioni in ambito STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) sta spingendo a una maggiore attenzione all'incoraggiamento precoce in queste direzioni: si tratta di un obiettivo parallelo a quello dell'alfabetizzazione scientifica di base. In Italia dai dati dell'ultima indagine OCSE (OCSE, 2107) c'è ancora una forte carenza di laureati STEM rispetto alle lauree in discipline umanistiche, nonostante ci siano buone opportunità lavorative in tali settori.

A questo clima culturale corrisponde l'accresciuto ruolo della matematica e delle scienze naturali e delle loro didattiche disciplinari nell'ordinamento oggi in vigore in Italia del corso di laurea in scienze della formazione primaria volto alla formazione iniziale degli insegnanti della scuola dell'infanzia e della scuola primaria. Come avvicinare i futuri insegnanti alle scienze naturali e al loro insegnamento e apprendimento, nel contesto italiano? In questo lavoro si discutono le scelte pedagogiche e didattiche compiute nella progettazione del corso di "Chimica e didattica della chimica" del corso di laurea in Scienze della Formazione primaria dell'Università degli studi Roma Tre, la composizione dei contenuti e le questioni formative che esso pone. Si tratta di un corso di 4 crediti, che è stato impartito per due anni nel quarto anno di corso; dall'anno accademico 2016-17, esso è collocato nel primo anno: questa modifica è derivata da una scelta di bilanciamento dell'impegno degli studenti e proprio dall'equilibrio fra i corsi di scienze naturali, i corsi di ambito storico-espressivo-letterario e i corsi psico-pedagogici. Di conseguenza, da una parte, il piano di studi ha posto al primo anno un compito condiviso di introduzione delle matricole all'ambito scientifico su due corsi, Istituzioni di Matematica e Chimica e didattica della chimica; dall'altra, nell'ultimo anno si è avuto l'opportunità di mettere a confronto la reazione degli studenti e l'andamento delle lezioni nel primo e nel quarto anno.

Fin dal primo anno di attivazione di questo corso è stato dedicato ampio spazio alla comunicazione elementare dei concetti della chimica a scuola e ai piccoli esperimenti che possono essere realizzati anche in aula. Tuttavia è stata evidente la necessità di ripensare il modo stesso di proporre i fondamenti di chimica in un corso per futuri insegnanti della scuola primaria e dell'infanzia.

2. Una chimica umanistica: il ruolo della storia della scienza

Affrontare la programmazione di un corso di chimica e didattica della chimica ha posto in primo luogo l'esigenza di rispondere ad una domanda degli studenti sempre frequente all'inizio del loro percorso: *Perché la chimica è formativa per la formazione primaria?* Infatti ogni anno, all'inizio del corso, agli studenti si chiede di rispondere a una domanda aperta, relativa a quanto ognuno di essi consideri l'insegnamento di chimica e didattica della chimica attinente al corso di laurea. Tra le risposte più frequenti vi sono le seguenti: "Sicuramente miglioreremo la nostra preparazione scientifica, ma sicuramente non insegneremo mai chimica ai bambini", oppure "Poveri bambini! Come possono capire teorie e modelli così complicati se nemmeno noi, che li abbiamo già studiati nella scuola superiore, li abbiamo mai veramente compresi?", e ancora "Ma perché ai bambini dovrebbe interessare la chimica?". Emerge quindi come l'utilità delle conoscenze scientifiche ed il loro valore formativo, appaiano poco chiari in riferimento ai bambini, quanto meno se si confrontano con il far di conto o con la lettura e la scrittura; di conseguenza, non si avverte il ruolo del corso nella propria formazione come insegnanti.

L'utilità delle nozioni di chimica è forse più difficile da comprendere. Ora, non vi è dubbio per chiunque abbia familiarità con i bambini che essi mostrano una grande curiosità per le sostanze e un grande spirito di iniziativa nella loro esplorazione (acqua, terra, zucchero, sapone, e così via), e al punto da essere questa esplorazione un fattore di rischio. Ciò suggerisce che un corso di Chimica e didattica della chimica per futuri insegnanti delle scuole dell'infanzia e primaria deve considerare gli aspetti formativi delle scienze naturali: l'insegnamento della chimica va incontro alla grande sfida di sviluppare la curiosità degli alunni verso la realtà che li circonda, offrendone chiavi interpretative diverse da quelle più comunemente accessibili. L'alfabetizzazione scientifica fornisce strumenti essenziali all'indagine e alla comprensione di alcuni aspetti della realtà.

Affinché gli studenti possano trasformare questa finalità molto generale in attività e vita di classe nel loro lavoro professionale a scuola, la sfida che pone insegnare la chimica ai futuri insegnanti è, prima di tutto, quella di superare una visione cumulativa del sapere e di rinunciare a quegli aspetti dogmatici che ricorrono spesso nell'approccio abituale allo studio delle materie scientifiche (in particolare nel loro proprio percorso scolastico nelle scuole secondarie di primo e secondo grado) e che si manifesta anche negli approcci divulgativi (libri, documentari, mostre).

Gli studenti appaiono soprattutto preoccupati di trovare accorgimenti didattici che siano in grado di interessare, coinvolgere, avvicinare concetti complessi, ad esempio il gioco, le illustrazioni, le visite, la terminologia, gli esempi. Si tratta di una preoccupazione prettamente tecnico-professionale, che lascia da parte la questione culturale: lo scopo primario di insegnare tali concetti è quello di formare e di aprire prospettive sul mondo, chiavi di lettura della realtà cruciali nella nostra contemporaneità.

Si mescola così la visione che i futuri insegnanti hanno della scienza, con la visione che essi hanno di ciò che è in gioco nella didattica della scienza con i bambini. In risposta a questa questione aperta abbiamo cercato risposte in una visione umanistica, che non trascuri l'aspetto umano delle discipline scientifiche, le quali, proprio perché private di questo fattore, risultano per gli studenti di qualunque ordine e grado scolastico noiose e di difficile comprensione, oltre l'intrinseca complessità e astrazione dei suoi concetti. La scienza appare in definitiva distante dalla realtà dei discenti: si tratta di un problema condiviso dalla matematica, meno presente nelle discipline letterarie o espressive[1].

La scienza come regno puro della precisione e del rigore metodico nasconde la sua umanità fatta di approssimazione, intuizione, logica, tentativi coronati o meno dal successo, nello sviluppo progressivo dei suoi concetti. In accordo con tale visione, è quindi naturale tenere in considerazione il grande contributo dell'epistemologia novecentesca di cui è possibile giovarsi nella progettazione del corso in questione. Prima di Thomas Kuhn e di altri noti autori della seconda metà del secolo, la ricerca storica ed epistemologica della studiosa francese Hélène Metzger (1889-1944) si è concentrata proprio sul campo della chimica. Metzger mette in evidenza il problema derivante dal proporre la scienza come tecnica piuttosto che come strumento per indagare anche umanamente la realtà circostante, soprattutto in un contesto storico in cui si dava una rilevanza importante alla "scienza positiva" e alla razionalità scientifica. Inoltre,

[1] Un'analisi di questa rottura con la "prossimità della vita" è presente nel saggio *Children's minds* (1978) di Margaret Donaldson, la quale ha coniato l'espressione molto pregnante di sapere svincolato (disembedded); per la matematica nella scuola primaria si veda Millán Gasca 2016.

l'epistemologa pone l'accento sulla questione della divulgazione scientifica di massa che rischia di proporre in maniera banale concetti scientifici fondamentali: "La ragione non ha niente più a che fare con i problemi concernenti il nostro destino, e l'intelligenza, facoltà ormai tutta pratica, perdette la sua sublime dignità per diventare uno strumento creatore di industrie tutte messe al servizio della nostra volontà di potenza. Da una parte gli stessi scienziati stupiti facevano fare alla teoria e alla pratica dei progressi straordinari, ma non erano più in grado di dominare la loro scienza; e dall'altra il pubblico che aveva considerato con stupore, scetticismo, ammirazione gli ultimi ritrovati della scienza che una volgarizzazione sconcertante e sconcertata faceva penetrare poco a poco nel senso comune" (Metzger, 1987, p. 272).

Negli ultimi vent'anni si sono avuti diversi contributi rivolti al riconoscimento dell'importanza della storia e dell'epistemologia nella didattica della chimica in generale: si pensi agli studi di Eric Scerri (2016), docente all'Università di California a Los Angeles, e al ruolo della rivista "Foundations of Chemistry" da lui fondata e diretta. In Italia vi sono stati negli ultimi anni molti sforzi volti a rendere rilevanti gli aspetti storici nella didattica della chimica e delle scienze in generale, con particolare riguardo per la scuola secondaria di secondo grado e più raramente anche per la scuola primaria[2].

A questo riguardo, in un lavoro sulla chimica nella scuola primaria da un punto di vista interdisciplinare, Carlo Fiorentini (2007) ha sottolineato il ruolo della storia della chimica: " L'obiettivo è utilizzare la storia della chimica per fare comprendere i concetti basilari, che possono essere compresi se li facciamo rivivere, se vengono presentati come la risposta a problemi sperimentali o teorici".

Sempre per quanto riguarda la scuola primaria, è stato studiato l'impatto sulla qualità dell'insegnamento e sulla fiducia nel proprio operato delle idee sulla scienza stessa, come forma di conoscenza e fenomeno storico umano, che hanno gli insegnanti (Harlen, 1997). L'epistemologia offre la possibilità di far riflettere in maniera critica sulle questioni più intime legate ai principi fondamentali della chimica (il concetto di materia, l'idea di sensazione, di trasformazione etc.), riscoprendoli spesso nelle questioni esistenziali legate allo sviluppo del pensiero umano.

Per la scelta dei contenuti e per la costruzione della programmazione didattica rivolta agli studenti di scienze della formazione primaria, sono stati tenuti in considerazione gli obiettivi e le sfide sopraelencate.

Esse, come si è visto, si collocano a cavallo fra il ruolo dell'avvicinamento alla chimica dei bambini nella scuola primaria da una parte e la visione della scienza (e il proprio retroterra di formazione scientifica nelle scuole secondarie) dei futuri insegnanti dall'altra. Il lavoro complessivo è proiettato verso il futuro professionale: ciò che è in gioco è la capacità degli insegnanti di trasmettere efficacemente e correttamente le conoscenze scientifiche acquisite nel corso della loro formazione, promuovendo l'interesse dei loro alunni verso le scienze in generale e la chimica in particolare.

[2] Sulla scuola primaria si veda Borsese *et al.*, 2012 e Carpignano *et al.*, 2013.

Due sono le vie principali che sono state seguite. La prima riguarda l'introduzione di una visione culturale e umanistica dei concetti di base della chimica, anche grazie alla riflessione epistemologica e storica. La seconda riguarda l'approfondimento scientifico dei contenuti disciplinari.

3. Cosa è elementare e cosa è formativo? L'esempio dei concetti chimici di materia e di trasformazione della materia

Per il raggiungimento delle finalità auspicate è stata quindi necessaria un'accurata selezione dei contenuti proposti, dettata anche dal limitato numero di crediti. Per quanto riguarda le conoscenze basilari di chimica, si è intervenuti con un processo di "elementazione", ossia mediante una scomposizione analitica di un concetto elementare, al fine di offrire una differente chiave di lettura della realtà che non risulti distante dallo studente (Fiorentini, 2000). Di seguito vengono presentati due esempi riguardanti i concetti "primordiali" di *materia* e di *trasformazione*, dove con la parola "primordiale" si intende indicare idee scientifiche considerate

– fondamentali per lo studio e la comprensione della disciplina stessa

– di antica origine, in quanto esse hanno le loro radici nelle pratiche alchemiche e del periodo precedente la nascita della chimica moderna nel Settecento

– di difficile o meglio, impossibile, definizione, in quanto radicate nella esperienza umana del mondo fisico (in modo parallelo ai concetti primitivi della matematica, quale numero naturale, unità, punto o retta).

Si osservi che questi concetti primordiali sono spesso collegati a modo di rete concettuale all'interno delle teorie scientifiche, come nel caso della materia e della trasformazione (appunto della materia).

Un'ispirazione importante in questa ricerca è stata costituita dallo studio di un'opera pionieristica rivolta ai più giovani, scritta dallo studioso francese Georges Darzens (1867-1954), noto per la reazione di epossidazione di Darzens (1904), intitolata *Iniziazione chimica* (1912), scritta su richiesta del matematico francese Charles Laisant all'interno della collana da lui diretta delle «Iniziazioni scientifiche» scritte dagli "amici dell'infanzia"[3].

Per quanto riguarda la *materia*, l'argomento è stato indagato nel tentativo di rispondere ad una domanda esistenziale prima che disciplinare, ossia da cosa è costituito il mondo che ci circonda dal punto di vista macroscopico e microscopico, in sostanza cosa rappresenta il concetto di materia. Quello che possiamo trovare nella maggior parte dei libri di testo scientifici di qualsiasi ordine e grado, paradossalmente, è una risposta attraverso una definizione, ossia:

"La materia è tutto ciò che ci circonda", "La materia è tutto ciò che ha una massa e occupa uno spazio"[4].

[3] Su quest'opera abbiamo un lavoro in preparazione.

[4] Si veda, ad esempio, fra i testi in commercio in Italia per le scuole secondarie, Crippa M., Fiorani M., Nepgen D., Rusconi M., Bargellini A., Mantelli M. (2016), *Scienze Naturali*, Milano: Mondadori Scuola, oppure Leopardi L., Bolognani F., Bolognani F., Cateni C., Temporelli M. (2016), *Scienze Focus*. Torino: Garzanti Scuo-

Sovente il testo inizia da questa frase per elencare attraverso una serie infinita di esempi, i numerosi oggetti che abbiamo intorno, più o meno noti[5]. A questa prima definizione corredata da esempi segue subito una spiegazione più o meno dettagliata, a seconda del livello scolastico, della struttura atomica e il suo collegamento con la tavola degli elementi.

Quando si trovano ad affrontare questo argomento, gli insegnanti di scuola primaria tendono non di rado a proporlo proprio come è stato loro insegnato, attraverso una definizione seguita da qualche esempio, per poi introdurre quasi immediatamente gli stati di aggregazione della materia, procedura che del resto riprendono dagli stessi sussidiari. Non è raro poi che il sussidiario presenti gli stati di aggregazione mediante un esempio unico di sostanza, ad esempio l'acqua per definire le caratteristiche dei vari stati, soffermandosi in particolare su quelle del liquido, oppure l'aria per definire quelle dei gas, costruendo così più o meno consapevolmente gli argini del sapere attraverso schemi e definizioni.

Questo approccio didattico si spiega, anche quando adottato da autori di testi e da insegnanti che hanno una formazione chimica, per via di una visione di *ciò che è elementare*. Rendere semplice equivarrebbe a fornirne una *definizione*, forse sulla scia della geometria euclidea; la chiarezza si confonde così con il dogmatismo, perché problematizzare un concetto appare qualcosa riservato agli studi specialistici superiori. Si osservi che nella prima definizione sopra citata la materia si identifica con il mondo fisico *tout court*, mentre la seconda è una definizione di stampo geometrico; entrambe fanno leva sull'intuizione e sull'osservazione diretta degli allievi, anche se si tratta di un concetto astratto come quello di punto o di solido in geometria. Vi è così un altro aspetto della visione di ciò che è elementare che spinge gli insegnanti a servirsi di questa strategia ed è il fatto che questa tipologia di presentazione si appoggia su qualcosa di concreto, di direttamente osservabile, ossia la materia rappresentata nei diversi stati di aggregazione. Non si dà spazio a una riflessione sull'argomento, sul fatto che si tratta di un concetto che ha le sue radici in esperienze umane primordiali e che si è evoluto storicamente: ciò potrebbe essere fatto con parole semplici, sotto forma di racconto.

A questo punto si tratta solo di proporre una classificazione dell'illimitato che ci circonda – anche qui è evidente l'analogia con la geometria euclidea, come la classificazione dei triangoli o dei quadrilateri –, come se potesse essere evidente anche per un bambino di 5 anni che la materia è fata esclusivamente da solidi liquidi e gas (Aquilini, 2000)[6]. In questo modo non si ottiene la chiarezza, ma un senso di estraniamento dei bambini, poiché la scienza non mostra la coerenza interna, la potenza di concetti che inglobano molte tensioni epistemologiche, e si cerca di imporre loro qualcosa che non ha riscontro nella loro familiarità con la materia nelle sue varie forme (i giocatoli, la sabbia nella spiaggia, l'acqua e la schiuma nella vasca da bagno, le miscele in cucina e così via). Si osservi che la presentazione elementare dei concetti di chimica basata sullo schema definizione-esempi-classificazione, in mancanza di elementi

la.

[5] Si vedano ad esempio due libri di primaria: Lancetti M. C., Negri N., Pagano R., Valerio M. (2015), *Mio, Viaggio alla scoperta dei saperi*. Milano: Gaia Edizioni e Gaboli M., Tenconi G. (2016), *Sulle ali di Pepe*. Milano: Fabbri Editori/Erickson.

[6] Si veda Aquilini E. (2000).

storici (sotto forma di racconto nel caso dei bambini) e di problematizzazione (in termini di rapporto riflessivo con la propria esperienza immediata nel caso dei bambini, senza voler piegare la realtà allo schema presentato) è essenzialmente statico, privo di attenzione alla conoscenza come tensione verso la verità che è in fondo ciò che fa amare la scienza: una scienza-avventura che non fa paura.

In effetti, l'introduzione al concetto di materia va molto oltre l'oggettività delle percezioni, e finisce inevitabilmente nella sfera dell'astratto (Scerri, 2012). Ad esempio, se tentiamo di scomporre un oggetto in parti via via più piccole (ad esempio un foglio, un filo etc.) ci si rende presto conto che, per quanto noi possiamo arrivare a scomporre l'oggetto, alla fine arriveremo ad un frammento piccolissimo che, anche se non siamo fisicamente in grado di ridurre ulteriormente, sappiamo di poter ridurre concettualmente. Questo ragionamento ci dice molto di più della semplice affermazione che la materia è tutto ciò che ci circonda e che è costituita da atomi, ci spinge infatti a ragionare sul concetto di finito e infinito, ossia ci spinge a ragionare anche *in termini filosofici* sulla natura della materia. L'opera di Metzger è stata a questo riguardo illuminante: essa afferma, e lo dimostra nei suoi lavori, che l'apprendimento delle scienze passa necessariamente attraverso una critica filosofica, la quale trova la migliore alleata nella storia delle scienze.

Nel tentativo di rispondere a questa necessità di indagine della realtà, nella formazione dei futuri insegnanti, è utile ricorrere alla storia della chimica poiché offre l'opportunità di trasmettere la consapevolezza che anche le scoperte scientifiche e i fondamenti della chimica sono il frutto del pensiero dell'uomo nella storia; la storia mette quindi in luce l'aspetto umanistico della chimica. Nel caso specifico in questione, la visione della materia come composta da elementi, sviluppatasi grazie ai primi filosofi greci da Anassimene ad Aristotele e Platone, ha dominato una lunga parte della storia dello sviluppo storico della filosofia naturale. L'atomismo, così come lo concepiamo noi oggi, ha avuto bisogno di un gran numero di esperimenti e scoperte prima di affermarsi agli albori del Seicento grazie alla diffusione dei trattati di Lucrezio e Democrito, nel periodo della Rivoluzione scientifica.

Pertanto, nel presentare un concetto elementare come quello di materia, appariva utile ricorrere, almeno parzialmente, a quello che è stato il percorso storico che ha condotto alla definizione odierna di materia come costituita da atomi, piuttosto che iniziare a trattare l'argomento partendo dall'atomo stesso. È la via scelta dal celebre chimico e letterato Isaac Asimov nella sua opera divulgativa sulla chimica (1965); era il modo seguito dai chimici degli inizi del XX secolo che ancora non avevano l'odierna consapevolezza sulla struttura atomica, oppure che consapevolmente sceglievano un percorso formativo differente per l'iniziazione elementare, come nel caso di Darzens. La scelta degli argomenti storici deve essere funzionale al concetto scientifico trattato, e quindi è opportuna un'accurata selezione delle informazioni.

Nel caso specifico della formazione dei futuri insegnanti di formazione primaria la nostra scelta è stata quella di discutere la materia partendo dalle concezioni primordiali dei Greci, ed in particolar modo dalla teoria degli elementi – acqua, aria, terra, fuoco – e dallo sviluppo che questa concezione ha avuto, in luogo della classica trattazione dei vari modelli atomici. La scelta è stata dettata sia dal fatto che la discussione specialistica della teoria atomica è complessa (non si può neppure pretendere che uno studente di formazione primaria comprenda veramente il modello atomico di Rutherford senza conoscere cosa sia una particella alfa!), sia anche e soprattutto per evitare quella banalizzazione e semplificazione forzata che sfocia inevitabilmente in un apprendimento dogmatico del sapere. La teoria atomica è sì un fondamento teorico della chimica moderna, ma è anche il punto di arrivo di un percorso laborioso ed ha una natura molto astratta; intendere così i fondamenti di chimica in un corso per futuri insegnanti della scuola primaria, rischia di avere lo stesso effetto di rigetto e paralizzante dell'iniziativa didattica con i bambini che ha un corso di fondamenti di matematica che si inizia e si sofferma a lungo sulla teoria degli insiemi o la logica (Israel, Millán Gasca, 2012).

Si prenda ora in considerazione un altro concetto chimico elementare, ovvero il concetto di *trasformazione*, proposto in effetti comunemente soltanto dal punto di vista della moderna concezione di reazione chimica. Ancora una volta, si osserva che un approccio classico all'introduzione di questo tema è basato sulla presentazione delle varie tipologie di reazioni mediante classificazione di ogni tipo e genere: reazioni reversibili e irreversibili; reazioni di sintesi, di decomposizione, di scambio etc.; o ancora, reazioni di combustione, reazione acido base, di ossidoriduzione, etc.

Questa metodologia mette in luce chiaramente l'equivoco che la comprensione di un concetto passi attraverso l'acquisizione cumulativa e dogmatica di una serie di nomi e di schemi (classificazioni oppure opposizioni). Un'alternativa è proporre questo concetto primordiale attraverso un percorso storico selezionato che coinvolga l'emergere remoto della trasformazione della materia nell'età della pietra, la svolta nell'età dei metalli, la visione sulla trasformazione della materia degli alchimisti e infine il nuovo, rivoluzionario forse punto di vita dei padri della chimica moderna, fra cui Antoine-Laurent de Lavoisier (1743-1794). Un tale percorso offre ancora una volta la possibilità di capire come la trasformazione riguardi da vicino l'evoluzione del pensiero umano, in collegamento con l'attività tecnica e lo sforzo di comprensione dei fenomeni naturali; e anche nei suoi risvolti più ampi: si pensi alle concezioni esoteriche e ai "misteri" intorno alle proprietà della materia e alle trasformazioni di essa che hanno governato per secoli l'indagine sulle sostanze e i tentativi di applicazione più diversi; questo punto di vista è sopravvissuto sino ai primi del Settecento e fu poi via via scardinato definitivamente tra Sette e Ottocento grazie soprattutto agli studi accurati di Jan Baptist Van Helmont (1580-1644) e dello stesso Lavoisier. Il mistero dietro il concetto di trasformazione è presente ancora oggi, si potrebbe dire che rappresenta il volto umano delle reazioni chimiche, è per questo che la chimica anche oggi è spesso associata alla magia. Anche in questo caso, conoscere la storia della chimica che interessa l'affermazione di un concetto elementare aiuta lo studente a sentirlo più vicino, a comprenderlo e ad innescare quella curiosità che è essenziale per far abbandonare l'atteggiamento distaccato e per contribuire a farlo sentire in futuro più sicuro di sé come insegnante.

Da un punto di vista puramente qualitativo, l'introduzione di questi elementi storici, a partire dal secondo anno in cui l'insegnamento è stato attivato, limitatamente al corso che si teneva per gli studenti al primo anno, ha aiutato questi ultimi a stabilire un contatto sentito tra i concetti scientifici fondamentali e la realtà immediata, risvegliando in loro la curiosità e la spinta alla partecipazione in aula: le lezioni si sono svolte fin dall'inizio con la loro continua interattività con il docente, sicuramente in modo più evidente che nel corso senza elementi storici. Senza alcun intento di valutare quantitativamente il cambiamento proposto, ci si è limitati a riportare questo effetto anche in un diverso atteggiamento rispetto alla chimica e al suo insegnamento ai bambini (anche in semplici esempi nella scuola dell'infanzia) attraverso dei questionari proposti agli studenti alla fine dell'anno (Figura 3).

Gli interventi in aula mostravano la spinta a immedesimarsi con lo sguardo dei bambini, e quindi a immaginare possibili realizzazioni a scuola. Questo ha come conseguenza una formazione scientifica più solida e strutturata, come ha mostrato anche il rendimento degli studenti negli esami. Le simulazioni didattiche durante il corso e l'esperienza con il tirocinio a scuola nell'area di chimica e didattica della chimica induce a pensare che questa formazione più solida e questo mutato atteggiamento si rifletta in una maggior sicurezza di sé stessi nell'insegnamento. Il modello didattico di elementazione basato su definizione-esempi-classificazione tende a essere completamente smontato in modo autonomo. Una volta acquisiti i contenuti essenziali, gli studenti si sentono infatti più a loro agio nel presentare argomenti di chimica ai loro alunni e nello specifico ricorrono continuamente alla trattazione storica degli elementi per presentare il concetto di materia.

Nel contempo, anche l'epistemologia offre la possibilità di far riflettere in maniera critica sulle questioni più intime legate ai principi fondamentali della chimica (il concetto di materia già citato, l'idea di sensazione, di trasformazione etc.), riscoprendoli spesso nelle questioni esistenziali legate allo sviluppo del pensiero umano (Glasson, Bentley, 2000).

4. Da una visione dinamica della chimica alla progettazione simulata della didattica della chimica con i bambini

La visione della chimica che è stata presentata agli studenti del corso di laurea in scienze della formazione primaria è stata messa alla prova anche in esercitazioni-simulazione proposte agli studenti, sia per il quarto che per il primo anno di corso. In primo luogo, si è chiesto agli studenti di realizzare, proposte di pagine di sussidiario rivolte principalmente ad una classe quarta e quinta primaria. Si è partito dalla costatazione, attraverso l'esame di alcuni esempi, che nella sezione dedicata alle scienze dei sussidiari oggi in commercio vi sono pochissimi argomenti di chimica trattati e che, quando presenti, tali argomenti, vengono presentati di frequente in maniera parzialmente o completamente errata dal punto di vista anche dei contenuti. Sono state scelte alcune di queste pagine e si è proposta una esercitazione consistente nella riformulazione di alcune pagine di sussidiario dedicate ad argomenti di chimica di loro interesse oppure nella progettazione e realizzazione di pagine nuove (Figura 1).

Oggi parliamo di... REAZIONI CHIMICHE

Ma prima ripassiamo...

- Gli elementi della Tavola Periodica
- I composti chimici

Cos'è una reazione chimica?

La reazione chimica è un processo **dinamico** in cui alcune specie chimiche, dette **reagenti**, interagiscono fra loro dando origine ad altri composti, ovvero al **prodotto** della reazione. Un fiammifero che brucia o la cottura del cibo sono esempi di reazioni, più o meno complesse, che trasformano certe sostanze in altre.

Come avviene una reazione chimica?

Le reazioni avvengono per la **collisione** tra le molecole coinvolte nei composti reagenti: più frequenti sono gli urti, più è alta la probabilità che avvenga la reazione. Questa è nota come **Teoria delle collisioni**. Inoltre, perché una reazione chimica abbia luogo, c'è bisogno di un certo quantitativo di energia, detta **energia di attivazione**: è questa energia che mette in moto tutto!

L'equazione chimica

Ogni reazione chimica viene rappresentata simbolicamente con un'equazione chimica che indica quali elementi chimici sono coinvolti nella reazione ed in che misura questi reagiscono insieme, nonché il prodotto al quale la reazione dà origine. Ecco, per esempio, l'equazione chimica della reazione che dà origine al comune sale da cucina:

$2Na+Cl_2 \rightarrow 2NaCl$

Dinamico: che avviene in movimento
Collisione: urto, scontro

OSSIGENO E REAZIONI

L'ossigeno è estremamente importante in natura: fa parte di numerosi composti chimici (tra cui l'acqua!), è uno dei componenti dell'atmosfera terrestre ed è necessario a quasi tutti gli esseri viventi per respirare. Inoltre, l'ossigeno è coinvolto in alcune importanti reazioni chimiche, tra le quali quelle di **combustione** e quelle di **ossidazione**.

Cos'è una reazione di combustione?

La reazione di combustione è una delle reazioni più diffuse in natura. Durante questa reazione una sostanza (o un materiale), detto **combustibile**, reagisce con un gas (di solito ossigeno), detto **comburente**, per dare, oltre a nuove sostanze, anche calore e luce.

Cos'è una reazione di ossidazione?

L'ossidazione è una reazione fra una sostanza, il ferro per esempio, e l'ossigeno; in presenza di acqua l'ossidazione del ferro lo trasforma in una sostanza nota come **ruggine**.

Ho capito?

1. *Cos'è una reazione chimica?*
2. *Cos'è l'energia di attivazione?*
3. *Quali sono le principali reazioni chimiche in cui è coinvolto l'ossigeno?*
4. *In cosa consiste la combustione?*
5. *Cos'è la ruggine e perché si forma?*

La pagina dei Perché

Sai perché si crea la ruggine sugli oggetti di ferro?

Il ferro, in presenza di acqua e aria si trasforma lentamente in ruggine. L'equazione chimica che indica tale reazione è:
$4Fe + 3O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3$

Sai perché gli oggetti d'argento si scuriscono con il tempo?

Anche l'argento, come il ferro, si ossida all'aria, con il passare del tempo. Nel suo caso, però, si forma una patina scura e, ogni tanto, è necessario pulirlo per farlo tornare splendente!

Sai perché la frutta si annerisce?

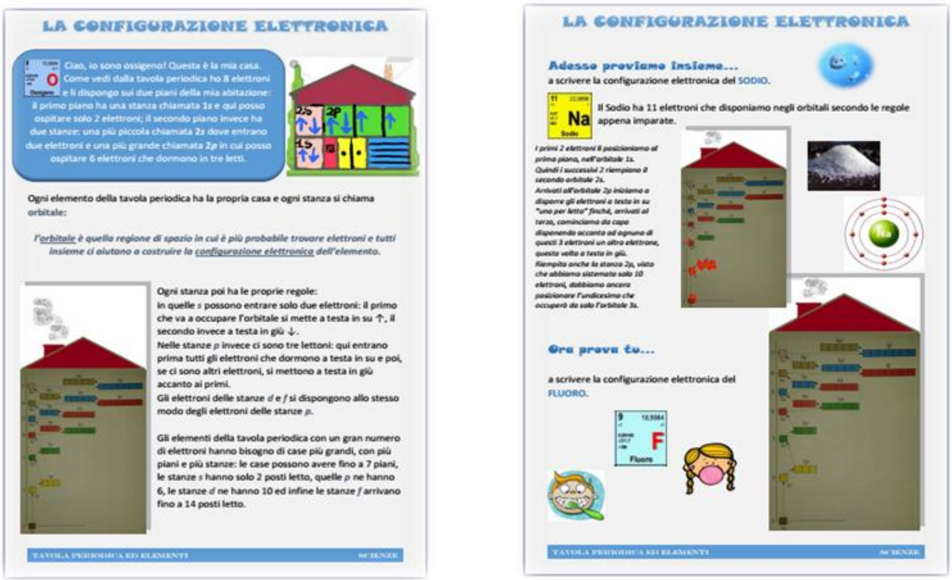
A contatto con l'aria la frutta si scurisce piuttosto in fretta: non appena viene tagliata, infatti, inizia a cambiare colore. Tranquilli, però: il cambiamento di colore rende i cibi meno belli da vedere ma non pericolosi da mangiare!

Facciamo gli scienziati!
Osserviamo in classe alcuni oggetti di ferro e pesiamoli con attenzione. Successivamente disponiamoli in contenitori pieni d'acqua e teniamo nota, giorno dopo giorno, delle trasformazioni riscontrate.

Figura 1 – Tre pagine di sussidiario progettate da studenti del corso di Chimica e didattica della chimica, Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria, Università Roma Tre, nell'a. a. 2016-2017

L'attività è stata svolta durante le ultime lezioni, in modo da consentire agli studenti di poter avere una panoramica discreta sull'insieme degli argomenti trattati, che consentisse loro anche di proporre tematiche non affrontate nel corso ma di loro gradimento. Gli studenti si sono organizzati in piccoli gruppi e hanno presentato brevemente (circa 5-10 minuti) il loro elaborato in aula davanti ai loro colleghi. Ogni presentazione è stata succeduta da una discussione condotta dal docente, volta a mettere in luce differenze e analogie con le altre proposte e soprattutto gli elementi di eventuale criticità nella presentazione delle proposte, oltre che gli aspetti didatticamente rilevanti.

Quello che è emerso, in primo luogo, è che le scelte dei contenuti raramente ricadevano negli argomenti più frequentemente trattati dai sussidiari, ritenuti evidentemente più semplici da trattare. Infatti, sono stati scelti argomenti quali: la lievitazione, la teoria acido base, cenni di elettrochimica e persino la configurazione elettronica (Figura 2).



LA CONFIGURAZIONE ELETTRONICA

Ciao, io sono ossigeno! Questa è la mia casa. Come vedi dalla tavola periodica ho 8 elettroni e li dispongo sui due piani della mia abitazione: il primo piano ha una stanza chiamata 1*s* e qui posso ospitare solo 2 elettroni; il secondo piano invece ha due stanze: una più piccola chiamata 2*s* dove entrano due elettroni e una più grande chiamata 2*p* in cui posso ospitare 6 elettroni che dormono in tre letti.

Ogni elemento della tavola periodica ha la propria casa e ogni stanza si chiama orbitale:

l'orbitale è quella regione di spazio in cui è più probabile trovare elettroni e tutti insieme ci aiutano a costruire la configurazione elettronica dell'elemento.

Ogni stanza poi ha le proprie regole:
in quelle *s* possono entrare solo due elettroni: il primo che va a occupare l'orbitale si mette a testa in su ↑, il secondo invece a testa in giù ↓.
Nelle stanze *p* invece ci sono tre lettoni: qui entrano prima tutti gli elettroni che dormono a testa in su e poi, se ci sono altri elettroni, si mettono a testa in giù accanto ai primi.
Gli elettroni delle stanze *d* e *f* si dispongono allo stesso modo degli elettroni delle stanze *p*.

Gli elementi della tavola periodica con un gran numero di elettroni hanno bisogno di case più grandi, con più piani e più stanze: le case possono avere fino a 7 piani, le stanze *s* hanno solo 2 posti letto, quelle *p* ne hanno 6, le stanze *d* ne hanno 10 ed infine le stanze *f* arrivano fino a 14 posti letto.

TAVOLA PERIODICA ED ELEMENTI — SCIENZE

LA CONFIGURAZIONE ELETTRONICA

Adesso proviamo insieme...
a scrivere la configurazione elettronica del SODIO.

Il Sodio ha 11 elettroni che disponiamo negli orbitali secondo le regole appena imparate.

I primi 2 elettroni li posizioniamo al primo piano, nell'orbitale 1s. Quindi i successivi 2 riempiono il secondo orbitale 2s. Arrivati all'orbitale 2p iniziamo a disporre gli elettroni a testa in su "uno per letto" finché, arrivati al terzo, cominciamo da capo disponendo accanto ad ognuno di questi 3 elettroni un altro elettrone, questa volta a testa in giù. Riempita anche la stanza 2p, visto che abbiamo sistemato solo 10 elettroni, dobbiamo ancora posizionare l'undicesimo che occuperà da solo l'orbitale 3s.

Ora prova tu...

a scrivere la configurazione elettronica del FLUORO.

TAVOLA PERIODICA ED ELEMENTI — SCIENZE

Figura 2 – Due pagine di sussidiario per le ultime due classi della scuola primaria sulla configurazione elettronica, progettate da studenti del corso di Chimica e didattica della chimica, Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria, Università Roma Tre, nell'a. a. 2016-2017

In secondo luogo, è stato possibile osservare in alcuni elaborati un tentativo evidente di chiarificare, senza tuttavia semplificare, alcuni concetti, anche elementari, al fine di rendere il più possibile fedele alla disciplina la loro proposta. A questo scopo numerosi elaborati si sono avvalsi di rappresentazioni grafiche di ogni genere, mappe concettuali e descrizioni di esperimenti scientifici facilmente riproducibili.

Una seconda esercitazione, rivolta esclusivamente agli studenti del corso del quarto anno, ha riguardato la progettazione e realizzazione di alcuni contenuti multimediali supplementari alle pagine di sussidiario. Sono stati realizzati video didattici di esperimenti già proposti in aula e non, accompagnati da una spiegazione sintetica di circa 5 minuti. Tuttavia, e diversamente da quanto riscontrato per l'esercitazione precedenti, non hanno evidenziato un analogo spirito di iniziativa e creatività, bensì un senso di inadeguatezza per lo svolgimento della proposta, sia dal punto di vista della scelta degli esperimenti che della presentazione. L'ipotesi è che l'impossibilità di corredare un corso così breve, svolto nel Dipartimento di Scienze della Formazione, da una parte svolta in un vero e proprio laboratorio scientifico sia un ostacolo molto importante. Nel tentativo di intervenire su tale mancanza, si è adottato un metodo di simulazione del laboratorio scientifico o laboratorio scientifico virtuale, attraverso la discussione di diversi video di esperimenti didattici adeguati per la scuola primaria, per ogni tipologia di argomento proposto nel programma del corso. Inoltre, sono state programmate delle visite guidate a gruppi presso il Museo di Chimica dell'Università di Roma La Sapienza, nel corso delle quali gli studenti hanno assistito a numerose esperienze didattiche, alcune anche interattive. Gli studenti hanno mostrato molto interesse per queste esperienze, ed in particolare per un'esperienza sugli indicatori acido-base presenti in alcuni alimenti e per l'osservazione dei più comuni oggetti presenti in un laboratorio chimico.

Diversi studenti sono stati in grado di elaborare percorsi ipoteticamente significativamente validi ed adatti o adattabili in futuro ad un contesto di classe; d'altra parte, studenti con una conoscenza superficiale della materia, anche con ottime conoscenze didattiche, hanno avuto molte difficoltà ed una manifesta incapacità nel relazionarsi alla materia come insegnanti poiché non possedevano i contenuti o non erano in grado di comunicarli in modo semplice e concreto, fallendo di conseguenza nel raggiungimento degli obiettivi che si erano proposti. Queste esperienze hanno confermato la nostra idea che, accanto ad una conoscenza delle tecniche didattiche e pedagogiche, l'insegnante debba possedere in primis la conoscenza della materia. Al fine comprendere la percezione puramente qualitativa del cambiamento didattico avuta da parte degli studenti, si possono considerare i risultati in evoluzione emersi dai questionari che alla fine di ognuno dei corsi si sottopongono agli studenti.

Alle varie domande gli studenti rispondono con una propria valutazione con una scala da 1 (meno soddisfatto) a 5 (più soddisfatto). Abbiamo scelto di proporre un confronto fra i risultati relativi alle domande seguenti: 1) "La modalità di svolgimento delle lezioni è risultata efficace?" (Figura 3); 2) "Quanto ritiene coerente l'insegnamento rispetto al suo corso di laurea?" (Figura 3).

Consideriamo ora i risultati relativi agli anni accademici 2015-16 e 2016-17, fra i quali si è avuto un accento deciso sia sull'approccio storico ai concetti primordiali, sia sulle esercitazioni attive prima menzionate.

Guardando la Figura 3, si evince che alla domanda sull'efficacia didattica delle lezioni, una maggiore percentuale di studenti ha premiato l'approccio storico unito a quello "laboratoriale". Osservando la figura si può osservare come gli studenti ritengano il Corso di chimica e didattica della chimica più coerente al loro corso di studi rispetto all'anno precedente.

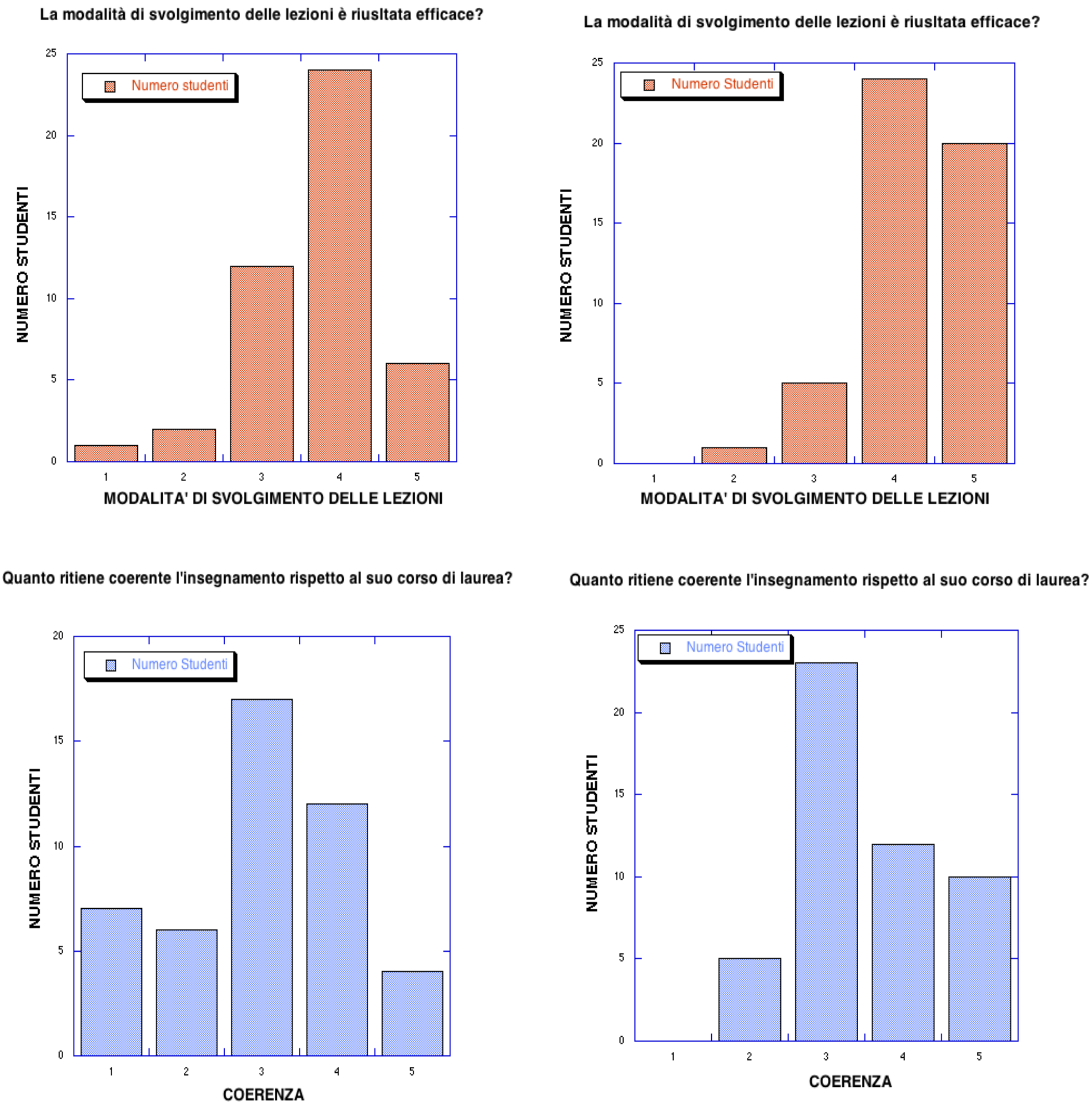


Figura 3 – Corso di Chimica e didattica della chimica, corso di laurea in Scienze della formazione primaria, Università di roma Tre. Confronto tra l'anno accademico 2015/2016 (a sinistra) e 2016/2017 (a destra) suelle domande "la modalità di svolgimento delle lezioni è risultata efficace?" (sopra) e "Quanto ritiene coerente l'insegnamento rispetto al suo corso di laurea?" (sotto). Agli studenti è stato chiesto di rispondere con una valutazione anonima da 1 (meno soddisfatto) a 5 (più soddisfatto)

Concludiamo con tre esempi progetti didattici realizzati a scuola nell'ambito della chimica da studenti del nostro corso, in collegamento con il lavoro alla fine del loro percorso di studio. Questi progetti sono un banco di prova dell'intero impianto del corso. Il primo progetto, rivolto a una classe quinta primaria, era dedicato al tema dell'alimentazione, includendo un genuino approccio chimico. Dopo aver introdotto da un punto di vista chimico i nutrienti degli alimenti principali, caratterizzandoli in relazione ai sensi e alla loro funzione nell'organismo, la tesista ha proposto ai bambini delle associazioni mediante le quali confrontare i cibi a loro più vicini con i nutrienti stessi. Questa esperienza è stata un'occasione di riflessione sull'importanza di proporre alcuni temi scientifici utilizzando esempi della realtà, quindi già noti ai bambini: l'attenzione e l'interesse che i bambini dimostrano nel momento in cui comprendono l'attualità e la concretezza di ciò che gli viene proposto, accelera chiaramente i processi di apprendimento. Una seconda riflessione riguarda la possibilità di arricchire il linguaggio degli alunni con una terminologia differente, come in questo caso le parole *carboidrati, proteine, grassi, vitamine e sali minerali*. La padronanza di tali termini e l'associazione di questi ai cibi che quotidianamente consumano educa nel bambino uno sguardo attento alle connessioni presenti nella realtà, donandogli maggiore coscienza e consapevolezza anche di sé stesso.

Consideriamo ora due progetti realizzati nella scuola dell'infanzia rivolti a bambini di 5 anni. In uno di essi la laureanda ha provato ad affrontare il sistema di classificazione degli elementi con i bambini prima della scuola dell'obbligo. Il progetto ha previsto l'introduzione solo di alcuni elementi del sistema periodico, attraverso lo strumento della fiaba, di canzoni e di attività motorie di gruppo. In un primo momento, sono stati presentati alcuni dei metalli più noti ai bambini, come l'oro, l'argento, l'alluminio ed il rame, attraverso degli oggetti di facile reperibilità costituiti per lo più esclusivamente da essi. In una seconda fase, invece, la tesista ha tentato di evidenziare la presenza di altri elementi anche in oggetti più complessi, in cui questi sono presenti come composti, ad esempio frutta e ortaggi. Quest'ultima esperienza è stata condotta sfruttando i personaggi di un cartone animato, *Capitan Kuk.*

Un altro progetto realizzato nella scuola dell'infanzia è stato rivolto alla comprensione degli stati di aggregazione della materia, prendendo come soggetto l'acqua (Figura 4). Rispetto ai precedenti, questo tema si presta ad un maggior numero di proposte didattiche. Gli argomenti erano: le principali proprietà dell'acqua, gli stati di aggregazione e i passaggi di stato della materia. Anche in questo caso si è scelto di utilizzare come strumento didattico il racconto. Per introdurre il tema è stata utilizzata una storia – inventata dalla tesista – sulle avventure di *Gocciolina*, una goccia d'acqua dotata di una personalità riconducibile ad alcune proprietà chimiche e fisiche dell'acqua.

Figura 4 – La storia della materia in classe (M. E. Scauro-Scauri, Scauri, LT). Nella figura di sinistra, uno dei cartelloni creati per raccontare il concetto di "solubilità"; nella figura a destra, si riporta immagine di un esperimento in aula sulle proprietà di alcuni corpi in relazione all'acqua, prendendo in esame il fenomeno del "galleggiamento" (Tontoli 2015/2016)

Successivamente, la tesista ha fatto eseguire ai bambini dei semplici esperimenti per riconoscere autonomamente le proprietà macroscopiche dei vari stati di aggregazione; in particolare, sono stati eseguiti degli esperimenti consistenti nel travaso dell'acqua in forma liquida per riconoscere le capacità di un liquido di adattarsi alla forma del recipiente in cui è contenuto. Inoltre, è stato proposto anche un esperimento con lo scopo di presentare i passaggi di stato, argomento poi discusso integralmente attraverso uno schema sul ciclo dell'acqua. L'esperimento in questione ha previsto il passaggio dallo stato solido a quello liquido ed è stato effettuato mediante l'osservazione della fusione del ghiaccio a temperatura ambiente. Infine, si sono analizzate alcune proprietà dei corpi in relazione al rapporto con l'acqua legate alla solubilità ed alla densità.

Nella progettualità durante le esercitazioni in aula, così come nei lavori di tesi, è emersa impetuosamente l'importanza della conoscenza della materia da parte degli studenti, futuri insegnanti; nei casi in cui questa conoscenza è approfondita, dettagliata e curata, l'insegnante manifesta capacità di adattamento, libertà di azione e originalità e di conseguenza riesce a suscitare l'interesse dei suoi alunni.

5. Conclusioni e linee future di sviluppo

I lavori realizzati sia nella scuola dell'infanzia sia nella scuola primaria, i lavori nelle simulazioni in aula durante il corso, l'evoluzione qualitativa in aula (maggiore interesse e partecipazione e un approccio allo studio della materia più consapevole e motivato) e i questionari degli studenti, confermano la validità formativa, per i futuri insegnanti, dell'approccio umanistico-formativo alla chimica che abbiamo cercato di illustrare. Riteniamo che molteplici fattori concorrono alla spiegazione dei risultati. Uno di essi è l'estrazione di gran parte degli studenti da studi secondari – e anche precedenti lauree – di stampo umanistico-letterario, che ha consentito loro di avvicinarsi più agevolmente a contenuti di chimica presentati sotto un profilo storico. I risultati ottenuti confermano quelli di altre esperienze didattiche, nazionali ed internazionali, rivolte all'introduzione nel curriculum dei futuri insegnanti delle riflessioni storico-epistemologiche (in inglese note come "the nature of science").

In coerenza con questo approccio, si è scelto di inserire, oltre alla creazione di alcune pagine di sussidiario, anche una nuova forma di esercitazione. Si tratta della progettazione e realizzazione di brevi lezioni su argomenti di chimica che non vengono trattati nel corso oppure sono solo accennati; si tratta quindi di applicare a un aspetto diverso della chimica l'approccio seguito in aula dal docente. Questo consente di sviluppare negli studenti una certa autonomia e libertà di lavoro ed al docente di verificare la loro capacità di far propria la metodica didattica.

Inoltre, negli anni anche la modalità d'esame è stata modificata. Dall'esame orale si è passati ad una prova scritta, contenente tre quesiti: uno a sfondo storico, un esercizio di chimica (un calcolo) ed uno, infine, didattico in cui si richiede allo studente di elaborare una proposta didattica su un argomento proposto dal docente; la seconda parte dell'esame è un confronto orale a partire dai contenuti dello scritto. In tal modo, il futuro insegnante ha la possibilità di verificare le proprie conoscenze sulla materia (mediante la risoluzione dell'esercizio) e anche la sua capacità di attuazione in classe mediante una programmazione, che schematizza nella terza domanda d'esame.

Per quanto riguarda i contenuti, il calcolo stechiometrico è approfondito all'interno del capitolo sulle reazioni; l'obiettivo è quello di offrire ai futuri insegnanti degli strumenti semplici e un linguaggio scientifico che permetta loro, una volta acquisiti i concetti, di elaborare attività di laboratorio di chimica con gli alunni, le quali richiedono molto spesso precisione dei calcoli e conoscenza delle sostanze.

Un ultimo aspetto che si è scelto di inserire nel corso, in lezioni dedicate di 2 ore, è il confronto tra gli studenti laureati negli anni precedenti con una tesi in chimica e didattica della chimica con gli studenti in corso. Attraverso le immagini e il racconto dell'esperienza, con una metodologia applicata anche nei corsi di Matematica e didattica della matematica, si riflette sugli strumenti e sulle strategie nell'istruzione scientifica in età infantile, dando spazio all'analisi delle difficoltà e delle problematiche (di organizzazione anche pratica, di linguaggio, di gestione della discussione con gli allievi). Il corso è in continua evoluzione.

6. Riferimenti bibliografici

Aquilini, E. (2000). Il ruolo del concetto di gas nella costruzione delle basi della chimica. *Cns, La chimica nella scuola*. *22*, 5, 149-152.

Asimov, I. (1965). *A short history of chemistry*. New York: Anchor Books Doubleday & Company, Inc.

Barsantini, L., Fiorentini, C. (2001). *L'insegnamento delle scienze verso il curricolo verticale. I fenomeni chimico-fisici*. L'Aquila: IRRSAE Abbruzzo.

Borsese, A., Mallarino, B., Rebella, I., Parrachino, I., (2012). Verso un approccio significativo al sapere scientifico: una proposta interdisciplinare per la scuola primaria. *Giornale di didattica e cultura della Società chimica italiana*, 4.

Carpignano, R., Cerrato, G., Lanfranco, D., Pera, T., (2013). *La Chimica Maestra*. Torino: Il Baobab.

Conti, P., Fiorentini, C., Zunino, G. (2005). *Conoscere il mondo. Esplorare, e scoprire le cose, il tempo e la natura.* Azzano: S. Paolo, Edizioni Junior.

Crippa, M., Fiorani, M., Nepgen, D., Rusconi, M., Bargellini, A., Mantelli, M. (2016). *Scienze Naturali*. Milano: Mondadori Scuola.

Darzens, G. (1912). *Initiation Chimique.* Paris: Hachette.

Donaldson, M. (1978). *Children's minds.* London: Fontana/Croom Helm.

Fiorentini, C. (2000). Quali condizioni per il rinnovamento del curricolo di scienze? In F. Cambi (a cura di) *L'arcipelago dei saperi: progettazione curricolare e percorsi didattici nella scuola dell'autonomia.* Firenze: Le Monnier, 275-290.

Fiorentini, C. (2007). Per un insegnamento significativo della chimica: il ruolo fondamentale della Storia della Chimica, disponibile da http://media.accademiaxl.it/memorie/S5-VXXXI-P2-2007/Fiorentini%20513-524.pdf

Gaboli, M., Tenconi, G. (2016). *Sulle ali di Pepe*, Milano: Fabbri Editori/Erickson.

Glasson, G. E., Bentley, M. L. (2000). Epistemological undercurrents in scientists' reporting of research to teachers. *Science Education*, 84(4), 469-485.

Harlen, W. (1997). Primary teachers' understanding in science and its impact in the classroom. *Research in Science Education*, 27, 323-37.

Harlen, W., Holroyd, C. (1997). Primary teachers' understanding of concepts of science: impact on confidence and teaching, *International Journal of Science Education*, *19(1), 93-105*.

Israel, G., Millán Gasca, A., (2012). *Pensare in matematica*. Bologna: Zanichelli.

Lancetti, M. C., Negri, N., Pagano, R., Valerio, M. (2015). *Mio, Viaggio alla scoperta dei saperi*. Milano: Gaia Edizioni.

Laporta, C., Cambi, F., Fiorentini, C., Tassinari G., Testi, C. (2000). *Aggiornamento e formazione degli insegnanti.* Firenze: La Nuova Italia.

Leopardi, L., Bolognani, F., Bolognani, F., Cateni, C., Temporelli, M., (2016). *Scienze Focus*. Torino: Garzanti Scuola.

Martellucci, V. (2016). *Gli elementi della tavola periodica*, Tesi inedita in Scienze della formazione Primaria. Roma: Università Roma Tre.

Metzger, H. (1935). La letteratura chimica francese nei secoli XVII e XVIII, *Thalès* 2, 162-166.

Metzger, H. (1936). L'evoluzione dello spirito scientifico in chimica da Lemery a Lavoisier, *Thalès*, 3, 107-113.

Metzger, H. (1936). La filosofia chimica di Jhean-Baptiste van Helmont, *Annales Guébhard-Séeverine*, 12, 140-156.

Metzger, H. (1937). Il metodo filosofico nella storia delle scienze, *Archeion*,19, 204-216.

Metzger, H. (1937). La filosofia di Levy-Bruhl, *Archeion*, 12, 15-24.

Metzger, H. (1987). *Il metodo filosofico nella storia delle scienze*, Testi 1914-1939 e lettere raccolti da Gad Freudenthal, Catellana, M. (a cura di) Taranto: Barbieri Selvaggi Editori.

OCSE (2017). *Uno sguardo sull'istruzione: OCSE 2017*. Disponibile da http://www.oecd.org/edu/skills-beyond-school/EAG2017CN-Italy-Italian.pdf

Scerri, E. (2012). What is an element? What is the periodic table?. *Foundations of Chemistry* 14, 69-81.

Scerri, E. (2016). *A Tale of Seven Scientists, and a New Philosophy of Science*. New York: Oxford University Press.

Tontoli, S. (2016). *Evoluzione del concetto di materia nella chimica*, Tesi inedita in Scienze della Formazione Primaria. Roma: Università Roma Tre.

Received October 10, 2017
Revision received November 24, 2017/November 27, 2017
Accepted December 22, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 209-239 – ISSN 2038-1034

Storia e racconto nella Matematica della scuola primaria: basi didattiche e sequenza operativa

Ana Millán Gasca
Anna Mazzitelli
Francesca Neri
Emanuela Spagnoletti Zeuli

Abstract – *We discuss the introduction of elements of history of mathematics in primary school. Pedagogical goals are considered, as well as educational strategies, and a learning path spread over 5 grades (from 6 to 10 years old pupils) is presented. This is an action-research developed with qualitative methods. The History of mathematics was presented in single groups in several Italian primary schools in the years 2010-2016 by means of storytelling, using books for children, mainly by Italian authors. Great attention was paid to offering up-to-date historical knowledge. Results regarding understanding and involvement are consistent with Kieran Egan proposals regarding the teaching of history to children. The introduction of history of mathematics moves the focus of school mathematics from numeracy and technical skills to a humanistic education, with good results both for understanding and for the appreciation of mathematics.*

Riassunto – *Si discute l’introduzione di elementi della storia della matematica nel lavoro in aula con bambini da 6 a 10 anni. Si presentano le basi teoriche e si propone una progressione per la scuola primaria, divisa in 5 gradi, sia per quanto riguarda i contenuti storici, sia per quanto riguarda la metodologia didattica. Entrambi gli aspetti sono stati sviluppati in collegamento con sperimentazioni in classe in Italia che si discutono da un punto di vista qualitativo. In esse, la storia è stata presentata come racconto e attraverso la mimesis (grazie ai suggerimenti che provengono dalla letteratura per l’infanzia) e mantenendo nel contempo un orizzonte di autenticità, derivato dall’adattamento al mondo infantile della ricerca viva nel campo della storia della scienza. L’introduzione della storia della matematica contribuisce ad alleviare l’abitudine a considerare l’alfabetizzazione matematica in età infantile come un puro addestramento tecnico, nonostante i numerosi studi sulla disposizione del bambino verso l’atteggiamento contemplativo e filosofico, cruciale nell’introduzione al pensiero scientifico.*

Keywords – history and pedagogy of mathematics, early childhood, numeracy, primary school

Parole chiave – storia della matematica nella didattica, prima infanzia, alfabetizzazione matematica, scuola primaria

Ana Millán Gasca è Professore Ordinario di *Matematiche complementari* del Dipartimento di Scienze della Formazione dell’Università degli Studi Roma Tre, dove è referente del Laboratorio di Matematica per la Formazione Primaria. Si occupa di storia della matematica in età contemporanea, con particolare riguardo per il rapporto fra la matematica e le sue applicazioni e il ruolo della ricerca e dell’istruzione matematica nello sviluppo degli stati liberaldemocratici; e di didattica della matematica in età infantile, con particolare riguardo per i bambini di 3-8 anni e per i bambini con trisomia 21. Oltre ai numerosi articoli e contributi in volume, fra i saggi pubblicati: *The world as a mathematical game. John von Neumann in 20th century science* (con G. Israel, Birkhäuser, 2008); *Fabbriche, sistemi, organizzazioni* (Springer, 2003); *Pensare in matematica* (con G. Israel, Zanichelli 2012); *Euclides. La fuerza del conocimiento matemático* (Nivola, 2004); *Numeri e forme. Didattica della matematica con i bambini* (Zanichelli, 2016).

Anna Mazzitelli, cultore di *Biologia generale* e membro esterno del Laboratorio di Matematica per la Formazione Primaria del Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università degli Studi Roma Tre, è Dottore di ricerca in biologia cellulare e molecolare e docente di scuola primaria a Roma. Nell'area della botanica (studio dei pollini) ha pubblicato numerosi articoli in riviste internazionali.

Francesca Neri, cultore di *Matematica* e *Didattica della matematica* e membro esterno del Laboratorio di Matematica per la Formazione Primaria del Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università degli Studi Roma Tre, è laureata in Scienze della Formazione Primaria e in Discipline della musica e dello spettacolo e docente di scuola primaria a Roma. Si occupa di teatro educativo, della presenza scenica nel lavoro dell'insegnante, e dell'introduzione degli aspetti di drammaturgia, ritmo e esperienza corporea nella didattica della matematica con bambini. Su questi argomenti ha tenuto numerosi corsi di formazione (in particolare con l'Associazione Tokalon) e ha pubblicato alcuni lavori di ricerca-azione, fra cui Insegnanti: *12 ore in sala teatro. Voce, gesto, drammaturgia* (MimesisLab, Dipartimento di Scienze della Formazione, Università degli Studi Roma Tre, 2016).

Emanuela Spagnoletti Zeuli, cultore di *Matematica* e *Didattica della matematica* e membro esterno del Laboratorio di Matematica per la Formazione Primaria del Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università degli Studi Roma Tre, è laureata in Scienze della Formazione Primaria e in Sociologia (indirizzo antropologico) e docente di sostegno nelle scuole primarie a Roma. Da diversi anni è formatore in servizio degli insegnanti delle scuole dell'infanzia e delle scuole primarie (in particolare con la Associazione Tokalon). In collaborazione con A. Millán Gasca, ha pubblicato *La geometria nei materiali e nelle immagini per apprendere il sistema di numerazione posizionale decimale. Dalla storia alla scuola di oggi* (in "Periodico di matematiche", serie IX, 7 (3), 2015).

1. La storia della matematica e i bambini: origini, obiettivi e metodologia della ricerca

L'introduzione degli aspetti storici nella didattica della matematica elementare è oggetto di ricerca e di proposte operative da diversi anni. In questo lavoro ci soffermeremo sull' incontro fra i bambini e la storia della matematica: il suo scopo, i mezzi adoperati, e una riflessione su ciò che avviene in aula quando i bambini incontrano la storia della matematica. Miguel de Guzmán (1936-2004), in una testimonianza in parte autobiografica, si è soffermato su questa capacità di orientamento nel panorama della matematica elementare che offre il contesto storico e biografico, di fronte a concetti che altrimenti appaiono come "verità che escono dall'oscurità e si dirigono verso il niente" (Guzmán, 2007, pp. 31-33):

La visione storica trasforma meri fatti e abilità senz'anima in porzioni di conoscenza cercate ansiosamente e in molte occasioni con passione genuina da uomini in carne e ossa che si rallegrarono immensamente quando le hanno trovate. Quanti di quei teoremi, che nei nostri giorni di studenti ci sono apparsi come verità che escono dall'oscurità e si dirigono verso il niente, hanno cambiato di aspetto per noi nell'acquisire un perfetto senso entro la teoria, dopo averla studiato più a fondo, incluso il suo contesto storico e biografico. La prospettiva storica ci avvicina alla matematica come scienza umana, non divinizzata, alle volte penosamente strisciante e in altre occasioni fallibile, ma capace anche di correggere i suoi errori. Ci avvina alle interessanti personalità degli uomini che hanno aiutato a impulsarle lungo molti secoli, con motivazioni molto diverse... Il valore della conoscenza storica non consiste nell'avere una batteria di storielle e aneddoti curiosi per intrattenere i nostri alunni allo scopo di fare una sosta nel cammino. La storia si può e si deve utilizzare, ad esempio, per comprendere e fare comprendere un'idea difficile nel modo più adeguato[1].

[1] La traduzione è nostra in tutte le citazioni riportate. Guzmán è stato presidente dell'International Commission for Mathematical Instruction fra il 1991 e il 1998.

Si pone quindi la domanda se tale esperienza sia valida anche nel primo accostamento alla matematica, a partire dai 5-6 anni.

Non vi sono proposte operative né studi sistematici sulla proposta esplicita di contenuti storici ai bambini nelle ore di matematica a scuola[2]. Vi sono numerosi fattori che concorrono a spiegare questa lacuna. A tutti i vari livelli, non di rado la storia è considerata solo fonte di aneddoti e di informazioni biografiche per alleviare la fatica dello studio della matematica, e un approfondimento ulteriore è generalmente considerato una conoscenza sofisticata, un lusso filologico. Nella formazione universitaria dei futuri insegnanti della scuola primaria e dell'infanzia, la presenza della storia della matematica si limita, come nella tendenza generale di cui sopra, ad argomenti puntuali, e principalmente ai sistemi di numerazione antichi o alle pratiche numeriche riportate da studi etnografici, alle origini della geometria greca e a biografie e aneddoti[3]. A rendere difficile pensare alla storia nella scuola primaria, contribuisce inoltre il convincimento che essa sia fuori della portata dei bambini, per via della complessità concettuale di un'idea dinamico-evolutiva dei concetti matematici in connessione con l'evoluzione complessiva della società e della cultura.

I libri di testo scolastici italiani degli ultimi anni raramente includono contenuti storici (si vedano nel prossimo paragrafo gli esempi della fig. 1); altrettanto può dirsi di libri di testo anche molto considerati per la loro efficacia didattica, come i manuali *Math Expressions* di Karen Fuson – nota studiosa statunitense del pensiero matematico infantile – oppure i manuali di Shangai o di Singapore, che sono stati tradotti in altre lingue (circostanza straordinaria per l'editoria scolastica primaria).

La ricerca che si presenta ha due diversi punti di partenza. In primo luogo, vi sono le indicazioni provenienti dalla letteratura per l'infanzia a livello internazionale. A fare comprendere il valore formativo dei risultati anche recenti della ricerca in storia della matematica e le vie per avvicinarli ai bambini è stata l'archeologa Denise Schmandt Besserat, che nel suo albo illustrato *The history of counting* (1999, illustrazioni di Michael Hays) racconta ai bambini le proprie ricerche sulle origini della numerazione scritta nel mondo mesopotamico. In Italia, lo storico della matematica Enrico Giusti ha presentato la numerazione orale ai bambini in un libro intitolato *Awa insegna a contare* (2011, illustrazioni di Simone Frasca), le cui ultime pagine propongono alcuni esempi di lingue del mondo. Nel paragrafo 3 presentiamo alcune opere per l'infanzia di periodi precedenti che hanno ispirato l'aspetto pratico e teorico della ricerca.

In secondo luogo, nel corso di laurea in Scienze della Formazione primaria dell'Università Roma Tre, è stato introdotto progressivamente, a partire dal 2006, un gruppo selezionato di

[2] Rinviamo alle pubblicazioni del gruppo internazionale di studio "Storia e pedagogia della matematica" affiliato alla Commissione Internazionale per l'insegnamento della matematica (il gruppo si occupa anche della storia dell'insegnamento della matematica) e alle Scuole estive europee di storia ed epistemologia nell'educazione matematica.

[3] Si vedano, ad esempio, *Mathematics for elementary teachers* di Sybilla Beckmann o *Mathematics for the elementary teacher: A contemporary approach* di Gary L. Musser e colleghi, libri di testo con molte edizioni. Sull'introduzione della storia della matematica nella formazione degli insegnanti della scuola primaria, si veda Millán Gasca & Gil Clemente, 2016.

temi storici in collegamento stretto con i contenuti istituzionali di matematica per i futuri insegnanti della scuola primaria e dell'infanzia e con la riflessione epistemologica. Essi hanno riguardato soprattutto l'età antica: l'origine dei concetti primordiali della geometria della misura e del numero (e il collegamento fra i simboli numerici e l'invenzione della scrittura); la nascita della matematica in Grecia; l'origine del sistema di numerazione indo-arabica e del sistema di numerazione decimale[4]. Questo approccio è debitore del pensiero di de Guzmán, e soprattutto di quello di Federigo Enriques (1871-1946), che imperniava la sua visione di un insegnamento dinamico sull'equilibrio fra intuizione, logica, e storia: " Più che le differenze dei metodi o le indicazioni dei programmi influisce sull'efficacia dell'insegnamento il valore degli insegnanti: la loro mentalità, la comunicativa, la passione che portano alle cose insegnate, la larghezza degli interessi che li fa capaci di mettersi al posto degli allievi e di sentire con essi. Nella misura in cui tali doti possono essere acquisite, occorre per ciò curare soprattutto la preparazione universitaria, e poi creare ai docenti condizioni di vita che lascino sufficiente libertà di mantenere e di svolgere la propria cultura. La formazione di docenti di matematiche che siano all'altezza dei loro compiti didattici, richiede, in genere, che la scienza sia da loro appresa non soltanto nell'aspetto statico, ma anche nel suo divenire. E quindi che lo studioso apprenda dalla storia a riflettere sulla genesi delle idee" (Enriques, 1938, p. 190)[5].

È stato anche utile il contributo dello psicologo dello sviluppo Martin Hughes (1949-2011), il quale, nella sua ricerca sulle difficoltà dei bambini di classe prima in Gran Bretagna (5-6 anni) nell'incontro con i simboli matematici, si è rivolto allo studio dei sistemi di numerazione antichi, cui ha dedicato un intero capitolo del saggio *Children and number. Difficulties in the learning of mathematics* (1986).

Un risultato inatteso dell'introduzione della storia della matematica nella formazione di futuri insegnanti, è stato che quasi tutti i tirocinanti nell'area di Matematica e didattica della matematica, a partire dal 2007, hanno proposto le loro conoscenze storiche direttamente ai bambini a scuola, e ciò è avvenuto per loro iniziativa e attraverso una personale ricerca dei modi in cui queste conoscenze potevano essere presentate effettivamente in classe. La reazione dei bambini è stata positiva oltre ogni aspettativa, in termini di partecipazione in aula, motivazione, concentrazione e rendimento nelle verifiche scritte (o verifiche orali nell'unico caso della scuola dell'infanzia).

Dopo tali primi esempi di attività ideate in modo autonomo e senza continuità da studenti di Scienze della Formazione primaria nei loro tirocini[6], a partire dal 2011 è stata condotta una ri-

[4] Una presentazione organica è stata raccolta nel saggio *Pensare in matematica* (Israel & Millán Gasca, 2012; si vedano i capitoli 2 e 7); altri temi che possono giovarsi dagli aspetti storici in una presentazione elementare sono i numeri reali e le funzioni (si vedano i capitoli 6 e 9). A partire dal 2014, nel corso di laurea sono stati introdotti, in collegamento con i contenuti di didattica della matematica, anche aspetti di storia dell'insegnamento della matematica elementare in Europa dal Medioevo all'età contemporanea (si veda Millán Gasca, 2016).

[5] Legittimamente si possono estendere queste considerazioni ai docenti che lavorano con le prime età, poiché è lo stesso Enriques a sottolineare che l'intelligenza matematica si può coltivare fin dalla prima infanzia.

[6] Una riflessione sulle esperienze sporadiche svolte è stata presentata al Convegno nazionale "La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori" (Millán Gasca, 2011).

cerca sistematica alla quale hanno contribuito anche insegnanti in servizio[7]. Lo scopo della ricerca è stato duplice: in una prima fase, la progettazione di attività didattiche in matematica che includessero la conoscenza storica esplicita per gli allievi in età infantile, e la loro valutazione in termini di comprensione delle idee matematiche e di comprensione di ciò che la matematica è come ambito del sapere e parte della cultura; e in una seconda fase, l'individuazione di un sentiero di apprendimento (*learning path*) nell'arco delle cinque classi della scuola primaria italiana[8], suscettibile di essere applicato anche altrove.

Nel paragrafo 2 proponiamo alcuni esempi di attività didattiche progettate e realizzate dai 5 anni (ultimo anno della scuola dell'infanzia) ai 10 anni, in scuole pubbliche del Lazio, in ambito rurale e urbano, in quartieri centrali e periferici di Roma. Gli argomenti sono stati scelti sia a partire da proposte contenute in libri per l'infanzia, sia a partire dai temi trattati nei corsi rivolti ai futuri insegnati. Alcune attività sono state replicate in più scuole dello stesso grado (ad esempio in varie classi prime di scuole diverse) o di gradi diversi (ad esempio, uno stesso argomento sia in seconda sia in quinta). Si illustrano brevemente anche i materiali didattici e i metodi. Tale descrizione, così come la valutazione complessiva dell'incontro con la storia della matematica nei bambini presentata nel paragrafo 4, sono il risultato di una ricerca didattica condotta con metodi qualitativi, attraverso l'osservazione e le interviste "da vicino", la registrazione di aneddoti, l'analisi delle esperienze vissute in classe anche attraverso il racconto e l'elaborazione scritta, e il confronto fra le esperienze (Van Manen, 2016, Postic & De Ketele, 1988).

Non è possibile in questa sede illustrare i contenuti di storia della matematica che sono stati proposti ai bambini, né tantomeno discutere gli argomenti dal punto di vista storiografico. Le attività proposte si basano su conoscenze aggiornate di storia della matematica e della scienza, e sulla consapevolezza da parte di tirocinanti e insegnanti di questioni storiografiche quali quelle riguardanti l'uso delle fonti primarie o il contrasto fra diverse interpretazioni.

[7] Lo studio è stato condotto nell'ambito delle attività del Laboratorio di Matematica per la formazione primaria, unità di ricerca del Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università Roma Tre, che include una comunità di pratica di insegnanti in servizio. Una prima sintesi di alcune indicazioni metodologiche è stata presentata nel saggio Millán Gasca, 2016, per quanto riguarda in particolare il ruolo dei contenuti storici nell'apprendimento e nell'insegnamento della matematica. Le sperimentazioni in aula sono state condotte laddove vi era la necessaria (e non scontata) accoglienza da parte delle scuole di contenuti di storia della matematica, sia per i tirocinanti sia per gli insegnanti in servizio; ciò spiega le date e luoghi che saranno menzionate: il lavoro di progettazione, discussione e analisi all'interno del Laboratorio ha permesso di collegare la riflessione teorica alle verifiche sul campo.

[8] Questa seconda fase è stata sollecitata alla fine del 2012 da Karen Fuson, attenta ai *learning path*, ossia i sentieri di apprendimento per i singoli nodi della rete di elementi della matematica elementare; le autrici desiderano ringraziare Karen Fuson.

2. Temi di storia nelle lezioni di matematica con bambini e strategie didattiche

In questo paragrafo – seguendo la metodologia qualitativa citata sopra[9]: – proponiamo alcuni esempi, aneddoti, immagini, testi e testimonianze di aula, unitamente alla presentazione di una serie di questioni didattiche specifiche che sono state messe a fuoco nel corso delle esperienze, e che verranno discusse nel paragrafo successivo.

Le tirocinanti che per prime hanno deciso di introdurre – nel corso delle loro 60 ore di tirocinio didattico attivo del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria – argomenti di storia della matematica, si sono assunte un rischio anche di fronte agli insegnanti delle classi, poiché questi temi non sono presenti nei materiali né tanto meno nelle Indicazioni Nazionali per la scuola primaria (per non parlare della scuola dell'infanzia). Nei sussidiari italiani vi è una presenza discontinua di aspetti storici, riguardanti principalmente i numeri romani (fin quando sono stati considerati con attenzione) e le origini del sistema di numerazione indoarabico (Figura 1).

a b c

Figura 1 – La storia della matematica in due manuali per la quarta classe della scuola primaria pubblicati dopo il 2000 in Italia. a) la storia della numerazione in una doppia pagina in Reporter di Gloria Filippini, Cristina Scardi, Mariantonietta Berardi, Irma Rubaudo, a cura di Mario Amulfi, il Capitello, Torino 2009; b) e c) la matematica nel tempo in Iperlibro di Gianfranco Bresich, Deagostini Scuola, Milano 2005 (si ringrazia Maria Visceglia)

[9] Possibili errori o imprecisioni anche grammaticali contenuti in citazioni da relazioni finali di tirocinio (come in questo caso, si veda la didascalia della Figura 2) oppure in testimonianze dirette orali o scritte (registrazioni, lettere) non sono state corrette.

I contenuti storici sono stati proposti anche a bambini molto piccoli, poiché la ricerca-azione del Laboratorio di Matematica per la Formazione primaria aveva nello stesso periodo come argomento principale l'incontro dei bambini con la matematica fra i 5 e i 7 anni. Tale ricerca partiva dalla costatazione del fatto che in classe prima, in Italia, non di rado l'incontro dei bambini con la matematica si riduce ad iniziare un quaderno dedicato, sul quale scrivere le cifre, poi i numeri a due cifre e le prime disequazioni ed equazioni (confronti maggiore o uguale e operazioni), oltre che operazioni in colonna e piccoli problemi. Questo tipo di incontro produce straniamento e rifiuto da parte di molti (la maggioranza dei bambini) in ogni classe, perché, di fronte a esso, i bambini si pongono la legittima domanda: cosa è la matematica? e soprattutto: perché mi dovrei impegnare nel fare ciò che mi è richiesto nelle ore di matematica? Di conseguenza, all'esigenza di trovare esempi concreti, oppure materiale didattico per aiutare a capire questioni specifiche (ad esempio, sul significato dei simboli, sulle procedure del sistema di numerazione posizionale, oppure sui solidi o sull'addizione), si aggiunge quindi una domanda di natura generale che, se non viene presa in considerazione, rischia di compromettere non solo la motivazione ad apprendere ma anche l'apprendimento stesso. A questa domanda, che gli allievi si trascinano spesso lungo tutti gli anni della scuola primaria – anche se ormai sepolta da consuetudini e sopportazione – la storia della matematica può dare risposta.

Una serie di attività ripetute da tirocinanti in varie classi, in scuole diverse e in momenti diversi, hanno riguardato le origini della numerazione scritta.

Ad esempio, un'attività *hands on* in classe prima che simulava le *bullae* e i contrassegni sumeri per rappresentare quantità discrete (tema del citato libro di Schmandt Besserat), è stata realizzata all'interno di un lavoro complessivo sul concetto di numero attraverso segni e vocaboli e sull'uso dei numeri in contesti diversi, volto a superare l'esclusiva focalizzazione sull'apprendimento delle cifre (Figura 2; cfr. Figura 3)[10].

Raccontando di tutti i passaggi fondamentali che hanno portato alla nascita dei primi segni di scrittura dei numeri, ho mostrato manualmente le varie tappe. Ad ogni passaggio fondamentale ho scattato delle foto, così da riprodurre una serie di sequenze esplicative.
[...] Ho detto alla classe di immaginare di essere degli antichi commercianti di bottoni e che avremmo voluto sapere il numero dei bottoni del negozio, sia grandi che piccoli.
Da qui ho mostrato, in sequenza, i vari passaggi.
Abbiamo contato tutti i bottoni e per ognuno di essi abbiamo messo un sassolino nella *bulla*. L'abbiamo chiusa e sigillata. Ho fatto notare che se ci fossimo scordati il numero dei *calculi* che avevamo messo avremmo dovuto riaprire la *bulla* (e per fortuna che questa non è vera argilla se no si sarebbe definitivamente rotta) e ricominciare di nuovo a contare.
A questo punto ho mostrato lo stratagemma escogitato dagli antichi successivamente per il quale non era più necessario rompere la *bulla*. [...]

[10] Attività condotta dall'insegnante Alessia de Castro che nell'a. s. 2008-2009 ha svolto il suo progetto di tirocinio presso la classe IB dell'Istituto Comprensivo "L. Caetani" di Cisterna, in provincia di Latina (De Castro, 2009; L'incontro con la matematica in classe prima http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/matematica_prima.shtml).

Ecco come quattromila anni fa in Mesopotamia sono nati i numeri, usati per contare e misurare! (ho aperto la cartina del planisfero che avevo portato con me e ho fatto vedere la posizione geografica di questa terra, l'attuale Iraq).
Naturalmente, tra un passaggio e l'altro e alla fine di questa attività, ho fatto riprodurre le mie azioni a qualche bambino, facendo spiegare anche a voce ogni azione fatta. Mi sono accertata che tutti capissero bene i motivi di ogni evoluzione.
Ho poi detto alla classe che varie civiltà, di varie parti del mondo hanno inventato sistemi diversi per scrivere i numeri. Così ho mostrato ai bambini alcune pagine del libro *All'inizio fu lo scriba* dove sono mostrati i simboli numerici usati da varie e diverse popolazioni. I bambini erano curiosissimi di sapere come poteva essere possibile che con quei pochi e semplici segni grafici *"potevano venir fuori tanti numeri"*. Così hanno chiesto come funzionavano quei sistemi e facevano domande sulle popolazioni che li usavano. [...]
Il racconto sui primi segni di scrittura dei numeri è servito per esercitarsi nel conteggio, per rafforzare la corrispondenza tra oggetti, segni e simboli numerici, per riconoscere il carattere convenzionale del sistema di numerazione posizionale e distinguerlo da altri tipi di sistemi. Non solo: il racconto della storia ha contribuito ad affascinare i bambini al mondo dei numeri.

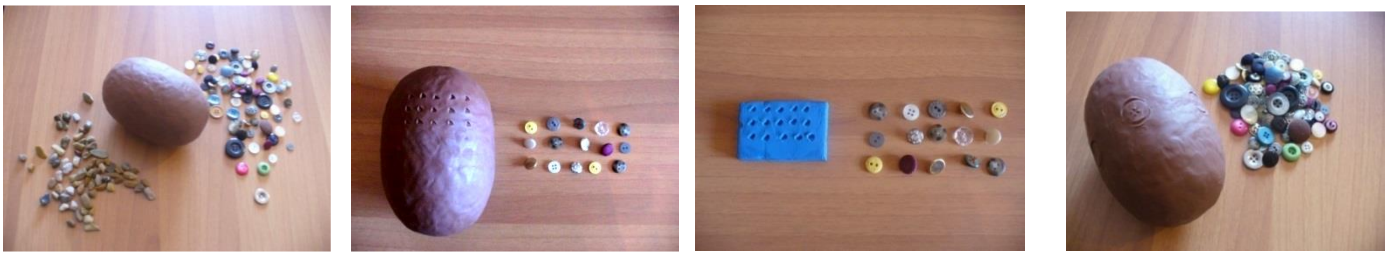


Figura 2 – I calculi o contrassegni, i bottoni da contare, il contenitore sferico d'argilla (bulla), la bulla sigillata con i calcoli all'interno; l'impronta dei calculi sulla superficie della bulla; "neanche la bulla": la tavoletta (De Castro, 2009)

Figura 3 – La stessa attività con materiali più elaborati (Amato, 2010)

Nello stesso livello scolare, ossia in classe prima, il lavoro sulle origini della numerazione scritta si è ampliato allargando la prospettiva verso l'aspetto interculturale, il carattere convenzionale della notazione e la decomposizione aritmetica che è alla base di differenti sistemi di numerazione (Figura 4)[11]:

Figura 4 – Simboli e parole per i numeri in classe prima (Amato, 2010)

Il ricorso all'immedesimazione che abbiamo visto emergere ha portato a proporre a questo riguardo molti racconti che sono stati pubblicati in Italia nello stesso periodo di svolgimento della ricerca: oltre a *Awa insegna a contare* (2011) di Enrico Giusti, altri due racconti pubblicati anch'essi dal Museo per la matematica Il Giardino di Archimede da lui diretto, *Uri il piccolo sumero* (2008) e *Ahmose e i 999.999 lapislazzuli* (2008), entrambi di Raffaella Petti. Inoltre, sulla numerazione scritta, *La grande invenzione di Bubal* (2012) di Anna Cerasoli, già docente di matematica e autrice di un'ampia produzione di libri matematici per l'infanzia[12]. Questi racconti, imperniati su personaggi-bambini, hanno fatto emergere una grande energia di *mimesis* nelle classi. In una classe seconda, Bubal è stata considerata una compagna di classe durante 15 sessioni di lavoro, successive alla lettura della storia, e dedicate ad argomenti non più di

[11] Dall'insegnante Elisa Amato che nell'a. s. 2009-2010 ha svolto il suo progetto di tirocinio presso la scuola Antonio Gramsci di Roma (Amato, 2010; *Come si scrivono i numeri? Un percorso attraverso la storia e i luoghi del mondo,* http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/matematica_prima.shtml).

[12] I libri di Giusti e Petti sono illustrati da Simone Frasca. Il libro di Anna Cerasoli è illustrato da Desideria Guicciardini.

tipo storico[13]. Due sperimentazioni in cui la storia dei numeri è stata oggetto di un lavoro sistematico, combinato con il resto dei contenuti di alfabetizzazione numerica nell'arco dell'intero anno da insegnanti in servizio, avvalendosi da libri per l'infanzia, sono state condotte nell'a. s. 2011-2012 (Figura. 5, cfr. con Figura 2 e Figura 3)[14] e nell'a. s. 2016-2017[15].

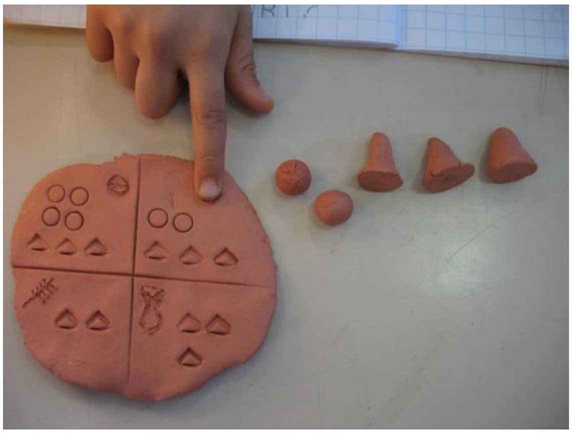


Figura 5 – Attività in classe prima basata su Uri il piccolo sumero, condotta nel 2011: contrassegni e tavolette realizzate in aula; lavoro sul quaderno dopo la lettura (foto di Emanuela Spagnoletti Zeuli)

Il seguente stralcio di *Sono il numero 1* di Anna Cerasoli (2010, illustrazioni di Ilaria Faccioli), che è stato usato in aula sia in classe seconda sia in classe quarta durante un tirocinio, ha indicato ai tirocinanti come può avvenire in classe una presentazione sotto forma di racconto, che non deformi la storia ma la avvicini ai bambini sottolineando anche ciò che è in gioco dal punto di vista prettamente matematico. Si tratta di un pezzo intitolato "I più bravi furono gli in-

[13] Progetto "Muovere il corpo, muovere la mente... con la matematica" della tirocinante Michela De Tecco, realizzato nella II F della scuola Falcone dell'Istituto comprensivo Ladispoli 1 (provincia di Roma), nell'a. s. 2012-2013 (http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/MICHELA%20DI%20TECCO%20orcurate%20Muovere%20il%-20corpomuovere%20la%20mente%20con%20la%20matematica.pdf).

[14] Da Emanuela Spagnoletti Zeuli presso l'Istituto Comprensivo Lante della Rovere di Roma, *La matematica in classe prima: un'analisi critica della prassi didattica corrente* (http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/Spagnoletti_Classe%20prima.pdf).

[15] Da Anna Mazzitelli presso l'Istituto Comprensivo "Don Lorenzo Milani" di Monte Porzio Catone in provincia di Roma, *Matematica con i sassi. Il mio lavoro di quest'anno in una prima* (http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/matematica_laboratorio.html).

diani" – seguito da "Infatti inventarono i numeri" – nel quale si riferiscono le parole della maestra del protagonista del libro: è un episodio di vita di classe, che avviene in una atmosfera di interesse e nel contempo di spensieratezza (Cerasoli, 2010, pp. 25-29):

Pensa che ti ripensa a come dovevano fare per non avere in mezzo ai piedi quei cumuli di sassi, alla fine l'idea venne agli Indiani.
E fecero così. Mettiamo che un pastore indiano aveva 143 pecore, perciò aveva 143 sassi. Con le dita delle mani contava dieci sassi, li buttava via e al loro posto metteva un sasso più grande.
Alla fine aveva 14 sassi grandi e 3 piccoli [...] "In questo modo, erano bastati solo otto sassi per rappresentare il numero delle sue pecore!" ha detto la maestra tutta contenta.
Ma intanto Marco e Davide stavano ridendo come matti [...] perché pensavano a qualcuno che passava vicino alla casa del pastore e si beccava tutti quei sassi. [...]
Allora ebbero una idea geniale. Usarono sassi tutti uguali [...]
Il Califfo, subito, chiamò i suoi sudditi e disse: "Non fate i pelandroni, studiatevi bene questi numeri, così diventerete più bravi nei calcoli e i vostri affari andranno meglio".
E così fu. [...]
Dopo, gli Arabi li hanno insegnati a noi Europei. Ecco perché li chiamiamo numeri indo-arabici.

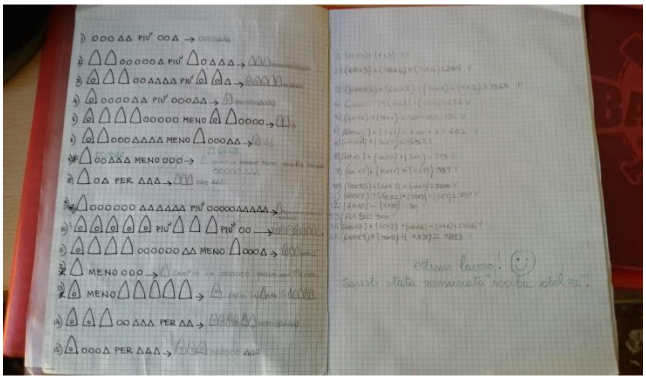
La storia della numerazione nel Vicino Oriente in quanto inizio dell'amministrazione e della contabilità, insieme alle origini del sistema di numerazione indo-arabico, sono state considerate nel contesto di un progetto di tirocinio sull'economia svolto nelle ore di matematica. Il lavoro è stato svolto in una classe quinta dove erano stati raccolti i bambini con le maggiori difficoltà della loro classe di età della scuola; questa è una testimonianza immediata della tirocinante (Figura 6)[16]:

Questa mattina ci siamo divertiti davvero molto tutti quanti! I bambini hanno detto che non era mai capitato loro di divertirsi così tanto a scuola e allo stesso tempo imparando qualcosa!
Ho fatto molte foto ed anche questo ci ha divertito molto, perché eravamo sporchi di das e come noi anche i banchi! I bambini, che per la prima volta hanno potuto lavorare in gruppo, erano entusiasti e lo ero anche io perché oggi ho avuto la conferma che è questo quello che voglio per il mio futuro! Oggi in VA non c'erano bravi e meno bravi e neppure gli svogliati di sempre, ma solo bambini contenti di imparare cose nuove in modo diverso dal solito!!! Le maestre erano sbalordite anche del fatto che, pur di fare questo lavoro, i bambini hanno promesso e soprattutto mantenuto la promessa di ripulire l'aula! [...] c'è stata una variazione, inaspettata e piacevole, riguardo l'inizio della lezione, infatti, assecondando una richiesta partita dai bambini, la VA ha mostrato la *bulla* e i calcoli alle altre due quinte. [...] vuol dire che è piaciuta molto anche a loro quest'attività, che comunque si sentivano padroni dell'argomento per accettare di parlarne ai loro compagni e poi perché finalmente la VA non era un riferimento negativo per la scuola, ma addirittura i suoi piccoli abitanti andavano ad insegnare qualcosa agli altri "più bravi e volenterosi"!!!

[16] Dalla tirocinante dott.ssa Daniela Pagliaroli, che ha svolto il suo progetto di tirocinio presso l'Istituto Comprensivo Giovanni Paolo II di Terracina (Latina) nell'a. s. 2012-2012 (Pagliaroli, 2013, *L'economia per i più piccoli... in aula di matematica* http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/matematica_quinta.shtml).

Figura 6 – L'economia nelle ore di matematica, si veda nota 15. Ai bambini di questa classe quarta è stata proposta di seguito la storia del sistema di numerazione indo-arabico attraverso le pagine prima citate di Anna Cerasoli (tratte da Pagliaroli, 2013)

Lo stesso argomento, in questo caso i sistemi di numerazione dei Sumeri, è stato proposto in modo avanzato, seguendo un principio di gradualità, in classe quarta, presso il VII Circolo Didattico Montessori di Roma nell'a. s. 2016-2017 (Figura 7). Con allievi maggiori, non si è trattato più solo di capirne le origini mediante un laboratorio manuale (grazie al ruolo dell'argilla!) e di scrivere alcuni numeri a due o tre cifre, ma andando oltre, di eseguire alcuni esempi delle quattro operazioni e di scrivere le espressioni che indicano la decomposizione.



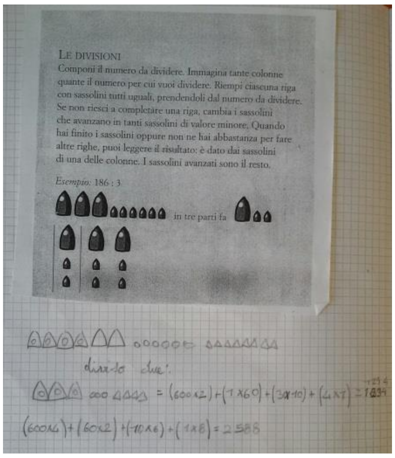


Figura 7 – Il lavoro di E. Spagnoletti Zeuli: la trasformazione dei simboli sumeri in cifre arabe attraverso un calcolo che di fatto è un'espressione con addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e parentesi tonde. "Era la prima volta che i bambini vedevano e provavano a lavorare con le espressioni (oltretutto espressioni che si scrivevano da soli!) e questo è piaciuto molto a tutta la classe"

In classe quarta sono stati proposti problemi antichi tratti dalla raccolta di Alcuino di York, *Problemi per rendere acuta la mente dei giovani*. Questi problemi semplici sono delle storielle ambientate nell'alto Medioevo, che hanno anch'esse permesso di mettere in gioco la *mimesis* per attivare una intensa spinta a risolvere i problemi e coadiuvare la stessa ricerca della soluzione[17].

Tutti i progetti di tirocinio e le sperimentazioni di insegnanti in servizio presentati finora hanno inserito la storia per coadiuvare la didattica di specifici argomenti di matematica. Men-

[17] Svolto dall'insegnante Ilaria Colella presso l'Istituto Comprensivo Leone Caetani" di Cisterna (provincia di Latina) nell'a. s. 2011-2012, *Un viaggio nel mondo della matematica elementare attraverso storie e racconti*, http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/Colella_Sito%20matepri.pdf.

zioniamo ora due esempi in cui la storia della matematica stessa era l'argomento delle lezioni. Il primo è uno dei primi progetti di tirocinio in cui sono stati proposti argomenti storici per volontà di una tirocinante, nell'a. s 2006-2007 in classe quinta: 60 ore dedicate alla matematica greca, attorno a tre figure (Pitagora, Talete, Euclide), che hanno anche dato spunto a molti esercizi e problemi di matematica (Figura 8)[18]:

Ho svolto le prime due unità didattiche ed è stato molto interessante e davvero entusiasmante [...]. Durante le spiegazioni mi hanno fatto un'infinità di domande e tutto questo interesse mi ha gratificato molto.
In breve la prima unità didattica si è svolta con due lezioni frontali: sull'origine della matematica pratica in Mesopotamia, abbiamo parlato degli scribi e della funzione della matematica presso questa civiltà e quella egiziana; e sull'origine della matematica teorica in Grecia, in cui ho delineato il percorso nello sviluppo degli studi dei primi matematici e filosofi, con l'attenzione alle differenze con le civiltà sopraddette. Ho impostato la verifica con un test, che ho sottoposto alla classe prima di cominciare e dopo la fine delle attività, ho chiesto poi loro una rielaborazione personale, attraverso un disegno o una riflessione, su quanto si era spiegato e dialogato.
La seconda attività ha riguardato Pitagora e la sua vita, l'attività della comunità e gli studi sull'aritmetica. Abbiamo parlato di tutto: dal significato mistico dei numeri presso i pitagorici, alle categorie di numeri che scoprirono, ci siamo spinti, sulla scia della loro curiosità, fino al teorema di Pitagora. Tuttavia abbiamo concentrato la nostra attenzione sui numeri figurati. Abbiamo giocato rappresentandoli con delle palline e con dei magneti sulla lavagna. In questa unità ho letto loro il capitolo del Mago dei numeri, che descriveva l'avventura di Roberto nel deserto con le noci di cocco e i cubetti di ghiaccio.
[...] all'inizio, durante l'osservazione, avevo detto alla classe che avrei regalato loro, come mio ricordo, due libri molto carini, Il Mago dei numeri e Mr Quadrato, beh Il Mago dei numeri me lo hanno già chiesto e hanno voluto che lo lasciassi in classe per leggerlo insieme alla maestra! Per finire abbiamo fatto un bel cartellone tutti insieme e io ho valutato empiricamente la loro comprensione sul meccanismo di rappresentazione dei numeri triangolari e quadrati.

Figura 8 – I nostri amici greci: Pitagora e in numeri figurati in classe V (tratta da Usai, 2008)

[18] Svolto dall'insegnante Linda Usai nel suo tirocinio presso la scuola primaria Giuseppe Garibaldi – 199° Circolo Didattico di Roma, attualmente Istituto Comprensivo Via Ceneda (Usai 2008,, *I nostri amici greci* http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/matematica_quinta.shtml). La citazione è tratta da una comunicazione personale a Ana Millán Gasca del 29 novembre 2007.

Nell'a. s. 2016-2017, ancora in classe quinta, un'insegnante in servizio ha proposto un lavoro di ricerca dell'intera classe sulle biografie dei grandi matematici, a conclusione di un percorso di attività aggiunte alla programmazione della classe in orario prevalentemente pomeridiano svolto dalla classe terza alla classe quinta. Gli alunni hanno partecipato con coinvolgimento, realizzando lavori individuali per ognuno dei matematici analizzati[19].

La seguente testimonianza del riscontro in classe è proposta da un'insegnante in servizio nelle sue lezioni di storia. Dovendo occuparsi del Vicino Oriente antico in classe quarta, ha proposto i sistemi di numerazione in Egitto e in Mesopotamia, arrivando fino alla numerazione posizionale babilonese[20]:

Dal punto di vista matematico hanno vissuto un'esperienza di interesse, stupore e meraviglia.
Mi dicevano spesso che solo loro studiavano "i segreti" delle civiltà antiche (riferendosi ai numeri). Vivevano il tutto come un accesso speciale al sapere delle civiltà e non avevano timore di operare, con quei numeri, in sistemi con base diversa dal dieci.
Di particolare interesse è stato il momento in cui ho spiegato il sistema erudito babilonese: ha solo due simboli, che possono essere usati sia come uno[21], sia come sessanta, ma anche come potenza di sessanta. Quindi ho dovuto spiegar loro le potenze, leggermente intimorita dico:
– "Quindi questo simbolo può essere usato sia come sessanta che come sessanta per sessanta, che come abbiamo già detto è sessanta alla seconda, cioè tremilaseicento. Dipende tutto dalla posizione che occupa!"
Mi volto verso di loro e mi aspetto fronti corrugate, tipiche di un grande "non ho capito"; so già che dovrò spiegare tutto molte volte. Ma girandomi ho una sorpresa: sorridono. Dicono, in ordine sparso:
– Ah!
– Ok!
– Ci dai qualche esercizio?

Scrive Ambra Chiachiararelli: "A onor del vero, se siamo partiti effettivamente da un movente storico, hanno trovato più piacere nel 'giocare' a scrivere numeri utilizzando tante basi diverse che a esercitarsi con i segni babilonesi".

Negli esempi sperimentali di singoli argomenti storici introdotti in diverse classi, una critica pervenuta da parte di alcuni insegnanti in servizio ha riguardato il collegamento fra le questioni di storia della matematica e i periodi storici che per consuetudine sono trattati in ogni classe dalla terza alla quinta (non vi sono in Italia veri e propri programmi dettagliati, ma generiche indicazioni che lasciano molta libertà ai singoli insegnanti, anche se i sussidiari finiscono per condizionare fortemente la scelta degli argomenti da affrontare). Nei primi due anni non sono trattati periodi storici precisi, e soltanto preistoria e storia antica sono considerate nell'intero arco della scuola primaria. Le civiltà mesopotamiche sono trattate nel quarto anno e il mondo

[19] Svolto dall'insegnante Felicia Savino presso l'Istituto Comprensivo "Alberto Manzi" di Villalba di Guidonia, in provincia di Roma, in una classe con metà degli allievi di origine straniera (Savino, 2017).

[20] Testimonianza di Ambra Chiachiararelli, 28 settembre 2017, relativa all'anno scolastico 2016-2017, presso il VII Circolo scolastico Montessori di Roma. Il lavoro prosegue nell'a. s. 2017-2018 con la lettura di alcuni brani degli Elementi di Euclide, che si collega al laboratorio di filosofia che seguono gli alunni (Zippel, 2017). Si veda Chiachiararelli 2018, in stampa, anche per la successiva citazione.

[21] Si intende che i simboli o gruppi di simboli possono essere riferiti a unità, a sessantine, a gruppi di 3.600 (ossia 60 alla seconda) e così via.

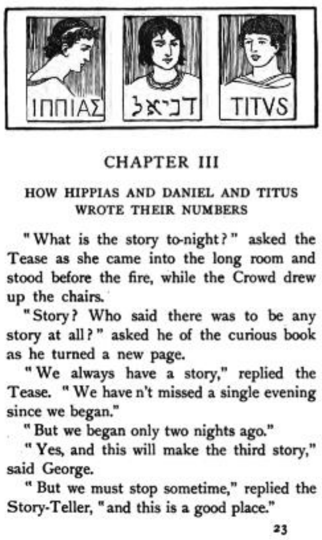
greco nel quinto anno, ad esempio. In altri paesi questa interazione con i programmi di storia può presentare altre caratteristiche. Tuttavia, il nostro punto di vista è che i temi di storia della matematica, oltre alla loro efficacia dal punto di vista dell'apprendimento della matematica, costituiscano un'opportunità, e non un inconveniente o un problema per la didattica della storia in generale. La gradualità nell'apprendimento non significa sequenzialità rigida, e i bambini apprendono anche collegando conoscenze ed elementi (anche acquisiti al di fuori di scuola) in una rete sempre più ampia e coerente. Ad esempio, se si trattano i Sumeri in classe prima con un lavoro sulle *bullae* e sulla scrittura dei numeri con il sistema additivo, si potrà raccogliere e ampliare questo lavoro in classe quarta (quando si studia la civiltà sumera in Storia), verificando anche quanto i bambini, ormai più maturi dal punto di vista linguistico e della comprensione, si ricordano del lavoro più semplice svolto in prima.

Concludiamo con un'attività svolta nella scuola dell'infanzia con bambini di 5 anni, dedicata agli antichi agrimensori e alle origini dei concetti di linea retta, di punti come estremi della linea e di poligono. La tirocinante ha lavorato nel giardino e successivamente sulla rappresentazione 2D attraverso il disegno. L'attività in giardino (Figura 9) è stata introdotta dalla lettura di un passaggio del libro della scrittrice italiana Anna Cerasoli *Mr. Quadrato*, dove si parafrasa il frammento di Erodoto sulle origini della geometria, ma i bambini non riuscivano a seguirlo (il libro si rivolge a ragazzi delle scuole secondarie di primo grado). In seguito l'attività è stata ripetuta più volte usando la lettura di un libro pubblicato quello stesso anno dall'autrice, *La geometria del faraone* (2013) e i bambini hanno partecipato attivamente alla costruzione di poligoni con le corde, come avevano ascoltato fare nella storia.

Figura 9 – Piccoli agrimensori con corde e paletti nella scuola dell'infanzia: lati e vertici dei poligoni. Si osservi come gli estremi delle corde tese, tenute fisicamente dai bambini, permettono di identificare i vertici di triangolo e quadrilatero nel disegno. Il quadrilatero è decomposto in cinque quadrilateri

3. Storia e racconto nella letteratura matematica per l'infanzia

Nel corso dello studio pratico che abbiamo presentato nel paragrafo precedente, la riflessione teorica sulla metodologia didattica e sulla scelta degli argomenti storici si è avvalsa dell'analisi della letteratura per l'infanzia di argomento storico-matematico di ieri e oggi. Abbiamo già menzionato i singoli lavori di Schmandt Besserat e Giusti, e dei libri di due autrici italiane di letteratura per l'infanzia, Cerasoli e Petti. Un significativo riscontro è stato offerto dall'analisi di uno storico libro illustrato di letteratura per l'infanzia, pubblicato cento anni fa dallo studioso statunitense David Eugene Smith (1860-1944), *Number stories of time ago* (1919, fig. 10)[22]. Smith, docente al College of Education della Columbia University, ebbe un ruolo cruciale nella formazione degli insegnanti di matematica negli Stati Uniti, e scrisse libri di testo per le scuole, senza disdegnare gli allievi più piccoli, cui è rivolto un libro anch'esso con interessanti illustrazioni: *Work and play with number* (1912). Inoltre, Smith fu uno storico della matematica e raccolse nell'arco della sua vita un'ampia biblioteca di testi matematici antichi e medievali. Egli appartiene all'età dell'oro della storiografia della matematica, come l'ha definita Ivor Grattan Guinness (1994, vol. II, p. 1667), caratterizzata da un ampio lavoro sulle fonti cui lo statunitense diede un notevole contributo. Il libro sceglie, come nei libri che abbiamo citato, una forma di racconto e narra la storia dei numeri attraverso personaggi-ragazzi che incarnano epoche, luoghi e lingue diverse: Ahmed, Daniel, Titus...



CHAPTER III

HOW HIPPIAS AND DANIEL AND TITUS WROTE THEIR NUMBERS

"What is the story to-night?" asked the Tease as she came into the long room and stood before the fire, while the Crowd drew up the chairs.

"Story? Who said there was to be any story at all?" asked he of the curious book as he turned a new page.

"We always have a story," replied the Tease. "We have n't missed a single evening since we began."

"But we began only two nights ago."

"Yes, and this will make the third story," said George.

"But we must stop sometime," replied the Story-Teller, "and this is a good place."

23

Figura 10 – Una pagina di Number stories of long ago (1919) di D. E. Smith

[22] I materiali del libro sono alla base di un'opera successiva rivolta a tutti, *Number and numerals: a story book for young and old* (1937).

La sua opera fu uno dei frutti più sorprendenti di una vera e propria età dell'oro della letteratura di matematica per l'infanzia fra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, che in vario modo si allontanò dal tono severo delle aritmetiche scolastiche (Millán Gasca, 2015, 2016, 2017, Denniss, 2009). Questa produzione letteraria fu frutto del revival in Europa e negli Stati Uniti delle idee di Johann Pestalozzi (1746-1827) e dell'incontro fra la fiducia nella scienza trionfante e la fase più matura della scoperta dell'infanzia. Il libro di Smith si distingue per il ricorso alla storia della matematica: l'autore statunitense cercò di riversare le nuove conoscenze frutto della ricerca in storia della matematica in un racconto a sfondo storico. Il racconto poteva contribuire ad agevolare l'incontro con i simboli numerici, e aveva un valore culturale oltre l'alfabetizzazione, perché svelava ai ragazzi la presenza della matematica nella storia e in luoghi e epoche diversi del mondo.

Il libro si accostava a un'esperienza infantile della quale poco si era parlato fino ad allora, se non proprio negli scritti di Pestalozzi, ossia l'incontro con la scrittura e con la lettura: cosa pensano, come vivono i bambini questo contatto per nulla spontaneo cui sono destinati? Il pedagogista svizzero aveva evocato la fatica manuale e motoria della piccola mano che incide i segni; Smith propose le sue storie di numeri per dare spazio e possibilità di elaborazione alla sorpresa di fronte all'esistenza stessa delle cifre, attraverso le notizie sulla loro storia e sulla loro varietà; similmente a quello che aveva fatto Rudyard Kipling (1865-1936) per le lettere dell'alfabeto, in questo caso attraverso i racconti di pura fantasia per la figlia Effie e altri bambini, le *Storie proprio così (Just so stories for little children*, 1902). Il libro di Smith è un racconto, eppure ogni capitolo è corredato da piccoli problemi matematici legati ai vari modi di scrivere i numeri e di calcolare.

I personaggi e la narrazione, le illustrazioni, l'umorismo e una vivacità che addolcisce gli aspetti che richiedono uno sforzo per essere compresi, sono elementi comuni ai libri di storia della matematica per bambini citati nel paragrafo 2 e ai libri scritti cento anni fa da Kipling e da Smith. Le stesse risorse stilistiche e comunicative di un classico della storia per ragazzi, *Eine kurze Weltgeschichte für junge Leser* (1936) di Ernst H. Gombrich (2012, pp. 21-22, 24, 32):

> Tutte le storie incominciano con "C'era una volta". E la nostra storia vuole raccontare proprio questo: che cosa c'era una volta. Una volta eri piccolo, e anche quando stavi in piedi raggiungevi appena con la tua mano quella della mamma. Te ne ricordi? [...] E una volta eri ancora più piccolo, e portavi i pannolini, ma di quello non ti puoi ricordare. Pero sai che è così [...] È come un pozzo senza fondo! Se ci guardi dentro cercando di vederne la fine, ti verranno le vertigini. Come vengono a me [...] Ci sono dei luoghi in cui vengono conservate solo vecchie lettere e foglietti che sono stati scritti una volta. Quei luoghi si chiamano archivi. [...] Se poi ci chiediamo anche: Ma come sono andate di preciso le cose?, ecco che vorremo conoscere la storia. [...] Quando parliamo, o mangiamo il pane o usiamo un utensile o ci scaldiamo al fuoco, dovremmo ricordarci con gratitudine degli uomini preistorici, i più grandi inventori di tutti i tempi.

Nella letteratura per l'infanzia di argomento matematico di ieri e oggi, e anche nei libri che includono la storia della matematica, ricorre l'immagine di un bambino – anche molto piccolo – lettore o interlocutore di vivaci dialoghi ed esperienze che destano la mente aprendola al mondo. Vi è un'attenzione all'incontro fra bambini e matematica per cercare di rendere più piacevole o facile l'alfabetizzazione numerica; nel contempo, si guarda oltre il puro addestramento al calcolo, poiché i numeri e la matematica sono una palestra del pensiero, della maturazione e dell'entrare nel mondo dei più piccoli. Non si tratta quindi di libri destinati esclusivamente ad addestrare senza fatica e in modo giocoso, bensì sono soprattutto libri che si rivolgono a lettori attenti e curiosi, raccontando e scoprendo loro il mondo e il sapere, avvicinandosi al loro sentire.

Nella seconda metà del Novecento, gli sforzi di rinnovamento e miglioramento dell'istruzione matematica infantile hanno seguito vie molto diverse dalla narrazione, la storia o lo scherzo. Ci si è concentrati sulle basi della conoscenza matematica da un punto di vista soprattutto logico-concettuale (si parlava infatti di "fondamenti", anche per la formazione degli insegnanti), quasi a voler ricostruire la conoscenza dei più giovani facendo tabula rasa delle loro concezioni intuitive sviluppate nel corso dello sviluppo, attraverso la loro consuetudine con le cose, il corpo, il movimento e la loro progressiva competenza linguistica. Di fronte all'immagine che gli esperimenti della psicologia sembravano offrire di un bambino illogico, incapace di ragionamento, certamente non soltanto la fantasia, ma anche la storia potevano apparire improponibili per avvicinare i più piccoli alla matematica e al pensiero scientifico. L'errore non poteva essere oggetto di scherzo, ma piuttosto qualcosa da temere e da scongiurare.

Una critica vibrante di questa impostazione fu scritta nel 1964 dal matematico italiano Bruno Di Finetti, celebre per i suoi contributi alla teoria della probabilità:

Si dovrebbe fare tabula rasa di ciò perché non è abbastanza scientifico o abbastanza filosofico secondo le predilezioni di certi specialisti; in base alle loro convinzioni si dovrebbe fargli riimparare in modo puramente razionale e colla preoccupazione del più pedante rigore con grande spreco di tempo una piccola parte di ciò che già avevano acquisito, travestendola poi in modo che ne perda la visione ed il gusto. Così si atrofizza e distorce l'intelligenza che si dovrebbe sviluppare; resta, infatti, da una parte, il nucleo di conoscenze intuitive di cui uno deve servirsi, ma su cui l'insegnamento ha steso un velo di diffidenza, e dall'altra rimangono residui più o meno indigeriti e indigeribili di astruserie o mattoni o pillole propinati controvoglia e senza persuasione.

Qualcosa di molto simile è avvenuto per quanto riguarda la conoscenza storica, come è stato osservato acutamente da Kieran Egan (Egan, 1983a, pp.13-14):

potremmo accettare la conclusione generale della psicologia secondo la quale i bambini piccoli non hanno il concetto della causalità storica, ma possiamo vedere che chiaramente essi hanno un concetto del tipo di causalità che tiene insieme le storie e le fa evolvere; potrebbero non avere un senso della cronologia storica, ma capiscono chiaramente "prima" e "dopo", e "molto, molto tempo fa" e "poco dopo" e così via; potrebbero non avere un senso astratto della monarchia o degli elementi che interagiscono nelle strutture politiche, ma capiscono chiaramente la potenza e la debolezza, l'oppressione, il risentimento e la rivolta, l'ambizione e la punizione; e potrebbero mancare di nozioni sofisticate di comportamento politico costruttivo o distruttivo, ma senz'altro capiscono bene e male. [...] che una cosa raggiunga un pieno significato richiede una maturità educativa; lo scopo del processo educativo è riempire gradualmente di significato i concetti. I gradi della comprensione sono infiniti, e la complessità del modo in cui apprendiamo una materia è infinitamente complicata.

Nell'introduzione della storia della matematica sotto forma di racconto nella didattica con bambini abbiamo visto all'opera – in ogni classe dove è stata proposta – le idee intuitive degli alunni. Centrale in questa alleanza è la *mimesis*, il cui valore paideutico o educativo è stato sottolineato da Gilberto Scaramuzzo (2011, 2016) a partire dalla rilettura della *Poetica* di Aristotele, il quale si riferisce esplicitamente alla fanciullezza (Poetica, 4, 1448b):

L'attività mimesica è un istinto di natura comune a tutti gli uomini fin dalla fanciullezza [...] le sue prime conoscenze l'uomo le acquista per via di mimesi [...]

È ancora illuminante al riguardo la celebre distinzione fra storia e poesia (*Poetica* 9, 1451b):

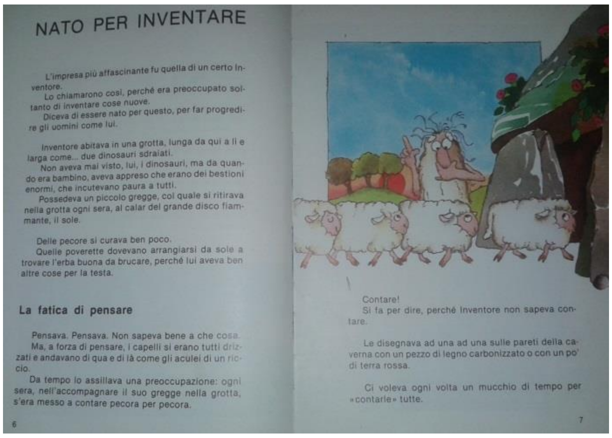
lo storico descrive fatti realmente accaduti, il poeta fatti che possono accadere. Perciò la poesia è qualche cosa di più filosofico e di più elevato della storia; la poesia tende piuttosto a rappresentare l'universale, la storia il particolare.

Vi è una questione di fondo che riguarda, da una parte, *il rapporto tra storia e racconto*, tra testimonianze storiche (fonti) e fantasia (come in ogni romanzo storico per adulti d'altra parte); dall'altra, *il concetto stesso di verità o di autenticità*, come percorso di avvicinamento, come ricerca più che come fatto dato una volta per tutti.

"La matematica mi piace perché dice sempre la verità", ha scritto una bambina alla sua maestra-tirocinante alla fine della classe prima (De Castro, 2009). Tocchiamo qui con mano la questione della conoscenza, cruciale nel risveglio della coscienza nei bambini che avviene con il contributo della scolarizzazione. La storia della matematica propone così, sorprendentemente, temi affascinanti (gli antichi agrimensori, i commercianti arabi, i sapienti greci, i sognatori della rivoluzione scientifica e così via ...) per il bambino filosofo, come lo ha descritto Alison Gopnik, *The philosophical baby. What childrens's minds tell us about truth, love, and the meaning of life* (2009, pp. 34-35) che esplora il pensiero controfattuale dei "mondi possibili", unendo la storia, il presente e il futuro:

Secondo la saggezza popolare, conoscenza e immaginazione, scienza e fantasia non sono solo profondamente diverse, ma anche in contrasto. Secondo le nuove idee [...] invece, le stesse abilità che garantiscono ai bambini un apprendimento così consistente, consentono loro anche di cambiare la realtà – di far nascere nuove ipotesi e di immaginare mondi alternativi che magari non sono mai esistiti.

Mondi mai esistiti che ci parlano però della verità si possono ritrovare nella *Aritmetica cavernicola* di Ermes Rigon, illustrata da Vittorio Sedini e pubblicato dall'editore La Scuola nel 1981 (tre edizioni): "Mosso dall'esigenza di rendere affascinante l'apprendimento dei primi elementi di aritmetica, l'autore ha voluto percorrere il cammino dell'uomo attraverso il tempo, ambientandolo nella preistoria, che affascina tutti".



NATO PER INVENTARE

L'impresa più affascinante fu quella di un certo Inventore.

Lo chiamarono così, perché era preoccupato soltanto di inventare cose nuove.

Diceva di essere nato per questo, per far progredire gli uomini come lui.

Inventore abitava in una grotta, lunga da qui a lì e larga come... due dinosauri sdraiati.

Non aveva mai visto, lui, i dinosauri, ma da quando era bambino, aveva appreso che erano dei bestioni enormi, che incutevano paura a tutti.

Possedeva un piccolo gregge, col quale si ritirava nella grotta ogni sera, al calar del grande disco fiammante, il sole.

Delle pecore si curava ben poco.

Quelle poverette dovevano arrangiarsi da sole a trovare l'erba buona da brucare, perché lui aveva ben altre cose per la testa.

La fatica di pensare

Pensava. Pensava. Non sapeva bene a che cosa.

Ma, a forza di pensare, i capelli si erano tutti drizzati e andavano di qua e di là come gli aculei di un riccio.

Da tempo lo assillava una preoccupazione: ogni sera, nell'accompagnare il suo gregge nella grotta, s'era messo a contare pecora per pecora.

6

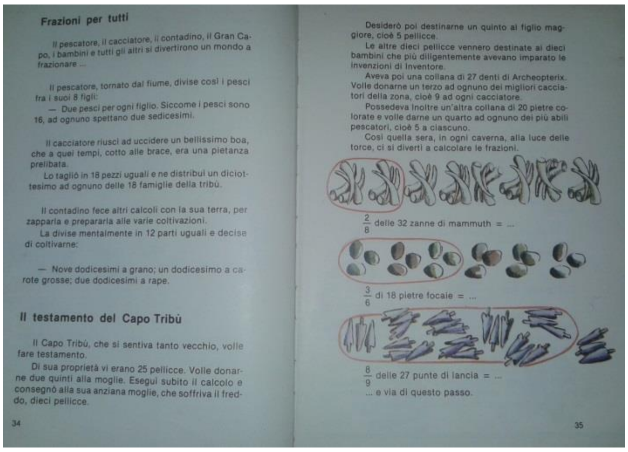
Contare!

Si fa per dire, perché Inventore non sapeva contare.

Le disegnava ad una ad una sulle pareti della caverna con un pezzo di legno carbonizzato o con un po' di terra rossa.

Ci voleva ogni volta un mucchio di tempo per «contarle» tutte.

7



Frazioni per tutti

Il pescatore, il cacciatore, il contadino, il Gran Capo, i bambini e tutti gli altri si divertirono un mondo a frazionare ...

Il pescatore, tornato dal fiume, divise così i pesci fra i suoi 8 figli:

— Due pesci per ogni figlio. Siccome i pesci sono 16, ad ognuno spettano due sedicesimi.

Il cacciatore riuscì ad uccidere un bellissimo boa, che a quei tempi, cotto alle brace, era una pietanza prelibata.

Lo tagliò in 18 pezzi uguali e ne distribuì un diciottesimo ad ognuno delle 18 famiglie della tribù.

Il contadino fece altri calcoli con la sua terra, per zapparla e prepararla alle varie coltivazioni.

La divise mentalmente in 12 parti uguali e decise di coltivarne:

— Nove dodicesimi a grano; un dodicesimo a carote grosse; due dodicesimi a rape.

Il testamento del Capo Tribù

Il Capo Tribù, che si sentiva tanto vecchio, volle fare testamento.

Di sua proprietà vi erano 25 pellicce. Volle donarne due quinti alla moglie. Eseguì subito il calcolo e consegnò alla sua anziana moglie, che soffriva il freddo, dieci pellicce.

34

Desiderò poi destinarne un quinto al figlio maggiore, cioè 5 pellicce.

Le altre dieci pellicce vennero destinate ai dieci bambini che più diligentemente avevano imparato le invenzioni di Inventore.

Aveva poi una collana di 27 denti di Archeopterix. Volle donarne un terzo ad ognuno dei migliori cacciatori della zona, cioè 9 ad ogni cacciatore.

Possedeva inoltre un'altra collana di 20 pietre colorate e volle darne un quarto ad ognuno dei più abili pescatori, cioè 5 a ciascuno.

Così quella sera, in ogni caverna, alla luce delle torce, ci si divertì a calcolare le frazioni.

$\frac{2}{8}$ delle 32 zanne di mammuth = ...

$\frac{3}{6}$ di 18 pietre focaie = ...

$\frac{8}{9}$ delle 27 punte di lancia = ...

... e via di questo passo.

35

Figura 11 – Aritmetica cavernicola di Ermes Rigon

Nei racconti che abbiamo citato di Cerasoli e nei libri per bambini che si ispirano alla storia, si cerca la verosimiglianza, mentre nel libro di Schmandt Besserat (ma anche nel libro di Cerasoli *Tutti in festa con pi greco*) si presenta un racconto storico dove non vi sono più personaggi inventati, e ci si avvicina alla alta divulgazione della storia. La componente di *mimesis* che nelle storie per bambini è legata a fatti immaginari, anche se verosimili, può maturare con il passare degli anni, mantenendo intatta negli allievi una doppia capacità di discernere (*ratio*) e di immedesimarsi (*mimesis*), per l'avvicinamento alla storia dell'umanità, come pure alla letteratura o alla geografia. Come ha scritto Margaret Donaldson nel suo saggio *Children's minds* (1978), la capacità di ragionare in maniera deduttiva si palesa nei bambini nel loro comportamento spontaneo con grande chiarezza nei commenti e domande che fanno quando ascoltano un racconto. Accostare *mimesis* e storia alla matematica, contribuisce a reinserire, da parte dei piccoli allievi, la matematica (e il pensiero scientifico) nella matrice umanistica, restituendo i processi di calcolo e di misura alla cultura.

4. Valore pedagogico e nodi didattici della storia della matematica in classe

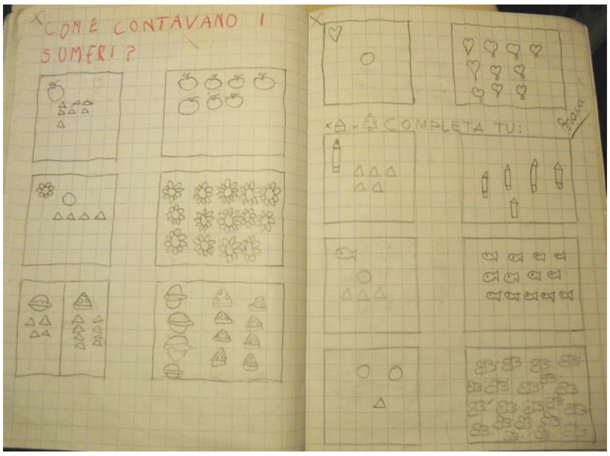
La storia della matematica è una delle vie attraverso le quali l'esplorazione di concetti molto astratti come quelli dell'aritmetica, della geometria, della probabilità – cui non si vuole rinunciare – diventano semplici e concreti, non perché svuotati dalla loro astrazioni, bensì perché si ancorano alla prossimità della vita (per dirla con Donaldson) o perché acquisiscono significato, esistenza nell'universo mentale dei piccoli alunni (per dirla con René Thom). Si comprende come non si possa rinunciare alla *mimesis* per insegnare matematica, ma nel contempo la storia aggiunge un elemento di tensione, e potenzia il valore pedagogico dell'esperienza dei bambini.

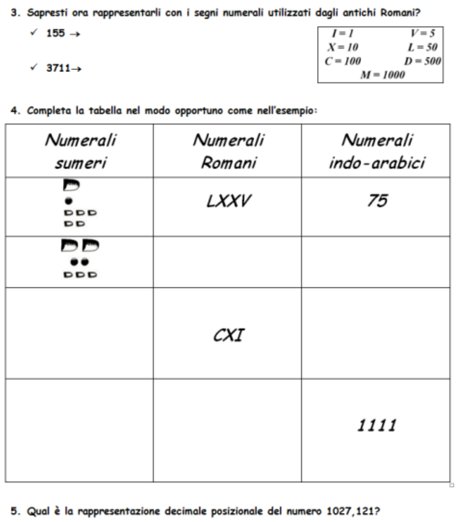
La storia della matematica si ripropone quindi con un *molteplice valore pedagogico*:

1) essa contribuisce a presentare ai bambini la matematica come disciplina, a dar conto della sua presenza a scuola fin dall'inizio della scuola primaria (o ancor prima), integrando le attività su "la matematica intorno a noi" e chiarendo progressivamente il collegamento fra ciò che si fa a scuola e la propria ambizione di sapere e di crescere.

2) essa contribuisce alla comprensione di alcuni argomenti cruciali di matematica, fra cui i concetti primordiali della geometria e dell'aritmetica; di conseguenza è del tutto naturale che il racconto sia corredato da esercizi e problemi veri e propri di matematica (fig. 12).

3) inoltre, in particolare nelle prime classi, il racconto storico tocca profondamente l'esperienza personale dei bambini nel loro primo approccio alla matematica scolastica; facendo sentir loro che le vicende delle invenzioni numeriche e geometriche hanno a che fare con le loro intime riflessioni sia sulle proprie difficoltà e dubbi, che sulle loro intuizioni. Anche i protagonisti di questi racconti si sono trovati in difficoltà nel ricordare il numero-cardinalità contando durante episodi della vita quotidiana; oppure non hanno saputo come "segnarsi il numero" (proprio come succede a Bubal nel racconto prima menzionato): anche loro si sono posti gli stessi problemi dei piccoli di oggi.





3. Sapresti ora rappresentarli con i segni numerali utilizzati dagli antichi Romani?
   - ✓ 155 →
   - ✓ 3711→

I = 1 *V = 5*
X = 10 *L = 50*
C = 100 *D = 500*
M = 1000

4. Completa la tabella nel modo opportuno come nell'esempio:

Numerali sumeri	*Numerali Romani*	*Numerali indo-arabici*
	LXXV	75
	CXI	
		1111

5. Qual è la rappresentazione decimale posizionale del numero 1027,121?

Figura 12 – Esercizi di storia della matematica sulla numerazione: a) nella prima classe (foto di E. Spagnoletti Zeuli); b) in quinta (Pagliaroli, 2010)

Quattro aspetti didattici sono emersi dal nostro studio per quanto riguarda *il ricorso al racconto* per parlare di storia della matematica:

1) il racconto a sua volta deve scegliere parole, esempi, stile diverso a seconda dell'età dei bambini: ciò è coerente con lo studio dei contenuti propriamente matematici, ai quali si può ritornare in una struttura ciclica, accompagnando la maturazione dei bambini dai 4-5 ai 10-11 anni;

2) il racconto di storie di fantasia con contenuto matematico e la narrazione storica valorizzano e incoraggiano la *mimesis* come forza di apprendimento nella prima infanzia.

3) la storia "romanzata" cattura i bambini se poggia su una conoscenza confermata dalla ricerca storica. Ad esempio, nelle esperienze con il racconto *Awa insegna a contare*, i bambini di 6 anni chiedono non di rado alla maestra la domanda cruciale: maestra, ma è vero? E' avvenuto proprio così?

4) vi è una evoluzione verso una consapevolezza storica maggiore, ma ogni tassello si ricompone e arricchisce il bagaglio di conoscenze. Ad esempio, parlando delle origini della probabilità in una classe quarta, è stato menzionato il matematico del Cinquecento Gerolamo Cardano. Un alunno è intervenuto nella spiegazione chiedendo se Cardano fosse anche l'inventore della macchina da scrivere. L'insegnante è rimasta stupita e, ha detto che si sarebbe documentata: è seguita dunque, nella lezione successiva, qualche spiegazione sulle invenzioni dell'Ottocento![23].

Nell'introduzione del racconto e della storia, quindi, è fondamentale il ruolo dell'insegnante che incarna questa trasmissione di idee che avviene per forza di cose con gradualità. Proprio ricordando come Platone nelle *Leggi* propone la matematica per i bambini ben oltre l'insegnamento del calcolo, Werner Jaeger, scrive: "è da attribuire a questo suo dominio su tutti i gradi del sapere il fatto che la matematica abbia fatto più presto di ogni altra scienza a compenetrarsi della necessità pedagogica di impartire le proprie nozioni secondo gradi diversi di apprendibilità conformi ai vari gradi dell'istruzione, senza sacrificare in nulla l'esattezza del suo metodo".

Infine, una breve riflessione per quanto riguarda il ruolo che la storia della matematica (e quindi della scienza) può avere nell'insegnamento della storia, e sul raccordo delle conoscenze di storia della matematica e della scienza con il resto delle conoscenze storiche. La scienza e la tecnica trovano spazio nei manuali di storia dei vari gradi scolastici soltanto in alcuni momenti, come la Rivoluzione scientifica in età moderna o quella industriale in età contemporanea; appare inevitabile che lo spazio aumenti nel futuro, considerando il ruolo onnipresente delle scienze e delle tecniche nel mondo attuale, e anche qui molto dipenderà dalla formazione degli insegnanti di storia. È necessario che vi sia un raccordo, una coerenza fra gli elementi di storia della matematica proposti ai bambini e ciò che apprendono di storia? E ancora: è necessario rispettare un andamento cronologico negli elementi di storia della matematica pro-

[23] Testimonianza dell'insegnante Emanuela Spagnoletti Zeuli in una classe quinta, durante il tirocinio presso l' Istituto Comprensivo "E.Q. Visconti" di Roma, nell'anno scolastico 2007-2008.

posti ai bambini nelle diverse classi? La sperimentazione condotta ci induce a pensare che le conoscenze di storia della matematica possono avere un influsso positivo sull'apprendimento della storia, in quanto abbiamo avuto un riscontro della visione di Egan (1983b). Questo autore prospetta per l'insegnamento della storia un ampliamento graduale del bagaglio di concetti, di capacità e di conoscenze verso una consapevolezza storica sempre più evoluta; e osserva che in quella più sofisticata, vi sono tracce di coinvolgimento con la storia di una natura molto diversa (immaginazione, empatia e coinvolgimento affettivo, senso morale, riflessione filosofica sui processi storici generali, affinamento del pensiero causale sotto varie forme, curiosità per i dettagli materiali del passato, identificazione con eroi e personaggi...). Abbiamo visto all'opera, nei bambini più piccoli, attraverso le storie, il coinvolgimento che Egan chiama "mitico", in cui si vedono all'opera le forze opposte dell'ignoranza e del sapere, della paura e della libertà... il confine fra fantasia e realtà non preoccupa più di tanto gli alunni. Nei più grandi l'approccio era quello che egli chiama "romantico" e di esplorazione dei confini del reale e della plausibilità. A questo riguardo, il pedagogista britannico considera auspicabile che il curricolo storico possa essere composto di singoli *unità* – *capsule* storiche scelte (Egan, 1983b, pp-76-77):

> Le unità possono essere in forma di capsule; ciò che è avvenuto prima e ciò che avvenne dopo non ha molta importanza. Ciò che conta è che il materiale particolare sia vero, esemplifichi le qualità umane in extremis, abbia una forte linea narrativa, permetta l'esplorazione di qualcosa in gran dettaglio, e introduca elementi il più possibile diversi dalla loro esperienza quotidiana. Si può insegnare, in questo stadio, a comprendere un senso narrativo di causalità relativamente sofisticato.

Nella nostra proposta si scelgono capsule di storia della matematica perché esse potenziano la comprensione della matematica stessa; si noti che la storia crea una *distanza* dalla realtà vicina agli alunni, e quindi è un complemento delle attività che si rivolgono invece a ritrovare la matematica nel proprio mondo, con esempi e problemi. Inoltre, nell'ottica di Egan, quelle capsule andranno ad aggiungersi a un processo di accumulazione, che porta progressivamente a trovare attraverso episodi e aspetti ("bright bits and pieces", scrive) la rete di processi causali che lo studio della storia prospetta. Con i più piccoli, quando la linea cronologica non offre ancora lo sfondo complessivo, l'insegnante governa il collegamento fra i vari frammenti di storia; con i ragazzi più grandi, invece, la cronologia sostiene il discorso più maturo, e l'insegnante si può rivolgere ad aspetti come il collegamento fra grandi schemi interpretativi, i fatti e le fonti.

Proporre ai bambini un approccio storico-antropologico ha radicali implicazioni pedagogiche, poiché significa considerare l'istruzione matematica infantile qualcosa di diverso dalla pura alfabetizzazione numerica, contrasta la visione dell'istruzione matematica infantile come acquisizione di destrezze, principalmente di calcolo e di ragionamento su problemi elementari che ruotano attorno alle operazioni, alla misura e alla proporzionalità, accentuando il ruolo formativo della matematica nel senso classico (*paideia*). Questo processo contribuisce a superare il divario fra istruzione letteraria e istruzione scientifica che inizia fin dalla prima infanzia: da una parte, le *parole*, l'espressione e la storia (l'essere umano); dall'altra, i calcoli e le misure, l'osservazione fredda e spersonalizzata delle *cose* (la natura e la razionalità). Dal punto di vista dell'efficacia didattica, esso non è in conflitto con altre vie quali gli esempi della vita quotidiana, l'uso di materiali concreti, le illustrazioni nei libri di testo, la grafica e l'organizzazione del materiale (ad esempio la sequenza di esercizi).

Tale approccio chiama in causa la formazione pre-servizio degli insegnanti di scuola primaria, che non di rado è incentrata sugli accorgimenti didattici e sul superamento di eventuali difficoltà degli alunni, e non sulla conoscenza da un punto di vista superiore della matematica stessa, inclusi gli aspetti storici ed epistemologici.

5. Un sentiero nella storia della matematica dalla classe prima alla classe quinta

I libri infantili che contengono elementi di storia della matematica, in Italia e in altri paesi, considerano essenzialmente il periodo antico e medievale, con particolare riguardo per la storia della numerazione. Tuttavia, la domanda che ci siamo posti nel corso dello studio, soprattutto per quanto riguarda le ultime due classi della scuola primaria, è: si può studiare matematica fino ai 10 anni, senza nessuna riflessione sulla trasformazione della matematica nell'Europa moderna a partire dalla Rivoluzione scientifica e l'Illuminismo?

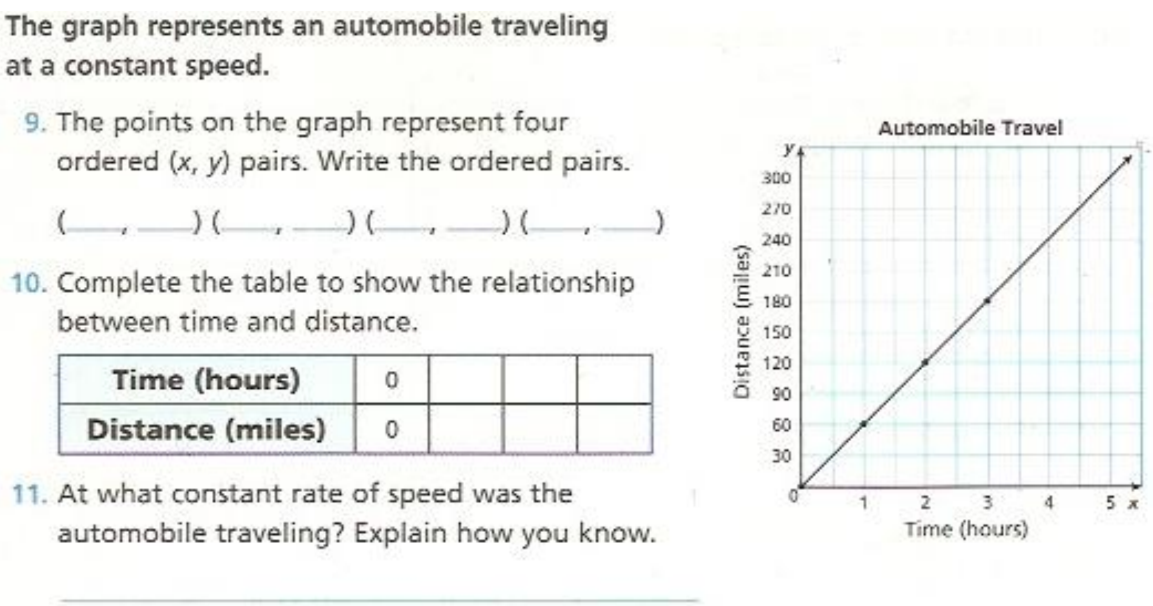
A questo riguardo, abbiamo identificato alcune questioni cruciali sulle quali regna la confusione nei sussidiari e nella prassi scolastica italiana, che riguardano le basi del pensiero scientifico e il ruolo della matematica nella scienza: vengono proposti ai bambini "ricostruzioni" prive di autenticità e basi nello stato delle conoscenze in storia della scienza.

Il primo punto è la *misura*. Si propone ai bambini un'opposizione fra unità di misura convenzionali e arbitrarie, come se potesse esistere una unità di misura non convenzionale! Nei testi sumeri protocuneiformi vediamo già simboli numerici che si riferiscono a complessi sistemi di unità di misura per le lunghezza e le capacità. Le differenze regionali e locali, l'uso di parole uguali per indicare unità diverse in luoghi anche vicini non elimina il carattere convenzionale delle unità, alle quali necessariamente si applica, per misurare, il concetto geometrico di rapporto (fra lunghezze, aree, capacità, intervalli di tempo e così via), ottenendo così dei numeri. Il bambino che conta i passi per arrivare a qualche punto sta già unendo la geometria e l'aritmetica e quindi sta misurando. L'idea di un sistema metrico decimale, peraltro mai completamente impostosi a livello internazionale, è un progetto culturale dell'Illuminismo (Borgato, 2006) che può essere spiegato ai bambini delle ultime due classi: esso permette di comprendere molti aspetti del ruolo crescente della scienza nella modernità, e nel contempo contribuire a comprendere meglio la misura e a destreggiarsi con le unità di misura, fornendo un ancoraggio culturale a una parte importante dell'alfabetizzazione numerica.

Il secondo punto è la presentazione stessa del *metodo scientifico*, che è per lo più dogmatica, ed esclude quasi completamente dal quadro il ruolo della matematica, concentrandosi sull'osservazione e l'esperimento. Eppure non è difficile trovare esempi nelle scienze naturali che rendono possibile parlare di rapporti, di proporzionalità e avviare ai primi grafici di andamento lineare nelle relazioni fra variabili (si pensi alla densità o alla velocità, a partire da grandezze come distanza, volume, tempo, massa).

Come ha scritto Laurent Lafforgue (2007):

> Al termine del percorso della scuola primaria, gli alunni devono padroneggiare con facilità, precisione e sicurezza le operazioni elementari sui numeri e sulle grandezze, e la manipolazione delle unità di misura; devono anche essere in grado di redigere in modo sintetico e rigoroso la soluzione di problemi di calcolo formulati nella lingua corrente, ispirati dalla vita pratica, dalle scienze naturali alla meccanica, e che necessitino di un ragionamento di natura discorsiva.



The graph represents an automobile traveling at a constant speed.

9. The points on the graph represent four ordered (*x*, *y*) pairs. Write the ordered pairs.

(___, ___) (___, ___) (___, ___) (___, ___)

10. Complete the table to show the relationship between time and distance.

Time (hours)	0			
Distance (miles)	0			

11. At what constant rate of speed was the automobile traveling? Explain how you know.

Figura 13 – Un grafico e una tavola di valori in un semplice esempio di moto, esercizio tratto dal sussidiario Math Expressions Common core (2013) di Karen Fuson, Grade 5, vol. 2, p. 230, editore Houghton Mifflin, Boston (USA)

Questi esempi possono acquisire un significato maggiore se accompagnati dal racconto storico sulle origini della scienza moderna. Un discorso simile si può fare per l'avvicinamento alla computazione e l'informatica (Millán Gasca 2016, pp. 253-255).

Concludiamo la nostra riflessione con una proposta di temi di storia della matematica che costituiscono un percorso di apprendimento in cinque anni di scuola primaria, a partire dai 6 anni.

Nella tabella finale proponiamo una scansione di temi, senza alcuna pretesa di rigidità, che può orientare l'insegnante nella progettazione delle lezioni. Dal punto di vista pratico, è soggetta ad adattamento in singole classi e situazioni, e in particolare a paesi diversi; e, dal punto di vista teorico, è una proposta soggetta a ulteriore studio e modifica. Per quanto riguarda la pratica, la presentazione di questa tabella non significa che sia necessario iniziare il percorso in classe prima oppure rinunciare del tutto: se in classe quinta un gruppo di alunni non ha mai sentito parlare di storia della matematica, l'insegnante sceglierà fra tutto il materiale.

Come in ogni percorso di apprendimento, i temi elencati per ogni classe si intendono come *focus* di quel livello; tuttavia, le questioni indicate possono essere accennate nelle prime classi e poi riprese in classi successive. Ad esempio, abbiamo suggerito di considerare la numerazione sumera in classe prima; tuttavia, anche se essa non è più menzionata come focus nella tabella, la numerazione sumera può essere riconsiderata più avanti in esercizi più avanzati, rappresentando numeri a quattro cifre o scrivendo la decomposizione con una espressione aritmetica con quattro o più addendi (applicando un principio di gradualità, come sostiene Lafforgue). Viceversa, abbiamo suggerito di considerare la storia del sistema di numerazione indo-arabico in classe seconda, ma è del tutto naturale accennare agli "scopritori" delle cifre senza soffermarsi sulla storia, in classe prima, poiché i bambini apprendono in prima a usare le cifre.

Il percorso si divide, a grandi linee, in *due fasi*:

– nelle classi prima e seconda (6-7 anni), i temi riguardano il calcolo e la misura, le origini e il mondo antico e medievale; le strategia didattiche sono il racconto e gli esempi realizzati con materiali e sul quaderno, in piccoli esercizi; il contesto storico è tratteggiato in modo semplice e concreto. Nei primi due anni si tratta di vedere la matematica in un contesto dove hanno spazio le emozioni e le forme più precoci di ricerca di significato e di spiegazione delle cose in modo causale-narrativo (la matematica come qualcosa che bisogna sapere e che è importante nel mondo).

– nelle classi terza, quarta e quinta (8-9-10 anni), i temi riguardano la matematica e il pensiero scientifico, i fondatori greci, la nascita della scienza moderna e il razionalismo scientifico dell'Illuminismo. Di nuovo qui la strategia didattica è il racconto, che si evolve progressivamente per far conoscere agli alunni le fonti della conoscenza storica e per collocare i singoli nomi o esempi in una cornice cronologica semplice ma precisa. Negli ultimi tre anni, l'approccio di questo percorso è *interculturale*, ossia volto a mettere in evidenza il valore antropologico delle idee matematiche, ma anche *storico*, ossia volto a trasmettere ai bambini l'esistenza di un'evoluzione storica attraverso i secoli, con alcuni grandi momenti di svolta e grandi invenzioni. Tuttavia, come abbiamo detto, l'accento è posto meno sulla cronologia e più sulla scelta di capsule coinvolgenti e portatrici di comprensione di questioni matematiche.

Classe	*Argomenti*	*Questioni matematiche collegate*
Prima	Preistoria: Le origini della numerazione parlata Numerali in altre lingue Preistoria: le origini della geometria (dar forma ai materiali, la rappresentazione simbolica sulle pareti delle caverne) Dalla preistoria all'invenzione della scrittura: Contrassegni e bullae Gli scribi sumeri	Origini del numero. Vocaboli numerali Origini del numero. Rappresentazione simbolica, scrittura. Origini delle idee geometriche: i solidi, le forme piane, le stelle, la simmetria e l'uguaglianza geometrica. I calcoli nel lavoro e nell'organizzazione sociale Simbolismo numerico, decomposizione dei numeri con la addizione.

Seconda	Matematica in Egitto – i numeri geroglifici – i tenditori delle corde Le misure degli antichi popoli d'Oriente: la lunghezza e le sue unità Gli indiani inventano la scrittura dei numeri che oggi usiamo I numeri in Cina e in America centrale Ipazia di Alessandria	I numeri e il mistero del mondo Simbolismo numerico, decomposizione dei numeri con l'addizione in base 10 Concetti primitivi della geometria: punto e retta. Poligoni e loro elementi Basi geometriche della misura (confronto > fra segmenti, congruenza di segmenti, somma di segmenti e doppio, triplo ecc. di un segmento) Simbolismo numerico, principio posizionale, base 10 Lo zero Calcoli e misure in altre parti del mondo, simbolismo numerico: basi 10 e 20 Donne e matematica
Prima e Seconda	La storia come racconto Piccoli elementi del contesto storico generale	
Terza	Il calendario e le età della storia Gli astronomi babilonesi I matematici greci: Pitagora Prima approssimazione all'invenzione del sistema metrico decimale	Numeri ordinali, i secoli come segmenti su un'asse cronologico Il mistero dei moti ciclici e i presagi La base 60 nella misura del tempo e delle ampiezze degli angoli Filosofia e matematica: la ricerca dei principi del mondo Il numero e l'enigma dell'universo. Numeri figurati. Trasformazioni cambiando le unità di misura e sistemi di misura di lunghezza diversi da quello decimale
Quarta	I numeri romani La matematica è nata nell'antica Grecia Il racconto di Erodoto Talete Il teorema di Pitagora Euclide e Archimede I matematici che scrivevano in arabo nei paesi dell'Islam Leonardo Fibonacci I matematici cinesi	Simbolismo numerico e decomposizione additiva Calcoli e misure nella tecnica La nostra idea di matematica I rapporti fra segmenti, fra angoli, fra figure piane, fra solidi Le uguaglianze fra aree, le prime equazioni Le dimostrazioni matematiche Il cerchio e pi greco, la diagonale del quadrato, i numeri primi
Quinta	La matematica nella nascita della scienza moderna in Europa Keplero, Galileo e Newton I giochi d'azzardo e la probabilità L'Illuminismo: Eulero Monge Le origini del sistema metrico decimale e altre unità di misura Dalle prime calcolatrici al computer moderno	L'elisse Proporzionalità La matematica e il progresso delle scienze e delle tecniche Le proiezioni delle figure solide Le basi geometriche della misura

6. Riferimenti bibliografici

Amato, E. (2010). *Come si scrivono i numeri? Un percorso attraverso la storia e i luoghi del mondo*, Relazione finale inedita in Scienze della Formazione Primaria. Roma: Università Roma Tre.

Borgato, M. T. (2006). *The first applications of the metric system in Italy*. The Global and the Local: The History of Science and the Cultural Integration of Europe. Proceedings of the 2nd ICESHS (Cracow, Poland, September 6-9, 2006). Ed. by M. Kokowski, pp. 430-437.

Cerasoli, A. (2010). *Sono il numero 1*. Milano: Feltrinelli.

Cerasoli, A. (2012). *La grande invenzione di Bubal*. San Dorligo della Valle: Emme Edizioni.

Cerasoli, A. (2013). *La geometria del faraone*. San Dorligo della Valle: Emme Edizioni.

Cerasoli, A. (2015). *Tutti in festa con pi greco*. Firenze/Trieste: Editoriale Scienza.

Chiachiararelli, A. (2018). *Dimmi come contavi e ti dirò chi eri. Piccoli passi di storia del pensiero matematico con i bambini*. Pubblicazioni online del Laboratorio di Matematica per la formazione primaria, http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/matematica_laboratorio.html

Colella, I. (2013). *Raccontiamo di matematica. Un viaggio nel mondo della matematica elementare attraverso storie e racconti*. Relazione finale inedita in Scienze della Formazione Primaria. Roma: Università Roma Tre.

De Castro, A. (2009). *L'incontro con la matematica in classe prima*. Relazione finale inedita in Scienze della Formazione Primaria, Roma, Università Roma Tre.

Denniss, J. (2009). Learning arithmetic: textbooks and their users in England 1500-1900. In E. Robson, & J. Stedall (Eds.). *The Oxford Handbook of the History of Mathematics* (pp. 448-467). Oxford: Oxford University Press.

Donaldson, M. (1978). *Children's minds*. London: Fontana Press (tr. it. *Come ragionano i bambini*, Milano: Springer Verlag Italia, 2010).

Egan, K. (1983a). *Education and psychology. Plato, Piaget and scientific psychology*. Abingdon: Routlege.

Egan, K. (1983b). Accumulating history. *History and Theory*, *22*(4), Beiheft 22: The philosophy of history teaching, 66-80.

Enriques, F.(1938). *La matematiche nella storia e nella cultura*. Bologna: Zanichelli.

Gil Clemente, E., & Millán Gasca A. (2016). Integrating history of mathematics with foundational contents in the education of prospective elementary teachers. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 427-440). Montpellier: IREM de Montpellier.

Giusti, E. (2011). *Awa insegna a contare*. Firenze: Il Giardino di Archimede.

Gombrich, E. (2012). *Breve storia del mondo*. Milano: Salani. (Originariamente pubblicato nel 1985)

Gopnik, A. (2010). *Il bambino filosofo*. Torino: Bollati Boringhieri.

Grattan-Guinness, I. (Ed.) (1994). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. London: Routledge.

Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, *43*, 19-58.

Israel G., & Millán Gasca, A.(2012). *Pensare in matematica*. Bologna: Zanichelli.

Israel, G. (2008). *Chi sono i nemici della scienza? Riflessioni su un disastro educativo e culturale e documenti di malascienza*. Torino: Lindau.

Israel, G. (2009). Nulla e zero tra matematica, filosofia e teologia. In B. D'Amore (cur.), *Matematica, stupore e poesia* (pp. 170-177), Firenze: Giunti.

Kipling, R. (2011). *Storie proprio così*. Milano: Adelphi.

Lafforgue, L. (2007). Le calcul à l'école primaire, preprint. Disponibile da www.ihes.fr/~lafforgue/education.html (tr. it. *Il calcolo nella scuola primaria* (2012), disponibile da www.mat.uniroma3.it/users/primaria/Lafforgue_Calcolo%20scuola%20primaria.pdf.

Love, D. A. (2006). *Of numbers and stars. The Story of Hypatia* (illustrazioni di Pam Paparone). New York: Holiday House.

Millán Gasca, A. (2011). Il ruolo della storia nell'insegnamento della matematica nella scuola primaria", *Convegno nazionale La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori*. Disponibile da http://php.math.unifi.it/convegnostoria/materiali/MillanGasca.pdf

Millán Gasca, A. (2015). Mathematics and children's minds: The role of geometry in the European tradition from Pestalozzi to Laisant. *Archives internationales d'histoire des sciences, 65*(2)-175, 261-277.

Millán Gasca, A. (2016). *Numeri e forme. Didattica della matematica con i bambini*. Bologna: Zanichelli.

Millán Gasca, A. (2017). Zoel García de Galdeano y las matemáticas para niños hacia 1900. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 20 (3), 2017, in corso di stampa.

Neri F., Millán Gasca A. (2016). The role of the stage presence in teaching mathematics". *13th International Congress on Mathematical Education (Hamburg, July 24-31, 2016), Topic Study Group 45 Knowledge in/for teaching mathematics at primary level, 28 luglio 2016*. (Working paper disponibile da https://uniroma3.academia.edu/AnaMillánGasca/Conference-Presentations).

Pagliaroli, D. (2013). *L'economia per i più piccoli nell'aula di matematica*, Relazione finale inedita in Scienze della Formazione Primaria. Roma: Università Roma Tre.

Petti, R. (2008a). *Uri il piccolo sumero*. Firenze: Il Giardino di Archimede.

Petti, R. (2008b). *Ahmose e i 999.999 lapislazuli.* Firenze, Il Giardino di Archimede.

Postic, M., & de Ketele, J. M. (1988) *Observer les situations éducatives*. Paris: Presses Universitaires de France.

Rachele, A. (2014). *Mimesis e matematica nel mondo infantile. Esperienze di formazione fra bambini e adulti*. MimesisLab–Laboratorio di Pedagogia dell'Espressione. Disponibile da http://host.uniroma3.it/laboratori/mimesislab/ri_at_mimesisematematica.php.

Savino, F. (2017). *Matematica avvincente nella scuola primaria. Un'esperienza sul campo*. Pubblicazioni online del Laboratorio di Matematica per la formazione primaria, http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/matematica_laboratorio.html.

Scaramuzzo, G. (2010). *Paideia mimesis. Attualità e urgenza di una riflessione inattuale*. Roma: Anicia.

Scaramuzzo, G. (2013). Mimesis: dalla riflessione teoretica alla prassi educativa. *Studi sulla formazione*, 1, 227-238.

Scaramuzzo, G. (2016). Aristotle's *homo mimeticus* as an Educational Paradigm for Human Coexistence. *Journal of Philosophy of Education*, *50*(2), 246-260.

Schmandt-Besserat, D. (1999). *The history of counting*. New York: Morrow Junior Books.

Smith, D. E. (1919). *Number stories of long ago*. Boston: Gin and Company.

Smith, D. E., & Ginsburg, J. (1937). *Number and numerals. A story book for young and old*. New York: Teachers College, Columbia University (ristampa, Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1956).

Usai, L. (2008). *I nostri amici Greci: Pitagora il "mago" dei numeri e quel "pignolo" di Euclide*, Relazione finale inedita. Roma: Università Roma Tre.

Van Manen, M. (2016). *Researching Lived Experiences: Human Science for an Action Sensitive Pedagogy*. London and New York: Routledge.

Zippel, N. (2017). *I bambini e la filosofia.* Roma: Carocci.

Received October 8, 2017
Revision received December 4, 2017/December 9, 2017
Accepted January 7, 2018

"Annali online della Didattica e della Formazione Docente"
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 240-256 – ISSN 2038-1034

Un esempio di percorso integrato tra Scienze e Matematica progettato per la formazione del personale docente

Laura Monticelli

Abstract – *The decrease in the interest in scientific studies, the difficulties pointed out by OCSE and PISA surveys stress a need for a revision of subjects and methodologies of study plans by whoever aims at turning their qualification into effective teaching. The transition from an accumulation of concepts in series to the identification of grounding concepts, which are selected with historical and epistemological precision, is possible, though still problematic. Teaching based on superficial factual knowledge, with priority given to content transmission, is still the prevailing approach and represents a major critical aspect. More useful would be a "knowledge in action", i.e., teaching of skills, where, according to "National Giudelines", "skills" refer to processes that "favour exploration and discovery, in order to promote enthusiasm when looking for new knowledge", In particular, within the Natural Sciences, "skills" refer to the ability and willingness to use the set of acquired information and methods to explain the world around us, being able to identify problems and draw conclusions based on experimented facts. Within Mathematics, "skill" is defined as the ability of an individual to identify and understand what roles mathematics play in the real world". Mathematics is, therefore, given a formative value, through which a student is enabled to have significant and factual experiences: observation of an event, identification and representation of relationships, definition of a problem, elaboration of models for real situations. Therefore, the challenge for teaching essentially pivots on the stimulation of motivation, and this is no easy matter. The indications provided by international research, the European Union, and the OCSE concern integrated multidisciplinary teaching paths and converge to suggest the use of educational paths, which both stimulate questions and induce a "search for why", and arouse interest in historical-epistemological paths. All of this needs a teaching curriculum based on an experimental approach. A plan of integrated paths for scientific subjects can be especially formative in the Scuola Secondaria di Primo Grado (Junior High School, age 11-14). In fact, it allows firstly, the use of the specific language, methods and tools for each subject, and subsequently, the set up of concepts and principles with an interdisciplinary value, so as to promote a deeper understanding of the relationships existing between different scientific domains. The integrated teaching path shown here as an example has been developed from the point of view of both the teacher and the teaching follow-up. It presupposes that the teacher has a solid social and cultural expertise, in accordance with the law 107/2015, which deals with the training of the teaching staff, considered to be a "mandatory, long-life, structural" requirement.*

Riassunto – *Il calo di interesse per gli studi scientifici, le difficoltà degli studenti emerse nelle indagini OCSE e PISA richiedono una rivisitazione disciplinare e metodologica dei curricoli da parte di chiunque voglia qualificarsi come docente efficace. Passare da contenuti accumulati in successione all'identificazione di concetti fondanti selezionati con rigore storico ed epistemologico è possibile ma ancora problematico. Tra gli aspetti di maggiore criticità, vengono indicati la prevalenza di un insegnamento nozionistico e manualistico, e la priorità assegnata alla trasmissione di contenuti. Utile quindi un "sapere agito", cioè una didattica per competenze, dove per "competenza" si intende, come scritto nelle Indicazioni Nazionali, "favorire l'esplorazione e la scoperta, al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze". In particolare, per le Scienze il termine "competenza" si riferisce alla capacità e alla disponibilità di usare l'insieme delle conoscenze e delle metodologie acquisite per spiegare il mondo che ci circonda, sapendo identificare le problematiche e traendo conclusioni basate su fatti comprovati.*

La "competenza" Matematica viene definita come la "capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale". Viene attribuito quindi alla matematica un valore formativo in cui lo studente deve essere messo nelle condizioni di fare esperienze concrete significative: osservare un fenomeno, cogliere e rappresentare relazioni, porsi problemi e costruire modelli di situazioni reali. La sfida della didattica, dunque, si gioca essenzialmente sulla motivazione, non ovvia, che si riesce a risvegliare. Le indicazioni riportate da Ricerca internazionale, dall'Unione Europea e dall'OCSE riguardano percorsi integrati interdisciplinari, che effettivamente convergono nel suggerire l'impiego di percorsi didattici che stimolino domande e che inducano alla "ricerca dei perché", e, nondimeno, a far apprezzare il percorso storico-epistemologico. Tutto ciò implica un curricolo impostato secondo l'approccio investigativo-sperimentale. La programmazione di itinerari di integrazione delle materie scientifiche può risultare particolarmente formativa nella Scuola Secondaria di Primo Grado. Essa permette, infatti, dapprima l'uso di linguaggi scientifici e di metodi e strumenti propri di ciascuna disciplina, e, successivamente, la costruzione di concetti e principi di valore interdisciplinare tali da favorire una maggiore comprensione delle connessioni esistenti tra domini scientifici diversi. Il percorso integrato che viene portato come esempio è sviluppato sia dal punto di vista del docente che da quello della relativa ricaduta didattica. Esso presuppone, da parte del docente, solide competenze sociali e culturali secondo quanto indicato dalla legge 107/2015 riguardante la formazione in servizio del personale docente, indicata come "obbligatoria, permanente e strutturale".

Keywords – education, didactics, integration, function, models

Parole chiave – formazione, didattica, integrazione, funzione, modelli

Laura Monticelli ha insegnato *Matematica* e *Scienze* nella Scuola Secondaria di Primo Grado e *Scienze Naturali*, *Chimica e Geografia*, *Microbiologia* in quella di Secondo Grado. Si è sempre interessata di formazione dei docenti, soprattutto di Metodologia e di Didattica. Ha sostenuto, prima, il ruolo di docente di *Didattica dell'Insegnamento* nei corsi preparatori alla sessione riservata di esami prevista dal MPI, poi quello di Supervisore di Tirocinio nella Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento. Ha lavorato anche in tutte le successive iniziative ministeriali di formazione come i Tirocini Formativi Attivi e i Percorsi Abilitanti Speciali. Infine, sempre in ambito di formazione, ha sostenuto più volte anche contratti di docenza relativi a moduli disciplinari e di laboratorio.

1. Introduzione

Carlo Rovelli, fisico, scrive: *"Penso che la scuola italiana sia fra le migliori del mondo... Sapere, conoscenza, intelligenza, formano un vasto complesso dove ogni parte si nutre di ogni altra. Questo la nostra scuola sa offrirlo... Al contrario… L'Italia è un paese di profonda incultura scientifica... è la scienza che manca nella scuola, anzi, manca drammaticamente nella società italiana... manca nell'incapacità di avere discussioni dove si ascoltano con attenzione argomenti e contro-argomenti; nella diffusa ignoranza di scienza delle nostre élite".* Scrive anche: *"peggio ancora nella stucchevole prosopopea di chi si fa vanto di non capire nulla di scienza"* e conclude: "*Mi piacerebbe che l'Italia fosse orgogliosa di Galileo, non solo di Raffaello*" (Rovelli, 2014).

Purtroppo in Italia è molto diffusa un'ignoranza naturalistica preoccupante, che diventa diffidenza, se non ostilità verso il mondo animale e vegetale e sono sempre più diffuse le discussioni sulla validità della scienza, che evidenziano il ritorno a fondamentalismi che si ritenevano scomparsi.

Ilvo Diamanti, professore associato di Sociologia Economica e Urbana presso l'Università "Carlo Bo" di Urbino, con molta ironia, scrive: *"Maledetti professori. Pretendono di insegnare in una società dove nessuno – o quasi – ritiene di aver qualcosa da imparare. Pretendono di educare in una società dove ogni categoria, ogni gruppo, ogni cellula, ogni molecola ritiene di avere il monopolio dei diritti e dei valori. Pretendono di trasmettere cultura in una società dove più della cultura conta il culturismo"* (Diamanti, 2008). L'immagine è cruda ma rende il degrado del ruolo sociale di chi insegna perché crede ancora che la cultura rappresenti una dimensione esistenziale indispensabile per interpretare il mondo con criticità costruttiva. È palese che, in un tipo di società in cui nessuno vuole più imparare, è difficile esercitare il mestiere di istruire.

Fare "scienza" significa sia osservare e fare affermazioni sulla natura, sia elaborare teorie scientifiche. Si tratta di operazioni su due livelli intellettuali molto diversi fra loro. Infatti si può conoscere un oggetto oppure si può parlare del suo funzionamento all'interno di una teoria: vedere la pallina che si muove è un'osservazione, prevedere quando arriverà è altro.

Non tutti sono in grado di cogliere questo doppio livello e, nell'uso divulgativo e colloquiale della scienza, spesso, si considerano confermati anche concetti teorici in verità solo ipotetici e non ancora certi.

"Cultura scientifica" invece, significa capacità di orientamento, interpretazione e partecipazione ai cambiamenti al fine di comprendere le implicazioni scientifiche e tecnologiche nella vita quotidiana e utilizzarle in modo responsabile. Significa anche attivare competenze in grado di fornire una chiave di lettura per interpretare la società in cui viviamo ed esserne parte attiva (Davis, 2003).

In tutto ciò, la rivalutazione del ruolo del docente diventa indispensabile per sostenere, rinnovare e approfondire l'insegnamento scientifico come contributo all'evoluzione culturale e sociale del Paese.

L'Organizzazione per la Cooperazione Economica e lo Sviluppo (OCSE), Program for International Student Assessment (PISA, 2015), ha pubblicato statistiche riguardanti, per le Scienze, la capacità di spiegare scientificamente i fenomeni e valutare, progettare e interpretare dati e prove, e, per Matematica, la capacità degli studenti di formulare, impiegare e interpretare matematicamente una varietà di contesti, utilizzando strumenti appropriati per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. In tal modo l'obiettivo diventa quello di misurare la propria abilità di riuscire a confrontarsi con problematiche di tipo scientifico, e nell'apprendere l'importante ruolo della matematica gioca nel mondo, attraverso la formulazione di giudizi e decisioni fondate.

I risultati collocano l'Italia un po' sotto la media, tra il 32° e il 36° posto, per Scienze, e fra il 17° e il 26° per la Matematica [INVALSI, Pisa].

Pur essendo stati rilevati progressi rispetto alle indagini precedenti, si può agire ancora attraverso due strumenti: la formazione degli insegnanti e dei loro formatori e i percorsi disciplinari.

2. La scuola che cambia

Con l'istituzione della Scuola Media unica [Legge 31 Dicembre 1962, n. 1859] si introduce lo studio obbligatorio delle Scienze, che vengono unificate con la Matematica in un'unica disciplina denominata "Matematica e osservazioni ed elementi di scienze naturali". In quell'occasione si è discusso a lungo se, come previsto, fosse funzionale un unico docente per tutte le discipline. Ma Il matematico Bruno De Finetti (1906-1985) aveva proposto, negli anni, un corso di laurea che preparasse gli insegnanti al doppio compito che sarebbe stato loro assegnato perché il problema non era avere un solo docente, ma avere insegnanti di Matematica e Scienze capaci *"di far prender pratica nella formulazione matematica di problemi scientifici e nell'impiego di ragionamenti euristici e di approssimazioni semplificatrici",* proponendo, già allora, anche percorsi di integrazione (De Finetti, 1964).

Nel 1979 [Legge 16 giugno 1977, n. 348.], la nuova denominazione dell'insegnamento diventa "Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali", per sottolinearne l'unitarietà educativa, tesa a far scoprire la complessità del reale, da indagare anche con rigore matematico. Vengono delineati i contenuti dei nuovi programmi per la Scuola Media e si parla di riflessione storica della scienza come correlazione fra evoluzione scientifica e condizione umana, e di ricorso ad osservazioni, esperimenti e problemi tratti da situazioni concrete, così da motivare l'attività matematica (Direzione Generale Istruzione Secondaria di 1° Grado, 1981).

Dal 2004 in poi, con l'introduzione delle Indicazioni Nazionali per la Scuola Secondaria di Primo Grado, i contenuti diventano strumenti per raggiungere gli obiettivi, accompagnati da suggerimenti, da tematiche e metodologie utili per il loro conseguimento [D.P.R. 275/99]. L'insegnamento è suddiviso in Unità di Apprendimento che, "*partendo da obiettivi formativi adatti e significativi per i singoli allievi, definiti anche con i relativi standard di apprendimento, si sviluppano mediante appositi percorsi di metodo e di contenuto e valutano, alla fine, sia il livello delle conoscenze e delle abilità acquisite, sia se e quanto esse abbiano maturato le competenze personali di ciascun allievo"* [D.P.R. 275/99]. Si sottolinea l'evoluzione del concetto di *"modello"* cioè di una struttura che non coincide più con la realtà, ma che è un'analogia, cioè rappresentazione di alcune caratteristiche comprensibili a tutti, cui riferirsi per individuare un linguaggio condiviso, fare ipotesi e proporre soluzioni. In particolare, il processo di matematizzazione degli oggetti fisici porta all'oggettività e costituisce un'interfaccia fra la realtà e le scienze sperimentali, capace di interpretare i dati raccolti e comunicarli con un linguaggio inequivocabile, come espresso più volte da Emma Castelnuovo: *"Nello sviluppare il corso di matematica in modo autonomo si cercherà di dare rilievo più a problematiche che a problemi, si cercherà di portare l'attenzione più su figure che si trasformano che sulla figura, si metterà in risalto più il confronto di numeri che il numero"* (Castelnuovo, 1979).

3. La formazione del personale docente

L'esigenza di una formazione specifica post laurea per i futuri docenti, prevista già a livello ministeriale dal 1990 (Legge 19 novembre 1990, n. 341), si è concretizzata in apposite Scuole

Universitarie di Specializzazione InterAteneo [Formazione docenti], nate anche dalla condivisa necessità di superare i percorsi casuali fino ad allora utilizzati per accedere alla professione (Gnani, 2009). L'individuazione di un percorso di formazione iniziale, finalizzato ad una reale ed efficace integrazione tra conoscenze teoriche-disciplinari, conoscenze psico-pedagogiche e competenze progettuali, metodologiche e didattiche è stata poi realizzata [D. M. 26 maggio 1998] con l'istituzione delle, Scuole post laurea di Specializzazione all'Insegnamento (SSIS). Una prima risposta concreta a come si può fare formazione in ingresso degli insegnanti, esperienza che, pur migliorabile, si è rivelata, molto positiva. Oggi la formazione è affidata al percorso denominato FIT (Formazione Iniziale e Tirocinio), ai sensi del D.Lgs. 13 aprile 2017, n. 59.

La scuola che cambia ha bisogno, tuttavia, che cambi anche in modo efficace la formazione in servizio del personale docente, come sottolineava Giuseppe Fioroni nel 2007 [Comunicato Fioroni], quando ribadiva la necessità, nei paesi della Comunità Europea, di nuove competenze di base tra cui l'informatica, almeno due lingue straniere, competenze relazionali e comunicative e chiedeva agli insegnanti una formazione in servizio per tutta la vita. Una formazione continua, da realizzarsi attraverso i canali formali, come corsi di aggiornamento, seminari, convegni, libri ecc., ma anche informali quali giornali, cinema, concerti, partecipazione ad eventi di ampio respiro culturale. Ma, soprattutto, sottolineava come l'aggiornamento andasse inteso come una *forma mentis*, un'ansia tesa al miglioramento, una apertura verso il nuovo, un interesse verso il cambiamento che si sviluppi con l'accrescersi delle conoscenze. Oggi la legge 107/15 comma 124, si occupa di questo e stabilisce che *"la formazione in servizio dei docenti di ruolo è obbligatoria, permanente e strutturale* [Legge 13 luglio 2015, n. 107].

In un mondo senza più barriere geografiche e in una società in rapido cambiamento, per insegnare non bastano più buona volontà e spirito missionario, ma è necessario un controllo continuo della propria conoscenza e dei propri strumenti professionali che non può essere improvvisato o il risultato di un lavoro *"fai da te"*.

Il docente deve mettere in atto, nel tempo un continuo monitoraggio sia delle proprie capacità organizzative, sia della capacità di collaborare e lavorare in gruppo, nonché delle competenze nel gestire classi spesso numerose ed eterogenee per fase di sviluppo degli alunni, livelli di partenza, situazione emotiva ed affettiva, capacità di relazione e ambiente di provenienza. Inoltre, in una scuola che si sta muovendo verso una autonomia sempre maggiore, un insegnamento efficace necessita di una riflessione continua sui contenuti, sulle loro fonti formali e non, sull'organizzazione e sul controllo pedagogico e dell'apprendimento e impone una continua flessibilità per adeguare strategie e metodologie (Lijnse, 1994).

Per questo motivo, una strategia molto efficace per consentire ai docenti di area scientifica, di seguire i rapidi progressi della scienza, anche in considerazione della loro provenienza da corsi di laurea molto diversificati potrebbe essere quella di prevedere corsi periodici di aggiornamento della didattica e dei contenuti. La formazione iniziale, è fondamentale ma non sufficiente, se si considera anche la veloce evoluzione dei progressi scientifici.

4. Didattica della progettazione

Formare insegnanti di qualità significa creare il bisogno di "pensare e fare scienza" nella scuola, per costruire un ambiente di apprendimento *creativo,* incentrato sul *learning by doing* (Marquardt, Ceriani, 2009), in cui i ragazzi stessi siano artefici del proprio sapere. Per raggiungere questo obiettivo è indispensabile, prima di tutto, una progettazione accurata, legata alle reali esigenze degli allievi, ai tempi lunghi della costruzione della loro conoscenza, e alla scelta dei contenuti.

Si è riflettuto a lungo su come sviluppare e poi sostenere in modo efficace le capacità progettuali dei docenti. Lo studio di un qualsiasi tema in ambito naturalistico impone, infatti, per la sua complessità, un'ottica interdisciplinare in cui la Matematica, la Fisica e la Chimica forniscono tutti gli strumenti utili per ottenere la comprensione dei fatti e dei fenomeni naturali (Gnani, 2009). Si supera, in tal modo, la frammentarietà di un sapere, tuttora purtroppo largamente improntato sullo studio delle singole discipline.

Innanzi tutto si rivela sempre molto utile una metodologia didattica di tipo laboratoriale, in cui si progettano attività che, partendo dal concreto, sviluppino capacità di agire sull'ambiente, di organizzare, sperimentare e progredire per dare una risposta accettabile alle problematiche poste. Nella fase di età della Scuola Secondaria di Primo Grado, tuttavia, poiché i procedimenti induttivi e abduttivi, sono molto efficaci, la scelta progettuale richiede, da parte dell'insegnante, una solida base culturale, molta attenzione al linguaggio utilizzato per evitare la formazione di misconcetti e anche oculatezza nella scelta degli argomenti da trattare. Molte tematiche scientifiche infatti, implicano un forte intreccio fra fenomeni e teorie. Le teorie, come i fenomeni, sono gerarchizzate e la loro identificazione non è sempre facile, in quanto molte conoscenze non possono essere sempre ricavate soltanto sulla base dell'evidenza delle osservazioni. Inoltre è impossibile affermare l'assoluta verità della scienza, perché sempre in divenire: una teoria scientifica è vera finché non viene confutata da nuove esperienze che la modificano.

È importante anche far capire al futuro insegnante, che il percorso didattico da seguire, dovrebbe essere introdotto con un contesto reale, per favorire la motivazione e l'approccio intuitivo ai problemi all'interno della fenomenologia scientifica e, quanto sia necessario, indurre gli studenti a proporre le esperienze da analizzare. La scelta dei casi da proporre in classe deve ricadere comunque su casi ripetibili e facilmente analizzabili, che conducano a risposte chiare, senza pesanti implicazioni teoriche (Balestra, 2009).

Un percorso didattico deve essere, dunque, flessibile ed integrabile e deve guidare gli alunni, dopo l'identificazione della domanda chiave alla quale, alla fine, dovranno essere in grado di rispondere, a progettare attività pratiche da cui ricavare informazioni precise che costituiscano l'unica risposta soddisfacente per la formulazione di una prima congettura utile a favorire una risposta coerente.

La verbalizzazione delle osservazioni e delle ipotesi, concretizza idee e proposte orientate alla soluzione, facendo sì che anche gli errori diventino strumenti attivi, utili alla progressione del pensiero invece di essere vissuti come elementi demotivanti (D'Amore, 1988).

Per esempio, la scuola italiana ha tradizionalmente privilegiato un approccio interdisciplinare allo studio della matematica, basti ricordare i programmi del 79, i suggerimenti dell'UMI del 2001 (UMI) e gli scritti di Emma Castelnuovo, in cui si presentavano riflessioni suggerite da problemi di pentole, osservazioni di ombre, pensieri di una formica (Castelnuovo, 1993).

I fenomeni in cui è coinvolta la proporzionalità, per esempio, sono numerosi e l'insegnante dovrebbe costruire un percorso che proceda dal semplice al complesso, dal concreto all'astratto stabilendo un equilibrio fra i momenti in cui gli studenti acquisiscono sicurezza nella applicazione di regole e proprietà e quelli in cui saranno posti di fronte a situazioni problematiche nuove, in cui potranno percepire che gli strumenti della matematica rappresentano delle chiavi di lettura della realtà.

L'idea di progettare percorsi di scienze integrate, nata nel 1998 [D. M. 26 maggio 1998] su proposta di alcuni docenti dell'Università di Ferrara nei percorsi formativi delle S.S.I.S. per docenti di quella che allora era Scuola Media, è stata condivisa, anche successivamente, nell'ambito della formazione iniziale e permanente. Il processo di integrazione delle materie, infatti, costituisce un elemento formativo importante anche per il primo ciclo della Scuola Secondaria, per la particolare natura motivante ed unificante, essenziale per la ricerca, per l'adozione di un linguaggio specifico omogeneo e per la comparazione dei modelli. Inoltre sviluppa la capacità critica, la consapevolezza della necessità di motivare le proprie affermazioni, l'attitudine a confrontare, comprendere e rispettare argomentazioni e punti di vista diversi dai propri, introducendo nuove chiavi interpretative (Czerniak, 2007; Gnani, 2001).

L'ultimo aspetto di una progettazione didattica, innovativa nelle discipline scientifiche, è quello storico-epistemologico, che comporta un'ulteriore riflessione su cosa è "Scienza" (Popper, 2000). Questo aspetto dovrebbe sempre preso in stretta considerazione dai futuri insegnanti. L'idea che scienziati scoprano e che non si inventino le verità, non è sufficiente a dare una definizione corretta del termine "Scienza". Tale termine rispecchia anche la necessità di rispondere ad esigenze pratico/concettuali dell'uomo con conseguenti applicazioni determinanti per la qualità della vita umana.

Quindi una didattica della scienza, in cui gli aspetti storico-epistemologici abbiano una coerenza interna, non porta solo a migliorare il sistema delle conoscenze e a cogliere il valore della ricerca, ma anche a vedere il mondo da uno dei tanti possibili punti di vista; per questo è importante distinguere la storia delle scienze dal ruolo che essa ha nella didattica (Enriquez, 1936). Non si tratta, infatti, di un'aggiunta ai saperi, ma di un approccio metodologico, per cui i contenuti vengono organizzati su basi storiche che, non solo, permettono al docente di ricostruire in classe le condizioni pratiche, ambientali e concettuali in cui si è verificata una "scoperta", ma fanno vivere agli studenti l'impresa compiuta e le sue ricadute sulla società (Scuola estiva di ricerca educativa e didattica della chimica), e danno anche fondamento e significato all'attività di modellizzazione e al modello stesso. In altri termini si usano materiali storici come risorse, per progettare attività destinate non solo all'acquisizione di conoscenze, ma anche a familiarizzare con i problemi affrontati dagli scienziati e con il loro modo di ragionare. La storia del pensiero scientifico umano diventa propedeutica alla strutturazione delle competenze degli studenti.

La finalità dell'approccio storico ed epistemologico è anche quella di sviluppare, nel tempo, una "*forma mentis*" che permetta la conquista del piacere intellettuale di conoscere aspetti anche non direttamente legati alla soddisfazione di esigenze pratiche. Per esempio, parlando di fossili, diventa un piacere appagante e personale conoscere il percorso storico che ha portato l'uomo a capire cosa sono e che tipo di testimonianze ci danno sulla storia e sull'evoluzione della vita e del nostro pianeta nel tempo.

Un'altra riflessione riguarda la programmazione della fase manipolativa che presenta un aspetto critico perché la costruzione di un ragionamento che giunga a formulare un'ipotesi, deve essere coerente rispetto alla relazione: osservazione, oggetto e "interpretante". Infatti non tutti gli aspetti di un'osservazione sono significativi, quindi deve essere affinata la capacità di identificare quelle utili e di tener conto solo di quelle. Si tratta di attivare e sviluppare un processo mentale che aiuta, ragionando in modo abduttivo, ad osservare l'effetto, a proporre un'interpretazione coerente e a derivarne, in modo corretto, una causa probabile [Ragionamento abduttivo].

5. Il progetto

Il progetto, le cui parole chiave sono: Forma e Funzione, Misurazione e Modelli, prevede argomenti di tutte le aree disciplinari di Scienze e di Matematica e un approccio storico ed epistemologico utile a cogliere il legame tra le diverse discipline, necessario per correlare il sapere di ciascuna allo stesso tema, mantenendo tuttavia l'identità specifica.

L'insegnante ha il ruolo sia di "esperto disciplinare" che di facilitatore (conduttore e moderatore nelle discussioni, guida alle diverse attività, incoraggiamento e stimolo per gli studenti) consapevole che, per gli studenti, la costruzione cognitiva in è più efficace in un gruppo di pari e si realizza in diverse fasi come l'identificazione di un problema, con una breve discussione, la definizione e la messa in atto di attività pratiche utili a formulare congetture, approfondire l'argomento a casa, utilizzando il libro di testo e le risorse a disposizione, condividendo i risultati nel gruppo classe, verificando le ipotesi fatte e modificandole, se non sostenibili (Dreiver *et al.*,1994).

Le tecniche didattiche previste sono *la flipped classroom, l'Inquiry-Based Science, il problem solving,* e la metodologia prevede la progettazione di semplici esperimenti scientifici, facilmente riproducibili nei locali della scuola la sperimentazione, la documentazione di essa, anche con fotografie o piccoli video girati dal ragazzi, lo studio mediato dal libro di testo e da strumenti multimediali e l'insieme delle tecniche programmate

Il percorso si sviluppa partendo da un argomento di Etologia riguardante gli esseri viventi (i Chirotteri) legato ad uno di Scienze della Terra (le rocce). L'analisi di alcuni aspetti permette di ricorrere a saperi, tecniche e procedure di altre discipline: la Chimica (soluzioni e sali), la Fisica (il suono) e la Matematica (fondamenti di Statistica, rapporti e proporzioni).

Per la valutazione pare più opportuno prevedere l'alternanza di prove di tipo tradizionale con altre relative non solo alla capacità di organizzarsi, di identificare problemi e suggerire soluzioni, ma anche all'abilità di proporre e gestire semplici esperimenti e, in ambito di unitarietà delle scienze, di proporre strumenti e nozioni attinenti a discipline diverse.

I contenuti matematici costituiscono un elemento trasversale di integrazione, sviluppati partendo dall'osservazione e dallo studio di fenomeni del mondo naturale. Le possibilità fornite dalla Matematica sono molteplici ma il tema dei "rapporti" e delle "proporzioni" attraversa le scienze sperimentali costantemente e risulta pertanto particolarmente rilevante. Le difficoltà insite nell'apprendimento di questi concetti sono note a partire dalle difficoltà di ordine linguistico poiché il linguaggio matematico, a differenza del linguaggio comune, richiede univocità e precisione. Anche in questo contesto quindi, lo studente fa i conti con l'ambiguità di termini quali "rapporto" e tende a smarrirsi. Inoltre, da un punto di vista concettuale, il "rapporto" viene usato come "frazione", "decimale", "percentuale", "divisione" e chiedersi il motivo di tanti termini per indicare un unico concetto porta a riconoscere la varietà di ambiti a cui sono collegati. Si potrebbe verificare che per indicare il peso di un oggetto sia privilegiato il numero decimale mentre la percentuale si utilizzerà per definire la concentrazione di una soluzione. Saper passare da una rappresentazione a un'altra costituisce senza dubbio una competenza che aiuta a risolvere problemi anche complessi, ma arrivare a possedere una adeguata competenza matematica, richiede un cammino lungo, continuo e sistematico (Pellerey, 2017). Ormai è consolidata la tendenza a evitare una trattazione assiomatica dei concetti e si cerca di porre lo studente di fronte a situazioni concrete da esplorare allo scopo di guidarlo, soprattutto nelle esperienze di laboratorio, nella individuazione di relazioni fra coppie di variabili quantitative e nella loro esplicitazione con un linguaggio naturale per poi passare gradualmente a un linguaggio formale con l'uso di simboli e rappresentazioni grafiche.

Anche l'uso di modelli statistici, in un progetto integrato, diventa strumento utile per studiare leggi e relazioni distributive, in quanto la raccolta dei dati avvia un processo di sintesi che rende simili gli elementi della variabilità rispetto alle modalità di una o più caratteristiche (qualitative o quantitative) e permette una classificazione dei dati che compongono una popolazione consentendo di misurare la probabilità di eventi ripetibili. L'uso del foglio elettronico permette di costruire un data-base dei dati raccolti, di rappresentarli ed elaborarli e di simulare distribuzioni di probabilità relativa. Inoltre, operare in contesti quantitativi coinvolgenti ed interessanti, perché derivanti da fenomeni in parte conosciuti, può essere un utile supporto per passare dalla realtà alla sua astrazione simbolica (Anche in statistica ci sono i pipistrelli), introducendo gradualmente il linguaggio formale della matematica, in modo che gli studenti arrivino a percepire che le formule non sono altro che un linguaggio che ha il vantaggio della concisione e della non ambiguità (Ottaviani, 2011).

Per esplicitare l'approccio didattico viene di seguito riportato il percorso progettato, distinto in due parti collegate fra loro, in ciascuna delle quali viene illustrata la didattica del tema affrontato e le proposte d'integrazione tra le diverse discipline.

5.1. Studio caso I – biodiversità, tutela ambientale e fisica

È stato scelto di introdurre i Chirotteri, comunemente chiamati pipistrelli, argomento di forte spinta motivazionale, poco conosciuto, spesso causa di paure, tuttavia facilmente integrabile con le altre discipline, anche con quelle spesso vissute come ostiche o fini a se stesse. Si tratta di animali tutelati da tempo [Tutela pipistrelli] e oggi considerati indicatori ambientali di buona qualità di un territorio. Un'attività di ricerca sul web consente di analizzare alcuni esempi, provenienti dalla letteratura, dal cinema o dall'arte in cui sono riportate immagini negative o positive di questi animali, ma che mettono in evidenza la mancata conoscenza di questi strani mammiferi., per esempio una citazione dal film Batman Begins "*Beh, uno che gira vestito da pipistrello non deve starci tanto con la testa",* brani come "Il pipistrello" tratto da "Novelle per un anno" (Pirandello, 1920), in cui viene ripresa una credenza secondo cui si diceva alle persone di non uscire la notte poiché si temeva che i pipistrelli si sarebbero attaccati ai capelli, o immagini come "El sueño de la razón produce monstruos" (1797) di Francisco Josè de Goja, poesie, come "Pipistrello" di Ada Merini [Alda Merini, *Pipistrello*], e, per ultimo, un brano da un testo di divulgazione scientifica (Russo, 2013). Le affermazioni e le domande più frequenti dei ragazzi sono del tipo "*sono topi?"* o *"come si muovono e si procurano il cibo, al buio?"* o *"perché sono sempre appesi a testa in giù?"*. Una risposta, fra le tante possibili, è: "*forse vedono come i gatti"* apre una prima discussione guidata dalle domande significative del docente e la raccolta di congetture di cui, poi, gli studenti devono verificarne a casa la validità, avendo a disposizione una presentazione in Power Point precedentemente preparata dal docente e diversi siti web che si occupano di questo argomento da molti punti di vista. Solo successivamente l'insegnante interverrà, se necessario, per chiarire o puntualizzare e per formalizzare le conoscenze.

In questo modo l'acquisizione della parte cognitiva può essere fatta a casa. In classe, in un momento successivo, è possibile lo scambio di informazioni, l'elaborazione e l'apprendimento attivo sotto la guida dell'insegnante che, correlando osservazioni e conoscenze, conduce alla soluzione di questioni rimaste aperte. Per esempio: solo la conoscenza dell'anatomia dei Chirotteri, anche se affrontata in modo essenziale, può condurre gli studenti a comprendere perchè i pipistrelli stanno "comodi" appesi a testa in giù, dato che gli arti posteriori hanno l'articolazione del ginocchio rivolta all'indietro e la posizione dei tendini disposti in modo tale da consentire un aggancio automatico degli artigli, e quindi tale posizione può essere mantenuta a lungo senza consumo di energia.

Un altro spunto didattico nasce dal fatto che i pipistrelli si raccolgono in grandi gruppi in un unico rifugio, utilizzando vari tipi di siti per lo svernamento e per il roost. In Italia i principali rifugi naturali sono rappresentati dalle grotte e i Chirotteri sono stati considerati specie protette a partire dal 1939 [Legge sulla Caccia 5 giugno 1939, n. 1016, Art. 38], per la loro importanza ecologica nel ridimensionamento del numero di insetti dannosi. Alcune associazioni si occupano della conservazione attiva della chirotterofauna, attuata, per esempio, nell'ambito del Progetto Life + 08 NAT/IT/000369 "*Gypsum*" [Monitoraggio Chirotteri], con interventi atti a preservare i rifugi dall'azione antropica. I risultati dei rilevamenti diretti sulla presenza di questi animali svolti in fase *ante* e *post operam* presso l'Inghiottitoio dell'Acquafredda (BO), viene presentata ai ragazzi ed interpretata sia con strumenti matematici, che naturalistici.

Specie osservate nei rilevamenti diretti	Ante operam (numero di esemplari) Inverno 2012/13	Post operam (numero di esemplari) Inverno 2013/14
Myotis bechsteinii (Kuhl 1817)	0	1
Myotis blythii (Thomes 1857) *Myotis myotis (*Borkhausen 1797)	3	2
Myotis emarginatus (E. Geoffoy,1806)	11	114
Myotis spp	2	7
Plecotus spp	1	0
Rhinolophus ferrumequinum (Schreber, 1774)	9	13
Rhinolophus hipposideros (Bechstein,1800)	29	45

L'insegnante, appositamente, affronta per ultimo l'argomento del movimento al buio e della ricerca di fonti di cibo, lasciando in sospeso un quesito: cosa significa *"orientamento con eco-localizzazione?"*. Per approfondire sono necessarie alcune nozioni sul suono e sull'acustica.

Gli studenti, a gruppi, sotto la guida dell'insegnate, in laboratorio e con materiali poveri, svolgono alcune semplici esperienze e raccolgono le loro osservazioni.

La sveglia di un telefono cellulare messa sotto una campana di vetro permette di osservare che durante il processo di eliminazione dell'aria, il suono cala di intensità fino a scomparire.

Un tubo di forassite, chiuso ad una estremità, dentro cui un ragazzo parla, oppure un urlo emesso sotto un bicchiere pieno d'acqua e coperto da una pellicola trasparente su cui è stato posato un pizzico di caffè, consente di "vedere" e "toccare" le vibrazioni.

Due righelli, fissati ad un banco in modo che sporgano in modo diverso, se sollecitati, variano l'ampiezza ed il ritmo del movimento. Gli studenti distinguono suoni forti o deboli, gravi o acuti e le osservazioni fatte portano spontaneamente qualcuno a rappresentare graficamente il suono come una linea ondulata, ma disordinata.

Lo studio teorico a casa e la condivisione permettono, seguendo la fisica newtoniana, di comprendere che il suono necessita di una sorgente e di un mezzo di propagazione, che è energia che provoca dilatazione e compressione delle particelle d'aria. I ragazzi costruiscono, con l'aiuto del docente, il grafico di un suono come onda e ne colgono la periodicità, il significato di lunghezza d'onda, ampiezza, frequenza, periodo.

Esperienze come battere due sassi all'interno di un recipiente pieno d'acqua o l'osservazione della relazione fra lampo e tuono e l'esperienza dell'eco consente di arrivare a concludere che:

1. il suono si trasmette più velocemente nei solidi che nell'aria (per questo gli indiani prevedevano l'arrivo dei carri attraverso l'uso dei binari o del terreno);
2. il suono "viaggia" più lentamente della luce (durante i temporali, si vede il lampo prima di

sentire il tuono);

3. il suono è soggetto ad una caratteristica tipica delle onde, cioè la riflessione.

E' possibile anche comprendere che i suoni sono percepiti dall'uomo attraverso la vibrazione del timpano e che non vengono percepite tutte le frequenze possibili, ma soltanto quelle che cadono in un intervallo preciso.

I pipistrelli comunicano fra loro anche mediante lunghezze d'onda della fascia dell'udibile, ma per orientarsi e per localizzare il cibo emettono e ricevono suoni con una frequenza molto maggiore, non percepibile dall'uomo: gli ultrasuoni. La riflessione delle onde sonore ad alta frequenza che colpiscono oggetti o prede vengono percepite dai Chirotteri e danno loro indicazioni relative ad ostacoli e fonti di cibo. Questo processo si chiama ecolocalizzazione. E' significativo confrontare il fenomeno dell'eco, che tanto li diverte, con l'ecolocalizzazione che differisce solo per la diversa frequenza delle onde sonore.

L'attività prosegue cercando soluzione a problemi di verità. Per esempio: "dopo quanto tempo un pipistrello riceve il segnale da una fonte di cibo che si trova ad una distanza di 60 metri?"

Per cercare un modello matematico è necessario riprendere i concetti di distanza d e di intervallo di tempo Δt, legati dal concetto fisico di velocità, e far loro realizzare, tramite una discussione guidata, che lo spazio percorso è il doppio di quello indicato, quindi la relazione cercata sarà

$t = 2d/v$. Trovato il dato mancante, la risposta è semplice.

Più complessa è invece la soluzione di un gioco: "Ci sono un uomo e Batman, che quindi possiede le stesse caratteristiche dei pipistrelli, che competono per la stessa fonte di cibo, posta alla stessa distanza da loro, chi ne percepisce prima la presenza?". La soluzione implica la distinzione fra l'intervallo sonoro udibile dagli umani e gli ultrasuoni. L'analisi del rapporto fra lunghezza d'onda e periodo permette di capire che la velocità aumenta se la lunghezza d'onda cresce e il periodo diminuisce. Il confronto fra i due rapporti evidenzia che vincerebbe l'uomo.

5.2. Studio caso II

Poiché, come detto precedentemente, i siti di rifugio preferiti dai Chirotteri, per lo svernamento e per il roost, sono grotte ipogee che, in Emilia Romagna, si trovano all'interno di rocce sedimentarie, il passaggio allo studio delle rocce e della loro genesi è spontaneo.

L'argomento fa riferimento alle I. N. [Indicazioni Nazionali] *"raccolta e saggi di rocce diverse" e "saper riconoscere con ricerche sul campo ed esperimenti concreti i principali tipi di rocce".*

L'attività introduttiva è una breve passeggiata in città durante la quale si gioca al "*piccolo geologo*", in cui si osservano e documentano, con l'aiuto di schede preorganizzate dal docente, le rocce utilizzate nelle costruzioni. Poi, in classe, si discute sui materiali usati dall'uomo per i suoi "ripari", perché quelli e non altri e quali competenze sono state sviluppate per sceglierli in modo opportuno. Essendo in ambito naturalistico, sono stati scartati i manufatti, e i campioni rimanenti sono stati confrontati con quelli presenti in laboratorio. In base alla scalfittura, utilizzando un'unghia, un chiodo, una raspa che permette di valutarne la durezza, l'uso del succo di limone che evidenzia la presenza o meno del carbonato di calcio e tramite l'osservazione di alcuni parametri come colore, presenza o meno di cristalli, scistosità ecc..si formano tre gruppi di campioni. La rielaborazione a casa consente di rivedere e correggere la prima suddivisione, di identificare rocce magmatiche, sedimentarie e metamorfiche e di definire le caratteristiche dei tre gruppi.

Un campione di arenaria, osservato con una lente, porta alla conclusione che "*è una sabbia diventata dura*" e introduce il processo di cementazione dei clasti. La lettura del profilo di un fiume aiuta a definire i concetti di erosione, trasporto e sedimentazione e un'attività pratica relativa alla composizione di diversi tipi di suolo lasciati depositare all'interno di cilindri graduati è funzionale a:

– Misurare, con un calibro le dimensioni dei clasti e suddividere ghiaia, sabbia e argilla comprendendo l'origine di brecce, arenarie, argilliti.

– Sperimentare come, durante la sedimentazione, si operi una selezione dimensionale dei clasti, processo che, in scala più grande, avviene in natura formando successioni stratificate di rocce.

– Comprendere, osservando la componente organica del terreno e riprendendo l'osservazione di resti organici nelle rocce sedimentarie, sia l'origine delle rocce organogene, che la natura dei fossili.

– Chiedersi ancora quali informazioni ne trarrebbe un chimico.

L'osservazione della selezione e la successiva deposizione dei clasti offre la possibilità di applicare lo stesso ragionamento abduttivo, che probabilmente ha applicato Niccolò Stenone (1638-1686), considerato il padre della Stratigrafia: nel tempo, nel cilindro, i clasti si sono depositati secondo dimensione decrescente, formando degli strati in successione e lo strato più basso si è depositato per primo (caso). Se i clasti fossero moltissimi, si depositerebbero strati molto spessi (oggetto). Quello che è successo nel cilindro è analogo a quello che succede in natura, quindi se il versante di una montagna evidenzia strutture orizzontali significa che essa è formata da pacchi di sedimenti depositati in successione e quello più basso è il più antico (interpretazione).

Ma questa esperienza offre anche l'opportunità di rispondere a domande come: "Perché l'acqua nel cilindro non torna perfettamente trasparente dopo aver fatto il percorso inverso di separazione della parte corpuscolata da quella liquida?", "cosa è rimasto nell'acqua?".

In laboratorio, si organizzano alcune esperienze, in cui si mescolano due a due sostanze come sale, zucchero, limatura di ferro, zolfo, acqua e, con una scheda di accompagnamento come guida alle osservazioni, si registrano i dati e si formalizzano i risultati riportandoli in una tabella.

Nella fase successiva si cerca di separare di nuovo i componenti utilizzando strumenti come filtri o calamite e si separano i campioni in cui le due componenti sono separabili.

La prima conclusione è che alcune sostanze come zucchero e sale si sciolgono nell'acqua, e altre no, da qui la definizione di solvente e soluto e il significato scientifico di "sciogliere".

Le miscele in cui avviene la dispersione di una sostanza nell'altra vengono definite soluzioni, mentre le altre miscugli.

Poi si distribuisce una piccola bottiglia di acqua gasata e viene chiesto cosa si osserva quando si apre. Risposta: *“fa rumore perché esce il gas... si vedranno le bollicine”.* Riferendosi ad una situazione già vissuta come: *“Tutti hanno aperto una bottiglia di acqua gasata”*, i ragazzi hanno intuito che al suo interno c’è un gas che spinge, che si libera e scompare. Alcuni hanno pensato che l’acqua frizzante dovesse essere inclusa fra i separabili, finché non è stato fatto loro notare che, prima di aprire il gas non era distinguibile dall’acqua.

Questa esperienza permette di parlare di soluzioni di gas-liquido e lo studio successivo permetterà di includere anche quelle solido-solido e gas-gas e di definire più correttamente le soluzioni come miscugli di cui non è possibile separare i componenti facilmente.

Successivamente si riprende il campione con acqua e zucchero e, sotto stretto controllo dell’insegnante, i ragazzi eliminano l’acqua con l’aiuto di un piccolo fornello, registrando e verbalizzando le osservazioni fino all’eliminazione dell’acqua e alla raccolta dello zucchero sul fondo del becker: le due componenti si sono separate ma l’acqua non si vede più, è passata dallo stato liquido a quello gassoso.

Sia nei miscugli che nelle soluzioni, solvente e soluto possono essere separati, ma nel caso di queste ultime ciò avviene solo se, almeno uno dei due cambia stato.

La domanda, fatta durante l’esperienza sulla sedimentazione delle componenti di un campione di suolo, trova adesso una risposta accettabile se si inferisce che siano rimasti sali in soluzione, ma è anche possibile che la torbidità sia legata a particelle di diametro piccolissimo che si depositano in tempi molto lunghi. La risposta non esaurisce tutti i casi possibili, per esempio la presenza di colloidi, ma è sufficiente per ragazzi di quell’età. L’approfondimento avverrà successivamente, quando le conoscenze e le competenze saranno maggiori, secondo la metodologia di tipo ricorsivo.

A questo punto si affrontano la solubilità e la sua relazione con la temperatura e poi la soluzione di compiti di realtà.

Per esempio:

“Si ha una soluzione acqua e zucchero in cui il soluto è 18 g e la soluzione è 200 g. Una seconda soluzione di acqua e sale è composta da 58 g di soluto e il peso totale della soluzione è 350 g. Quale delle due soluzioni sarà più dolce?”.

La prima ipotesi porta a riferirsi al più dolce come quello con la maggiore quantità di soluto. Qualcuno ha valutato che il 18 è contenuto nel 200 più di dieci volte mentre il 58 è contenuto circa 6 volte nel 350 quindi ha trovato la risposta con un calcolo approssimativo. La maggior parte non ha capito.

Per una risposta più precisa si confrontano i due rapporti 18/200 e 58/350. Più facile è riportare le due frazioni a due equivalenti, aventi lo stesso denominatore, meglio ancora se questo è 100, utilizzando cioè le percentuali risolvendo le proporzioni: 18g/200g=x/100g e 58g/350g =y/100g. Approssimando: x=9% e y=16,6%.

Il valore che è stato trovato esprime la concentrazione delle due soluzioni, quindi è di facile lettura.

Altri esempio: *“Si vogliono preparare 220 g di soluzione acqua e zucchero al 25%. Quanti grammi di zucchero e d’acqua bisogna utilizzare?”.*

Oppure: *“Se aggiungiamo 40g di sale a 500g di una soluzione di acqua e sale al 15% qual* *è la percentuale di sale disciolto in acqua?".*

Questo quesito presenta una difficoltà maggiore legata al fatto che se si aggiunge soluto si ottiene una quantità di soluzione diversa da calcolare.

Come ultima attività i ragazzi hanno aggiunto più volte soluto ad una soluzione, fino ad ottenerne il deposito sul fondo segnando i g necessari per ottenerlo. Hanno quindi intuito che la quantità di soluto scioglibile non è infinita, arrivando quindi al concetto di saturazione, definendola anche come g/l. Successivamente scaldando la soluzione si rendono conto che la solubilità aumenta e la soluzione diventa soprassatura.

Si tratta comunque di un esperimento in cui la precisione è molto scarsa per il margine di errore della pesata e per la difficoltà di stabilire esattamente il punto di saturazione. E' stato tuttavia utile dal punto di vista didattico, per la comprensione dei concetti.

6. Conclusione

Il percorso descritto sottolinea la necessità da parte dei docenti di mantenere un aggiornamento continuo e preciso, non solo di arricchimento disciplinare, ma anche di strategie didattiche, a causa della responsabilità formativa nei confronti degli studenti. Partire da problemi pratici o teorici che portino lo studente ad osservazioni anche molto semplici o ad ipotesi non corrette, ne motivano l'apprendimento. Solo "inciampando" nei problemi, si sviluppa l'interesse per la ricerca e la creatività personale.

È importante far cogliere il dinamismo della scienza e le sua progressione, presentando anche posizioni di pensiero diverse e teorie non ancora accertate, per far cogliere come l'avvicinamento alla verità scientifica sia lungo, difficoltoso e, spesso, non ancora raggiunto. In questo modo, si favorisce il pensiero divergente, utile allo sviluppo di qualità e capacità per il benessere del futuro adulto e della comunità.

La personalità dello studente si forma non solo con ciò che vede o sente, ma con il lavoro e l'attività. Non ci sono discipline più importanti di altre ma, per sviluppare "abilità manuali e mentali", è indispensabile l'allenamento della mente.

Ogni docente, quindi, non può prescindere dal fatto che la scienza abbia ricadute sociali molto significative. I suoi valori infatti condizionano da sempre le ideologie delle comunità umane, sia nelle scelte dei problemi da indagare, che nella prospettiva e nei metodi con cui si affrontano. Le scoperte scientifiche, infatti, hanno sempre modificato la qualità della vita delle persone, risolvendo molte difficoltà, ma anche generandone di nuove ed inaspettate.

Un esempio per tutti è la rivoluzione tecnologica nella società moderna.

7. Bibliografia

Balestra, A. (2009). *L'Acquario in classe: un'esperienza di duplice integrazione*, in Atti del Convegno New Trends in Science and Technology Education, Modena, vol. II, 297-299, 21-23 Aprile 2009.

Castelnuovo, E. (1979). *Scuola media e i nuovi programmi*. Firenze: La Nuova Italia.

Castelnuovo, E. (1993). *Pentole ombre e formiche.* Firenze: La Nuova Italia.

Czerniak, C. M. (2007). Interdisciplinary Science Teaching. In: S. K. Abel, N. G. Lederman (Eds.). *Handbook of research on Science Education*. London: Lawrence Erlbaum Associates, 537-559.

D'Amore, B. (1988). Il Laboratorio di Matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo. *L'Educazione Matematica*. 3, 41-51.

Davis, K. S. (2003). Change is hard': What science teachers are telling us about reform and teacher learning of innovative practices. *Science Education*, 87, 1(2003), 3-30.

De Finetti, B. (1964). Insegnamento di materie scientifiche nella scuola media unica e preparazione degli insegnanti. *Periodico di Matematiche*, febbraio-aprile 1964 – Serie IV, vol. XLII n. 1-2, pp. 72-114.

Diamanti, I. (2008). *Maledetti professori*, La Repubblica 25/07/2008.

Direzione Generale Istruzione Secondaria di 1° Grado (1981), *Scuola media statale: programmi e orari di insegnamento, criteri orientativi per le prove d'esami di licenza e relative modalità di svolgimento*. Roma: Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato.

Dreiver, R., Asoko, K., Leach, J., Mortimer, E., Scott, P. (1994). Constructing Scientific Knowledge in the Classroom. *Educational Researcher*, 4, 5-12.

Enriquez, F. (1936). *Il significato della storia nel pensiero scientifico*. Bologna.

Gnani, G. (2001). Le valenze del corso di Laboratorio della Didattica delle Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali nella formazione degli insegnanti specializzati della SSIS (sede di Ferrara). In: G. Lucchini, F. Mercanti, G. Tallini (Eds.). *Atti del Congresso Nazionale Mathesis*. Mantova, 223-229.

Gnani, G. (2009). Dalla formazione iniziale alla formazione permanente degli insegnanti di Matematica e Scienze: esperienze e materiali on line, in *Atti del Convegno New Trends in Science and Technology Education*, vol. II, 207-213, Modena, 21-23 Aprile 2009.

Lijnse, P. (1994). Didactical structures as outcome of research on teaching-learning sequences?. *International Journal of Science Education*, 26, 5, 537-554.

Marquardt, M. J., Ceriani, A. (2009). *Action Learning, Principi, Metodo, Casi*, Milano: Franco Angeli.

Ottaviani, M. G. (2011). Insegnare ed apprendere statistica e probabilità a scuola: il problema dell'aggiornamento degli insegnanti. *Periodico di matematiche* 3, 33-44.

Pellerey, M. (2017). *Scoprire insieme. Matematica e Scienze*. Teramo: Ed. Lisciani Scuola.

Pirandello, L. (1920), *Novelle per un anno*.

Popper, K. R. (2000). *Scienza e filosofia. Problemi e scopi della scienza*, Piccola Biblioteca Einaudi Ns.

Rovelli, C. (2014), *Perché siamo il Paese dell'incultura scientifica*, La Repubblica 9/07/2014.

Russo, D. (2013), *La vita segreta dei pipistrelli*. Milano: Orme editori.

8. Sitografia

[Alda Merini, *Pipistrello*] URL: http://www.tutelapipistrelli.it/2012/07/10/pipistrello-di-alda-merini/

[Comunicato Fioroni] URL: https://archivio.pubblica.istruzione.it/

[D.M. 22 ottobre 2004, n. 270] URL: http://www.miur.it/0006Menu_C/0012Docume/0098Normat/4640Modifi_cf2.htm

[D.M. 26 maggio 1998] URL: http://attiministeriali.miur.it/anno-1998/maggio/dm-260519-98.aspx

[D.P.R. 275/99] URL: https://archivio.pubblica.istruzione.it/argomenti/autonomia/documenti/regolamento.htm

[Formazione docenti] URL: http://www.edscuola.it/archivio/

[Indicazioni Nazionali] URL: http://www.indicazioninazionali.it/J/

[INVALSI, Pisa] URL: http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2015.php?page=pisa2015_it_01

[Legge 13 luglio 2015, n. 107] URL: http://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2015/07/15/15G00122/sg

[Legge 16 giugno 1977, n. 348.] URL: http://www.edscuola.it/archivio/norme/leggi/l348_77.html

[Legge 19 novembre 1990, n. 341] URL: http://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/1990/11/23/090G0387/sg

[Legge 31 Dicembre 1962, n.1859] URL: http://www.edscuola.it/archivio/norme/leggi/l1859_62.pdf

[Legge sulla Caccia 5 giugno 1939, n. 1016, Art. 38] URL: http://www.edizionieuropee.it/LAW/HTML/3/zn16_01_007.html

[Monitoraggio Chirotteri] URL: http://www.lifegypsum.it/gypsum/PDF/RelazioneFinale_EX-POST_A2_.pdf

[Ragionamento abduttivo] URL: http://elearning.unimib.it/pluginfile.php/99442/mod_resource/content/1/RolettoRegisSoudaniSoudani%20CnS3%202011%20copia.pdf

[Scuola estiva di ricerca educativa e didattica della chimica] URL: https://www.soc.chim.it/sites/default/files/users/div_didattica/PDF/Segre%202017_programma%20definitivo.pdf

[Tutela pipistrelli] Legge 11 febbraio 1992, n. 157 e Legge R. Piemonte 4 settembre 1996, n. 70, URL: http://www.centroregionalechirotteri.org/legislazione.php

[UMI] URL: http://www.bdim.eu/

Received October 12, 2017
Revision received November 20, 2017 / December 12, 2017
Accepted December 21, 2017

"Annali online della Didattica e della Formazione Docente"
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 257-279 – ISSN 2038-1034

MOOC: repository di strategie e metodologie didattiche in Matematica

Eugenia Taranto
Ferdinando Arzarello
Ornella Robutti

Abstract – *This paper focuses on MOOC (Massive Open Online Courses) as a new paradigm in e-learning educational projects: it presents MOOCs for lower and upper secondary school mathematics teachers. On the one hand, a MOOC, with rich materials in innovative didactic methodologies and specific technological tools, can be understood as a repository from which teachers can draw inspiration. On the other hand - by allowing teachers from different geographic locations an opportunity for communication – a MOOC is also the place where these teachers - in a community of peers, supported by a vigilant but non-intrusive presence of trainers – have the rare opportunity to reflect together to organise strategies, processes and materials that are linked not only to age, type of school and social/individual situation, but also to the content of the discipline that has specific cognitive obstacles. The aim of this contribution is, therefore, to present our teacher education experiences through MOOCs, with a focus on the methodologies of mathematics teaching that were shared and debated with the teachers who attended the course, using as theoretical lens a new elaborated framework to analyse these new online training environments.*

Riassunto – *Il focus di questo articolo verte su MOOC (Massive Open Online Courses) per docenti di matematica di scuola secondaria (I e II grado), da considerarsi come nuovo paradigma nei progetti educativi in e-learning. Da un lato, un MOOC, con materiali ricchi di metodologie didattiche innovative e specifici strumenti tecnologici, si può intendere come un archivio informatico (repository) da cui gli insegnanti possono trarre spunto. Dall'altro lato, consentendo un'opportunità di comunicazione a vari insegnanti, provenienti da diverse realtà geografiche, un MOOC è anche il luogo in cui tali insegnanti – in una comunità unicamente di pari, sostenuta dalla vigile, ma non invadente presenza dei formatori – si ritrovano ad avere la rara occasione di poter riflettere insieme per orientare opportunamente strategie, processi e materiali, legati non solo a fascia di età, tipologia di scuola e situazione sociale/individuale, ma anche ai contenuti stessi della disciplina che presentano ostacoli cognitivi specifici. L'obiettivo di questo contributo è dunque quello di esporre le nostre esperienze di formazione insegnanti tramite MOOC, con un focus sulle metodologie di didattica della matematica che sono state condivise e approfondite con i corsisti, utilizzando come lente d'analisi un nuovo quadro elaborato proprio per analizzare questi nuovi ambienti di formazione insegnanti online.*

Keywords – MOOCs, teacher education, professional development, peer collaboration, community of practice, repository

Parole chiave – MOOC, formazione insegnanti, sviluppo professionale, collaborazione tra pari, comunità di pratica

Eugenia Taranto è Dottoranda in *Didattica della Matematica* presso l'Università degli Studi di Torino e il Politecnico di Torino. I suoi ambiti di ricerca riguardano: MOOCs (Massive Open Online Courses); metodologie, tecnologie e materiali per l'e-learning; formazione insegnanti di scuola secondaria con l'uso di tecnologie. Tra le sue più recenti pubblicazioni: *MOOC for mathematics teacher training: design principles and assessment* (in "Proceedings of the 13th ICTMT", Lione, France, 2017); *Analyzing MOOCs in terms of their potential for teacher collaboration: the Italian experience* (in "Proceedings of 10th CERME, Dublin, Ireland, 2017).

Ferdinando Arzarello è Professore Ordinario di *Matematiche Elementari* da un punto di vista superiore. È stato presidente della Commissione UMI-MIUR per l'elaborazione di un curricolo di Matematica (Matematica per il Cittadino) e responsabile scientifico del progetto ministeriale m@t.abel per l'insegnamento delle matematica; dal 1998 al 2006 presidente della CIIM; dal 2009 al 2013 presidente dell'ERME; dal 2013 al 2016 presidente dell'ICMI, al cui Executive Committee continua ad appartenere quale past President. È autore di più di 150 fra articoli e capitoli di libri in riviste e volumi internazionali su vari argomenti di didattica della matematica: insegnamento di algebra, geometria e analisi elementare nella scuola, Embodiment e matematica, Progettazione curricolare, Quadri teorici per l'insegnamento/apprendimento della Matematica.

Ornella Robutti è Professore Associato in *Didattica della Matematica* (Università di Torino, dal 2003). È membro della CIIM; responsabile di: Istituto di GeoGebra di Torino, Piano Lauree Scientifiche, progetto DIFIMA, progetto Liceo Potenziato in Matematica, progetto MERLO, canale YouTube Didattica della matematica Ornella Robutti. È autrice di materiali per docenti e di molti articoli di ricerca. I suoi campi di ricerca: l'apprendimento della matematica con le tecnologie, le comunità di insegnanti, l'inclusione in matematica. Articoli recenti: *Making sense out of the emerging complexity inherent in professional development* (MERJ, 2017); *ICME international survey on teachers working and learning through collaboration* (ZDM, 2016); *Growth point and gestures: looking inside mathematical meanings* (ESM, 2015).

1. Introduzione

Recentemente è nato un nuovo acronimo nel contesto dell'e-learning: MOOC - Massive Open Online Courses. Si tratta di corsi online su larga scala, ovvero rivolti ad un elevato numero di utenti, ai quali si può accedere gratuitamente e senza particolari requisiti. I MOOC sono diventati popolari nelle università come un modo per venire incontro a studenti lavoratori o genitori, ed anche per rinnovare e trasformare sia l'insegnamento sia l'apprendimento di varie discipline (si veda ad esempio: Siemens, Irvine & Code, 2013). In questo articolo, tuttavia, riportiamo un diverso utilizzo per i MOOC come spazio virtuale per l'aggiornamento e lo sviluppo delle competenze professionali degli insegnanti di matematica della scuola secondaria (primo e secondo grado). I dettagli sui contenuti e le modalità di erogazione di questi MOOC, aperti dal 2015 dal Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino, saranno dati nel §3.

Alla radice del progetto è l'ipotesi che un MOOC sia un buon ambiente per perseguire due temi significativi nelle ricerche sulla formazione insegnanti (di matematica in questo caso):

(i) capire come gli insegnanti possano effettivamente apprendere da questa esperienza online;

(ii) se/come/in che modo l'esperienza dei MOOC cambi le loro conoscenze, credenze e pratiche didattiche.

Queste questioni non sono peregrine: attualmente, sebbene siano presenti in letteratura studi sull'argomento, la ricerca non ha ancora sviluppato un quadro sufficiente a spiegare come le modifiche di conoscenze (intese come sviluppo professionale degli insegnanti) possano eventualmente verificarsi come prodotto delle attività in questi nuovi ambienti totalmente online. La letteratura in merito è scarna (Siemens, 2004; Downes, 2012; Ozturk, 2015; Teixeira et al., 2015) e la carenza è poi quasi totale per quanto riguarda attività di aggiornamento degli insegnanti (Panero *et al.*, 2017). Infatti, al recente XIII Convegno quadriennale dell'International Commission on Mathematical Education, svoltosi ad Amburgo nel luglio 2016, che raccoglie le esperienze più significative sulle ricerche e pratiche di insegnamento a livello planetario, il Topic Study Group 44, dedicato al "Distance learning, e-learning, blended learning" ha mostrato pochi studi su esperienze con MOOC finalizzati all'aggiornamento degli insegnanti.

Al contrario, esiste un'ampia letteratura (Robutti *et al.*, 2016) che tratta il modo in cui gli insegnanti possono sviluppare il loro apprendimento professionale in corsi tradizionali, *face-to-face*, in particolare quando il tema dell'aggiornamento riguarda il rapporto tra istruzione e tecnologia.

Basandosi su questa situazione, Taranto in collaborazione con Arzarello e Goos (Taranto *et al.*, 2017), ha elaborato un nuovo quadro teorico, che consente un'analisi precisa del modo in cui un docente partecipa a un MOOC come quelli qui discussi, finalizzati all'aggiornamento professionale degli insegnanti in servizio, del suo conseguente sviluppo professionale e dei possibili cambiamenti nelle sue pratiche didattiche.

In questo contributo ci limiteremo a dare una descrizione parziale del quadro, illustrando gli elementi che permettono di rispondere alla prima delle tematiche sopra evidenziate, ossia *capire come gli insegnanti possano effettivamente apprendere, ovvero beneficiare di uno sviluppo professionale, da queste esperienze online*. Lo spazio virtuale creato dal MOOC si presenta, infatti, inizialmente come un archivio informatico ("repository"), un collettore di strategie e metodologie didattiche, nonché risorse tecnologiche, opportunamente selezionate dai formatori. Successivamente, all'ingresso degli insegnanti-corsisti, evolve. Difatti, tale spazio virtuale cresce, a partire dalle proposte del MOOC, proprio grazie ai più diversi contributi che i singoli corsisti spontaneamente condividono tra di loro, utilizzando le diverse opportunità comunicative che la piattaforma tecnologica offre. Cresce così un contesto complesso analogo a quello dei social network, in cui si aggregano gruppi diversi di interesse, diversi temi sono discussi e approfonditi e i singoli trovano così spesso l'opportunità di cambiare positivamente le loro credenze e obiettivi adattando quanto si discute al proprio contesto di lavoro. Questo aspetto, proprio per la specificità tipica del canale multimodale e libero che un MOOC offre, è difficilmente presente in un corso tradizionale *face-to-face*. In questo senso i partecipanti al MOOC evolvono verso la costituzione di una o più comunità di pratica ed eventualmente anche di indagine. Tutti questi punti qui accennati costituiscono il contenuto di questo articolo. Tratteremo pertanto la validità dell'ipotesi di lavoro (i) sopra elencata, discutendo come il progetto Math MOOC UniTo, promosso dal Dipartimento "G. Peano" dell'Università di Torino (descritto nel §3), si situa nel quadro istituzionale della formazione dei docenti promosso dal MIUR in relazione alle necessità di aggiornamento (§2); delineeremo il quadro teorico che dà conto della complessa dinamica sopra descritta (§4) e illustreremo i nostri argomenti con esempi desunti dalle concrete esperienze vissute dai nostri insegnanti-corsisti nei nostri MOOC (§6). Infine accenneremo a come uno studio così impostato rappresenti una nuova pista di indagine pedagogica in relazione alle modalità di interazione che le nuove tecnologie offrono per il miglioramento della professionalità degli insegnanti (§7).

2. La formazione docenti

La formazione in servizio dei docenti ha subito una svolta significativa nell'ottobre 2016 con il Piano nazionale per la formazione in servizio dei docenti (http://www.istruzione.it/piano_docenti/), che pone come centrale il problema della formazione, insieme con alcuni punti fondamentali che lo valorizzano, come la collaborazione tra docenti e a livello istituzionale, la qualità dei percorsi formativi, una continua innovazione, lo sviluppo professionale del docente.

Dal Piano per la formazione si legge infatti (p. 7): "La collaborazione va incoraggiata a tutti i livelli:

– a scuola, anche istituzionalizzando modelli di tutoraggio e mentoring;
– a livello territoriale, per la costruzione di filiere formative efficaci e di reti cooperative per lo sviluppo di azioni coordinate;
– a livello nazionale, all'interno dei gruppi disciplinari e interdisciplinari;
– a livello internazionale, stimolando l'apertura al confronto e l'intensificazione degli scambi internazionali, anche attraverso esperienze oggi rese possibili dai gemellaggi europei".

L'attenzione delle istituzioni per la formazione docente, intesa in senso moderno e condiviso nella ricerca internazionale, è un punto qualificante dell'iniziativa. Il nostro progetto di MOOC, come modulo formativo per docenti in servizio dedicato alla didattica della matematica si colloca in quest'ottica sottolineata dalle istituzioni.

In particolare, promuove prima di tutto la collaborazione tra istituzioni (Università e scuole) coinvolte nel progetto di formazione. Quindi, sostiene e stimola la collaborazione tra docenti, sia a distanza, se lontani logisticamente, sia in presenza se fanno parte della stessa scuola o di comunità che hanno l'occasione di incontrarsi. In modo particolare, come vedremo nel §5, creando una comunità virtuale sul web, dà l'occasione a tutti quei docenti che vivono in posizioni decentrate di non sentirsi isolati, bensì di condividere obiettivi, attività, metodologie con colleghi vicini e lontani. Infatti, l'isolamento può essere sentito sia per motivi logistici, sia per motivi culturali: assistiamo spesso nella formazione dei docenti a casi narrati di docenti, anche in scuole grandi con molti colleghi, che si sentono isolati perché non hanno modo di condividere idee e metodologie educative nuove. Ultimo, ma non meno importante, è la collaborazione a livello internazionale. I docenti in genere non hanno opportunità istituzionali per collegarsi con la comunità internazionale, ma gli universitari e i formatori sì. Quindi la proposta formativa qui descritta è stata realizzata anche tenendo conto del dibattito che si svolge a livello internazionale sulla formazione dei docenti, sulla collaborazione, sulle strategie e le metodologie didattiche innovative.

Sempre nel Piano per la formazione si legge (p. 63): "La formazione che lascia il segno si basa sul confronto tra pari e sulla rielaborazione critica delle esperienze didattiche, ma richiede anche l'introduzione di stimoli culturali, di sguardi diversi, di prospettive che possono andare al di là della propria comunità di appartenenza. Questo è il senso dell'apertura del sistema alle strutture universitarie".

Il MOOC costituisce pertanto un'occasione di formazione dei docenti, ma anche un'occasione per i ricercatori di condurre uno studio sui docenti che lavorano e imparano in collaborazione. La nostra ricerca è infatti finalizzata a capire come si realizzano le pratiche di collaborazione dei docenti, come evolvono nel tempo in seguito agli stimoli ricevuti e alla interazione attivata in piattaforma e come queste si differenzino da quelle prodotte nei corsi *face-to-face*. La ricerca è inoltre finalizzata a capire l'intreccio dinamico che si stabilisce tra le pratiche e i prodotti delle pratiche stesse, in termini di messaggi e interventi in piattaforma, ma non solo: in termini di rielaborazione di attività e percorsi didattici, di file multimediali, di software, e in termini anche di progettazione di nuovi materiali.

Nel seguito si espongono quindi le nostre esperienze di formazione insegnanti tramite MOOC, con un focus su alcuni esempi relativi alle strategie e metodologie di didattica della matematica che sono state condivise e approfondite con i corsisti.

3. Il progetto Math MOOC UniTo

Dal settembre 2013 al giugno 2015, presso il Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino, F. Arzarello e O. Robutti hanno tenuto, insieme con colleghi del Dipartimento e docenti molto esperti della scuola secondaria, un Master di secondo livello "Formatori in Didattica della Matematica", promosso dal MIUR e rivolto ad insegnanti-ricercatori che hanno ricevuto formazione in Didattica della Matematica e su processi di insegnamento-apprendimento innovativi attraverso i materiali didattici del progetto m@t.abel (https://goo.gl/Q30Dn0)[1]. Alla fine del Master, formatori e corsisti avevano identificato le seguenti necessità: consapevolezza del ruolo della formazione nell'attività dell'insegnamento; volontà di sviluppare migliori pratiche di innovazione utilizzando anche software matematici; riconsiderare in termini di apprendimento le pratiche di condivisione dei social media diffuse tra gli studenti.

Alcuni corsisti del master (V. Alberti e S. Labasin) erano stati affascinati dalle caratteristiche di un fenomeno emergente in quel periodo, i MOOC, ovvero corsi open, che consentono una gestione autonoma dei tempi (accesso "anywhere" e "anytime") e promuovono apprendimento e cooperazione. I MOOC sono quindi stati visti come trampolino di lancio per poter concretizzare le sentite necessità, mostrandosi come possibilità di offrire un'autentica esperienza di sviluppo professionale rivolta ad un grande numero di insegnanti, su base nazionale. Ha così preso vita il progetto Math MOOC UniTo, ossia progettazione, produzione ed erogazione di MOOC di Matematica destinati alla formazione di insegnanti (in servizio) della scuola secondaria (I e II grado). Il gruppo di lavoro è costituito dai seguenti formatori: docenti univer-

[1] m@t.abel è un programma nazionale pluriennale promosso dal MIUR che ha proposto l'innovazione nell'insegnamento della matematica, basandosi su concrete attività proposte agli insegnanti e discusse con loro in appositi programmi di sviluppo professionale.

sitari (F. Arzarello e O. Robutti), una studentessa di dottorato (E. Taranto) e alcuni insegnanti-ricercatori (V. Alberti, A. Coviello, S. Labasin) che si occupano del coordinamento della progettazione, della trasposizione digitale e del monitoraggio; inoltre un gruppo di circa 15 insegnanti-ricercatori che elabora i contenuti delle attività. Si tratta dunque di MOOC progettati da insegnanti (con la collaborazione dei ricercatori) per insegnanti (in servizio), erogati attraverso la piattaforma “DI.FI.MA. in rete” (http://difima.i-learn.unito.it/) su Moodle.

Sono stati progettati 4 MOOC, uno per ogni Nucleo generale di programmazione, proprio sia delle Indicazioni ministeriali sia del progetto m@t.abel (Numeri, Geometria, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni). Ad oggi sono stati erogati il *MOOC Geometria* (da Ottobre 2015 a Gennaio 2016, con 424 insegnanti italiani e tasso di completamento pari al 36%) e il *MOOC Numeri* (da Novembre 2016 a Gennaio 2017, con 278 insegnanti italiani, concluso dal 43% di loro); il MOOC *Relazioni e Funzioni* partirà a Gennaio 2018.

La durata di ogni MOOC realizzato varia da 6 a 8 settimane. I corsi, offerti gratuitamente, si svolgono interamente a distanza e rispondono in maniera immediata alla richiesta di una formazione che si adatti ad ogni esigenza di luogo, orario e tempi di apprendimento. Ognuno di essi è composto da moduli di apprendimento, dei quali il primo è introduttivo (evidenzia le principali caratteristiche organizzative e spiega la struttura generale del MOOC che ci si appresta a seguire); i successivi volti a focalizzarsi su specifici nodi concettuali propri della didattica della Geometria o di Numeri, rispettivamente; e il finale è dedicato alla realizzazione di un Project Work (progettazione di un’attività didattica che si ispiri ai temi trattati durante il MOOC) e alla Peer Review del Project Work realizzato da un collega.

I materiali in essi contenuti, prodotti al Master, sono proposte didattiche valide, che hanno preso spunto da quelle raccolte in m@t.abel, riviste e approvate dai docenti responsabili del Master (F. Arzarello e O. Robutti). Tali materiali vengono resi fruibili ai docenti iscritti al MOOC mediante strumenti di e-learning innovativi e open source, quindi scaricabili gratuitamente dalla rete e perciò anche facilmente implementabili nelle proprie pratiche didattiche. Il materiale contenuto in ogni modulo, consultabile sia in modalità sincrona che asincrona, spazia da video di docenti universitari, ad articoli e link (che rimandano a YouTube e GeogebraTube). C’è una specifica sezione di “learning activity” (insieme delle attività da svolgere durante il periodo previsto dalla formazione); specifiche bacheche di comunicazione predisposte (Forum; Padlet: it.padlet.com[2]; Tricider: www.tricider.com[3]), ovvero i luoghi che permettono scambi di idee, esperienze e materiali tra i corsisti; una sezione “webinar”, che consente ai corsisti di partecipare a videoconferenze – preventivamente pubblicizzate – con l’esperto (docente universitario o insegnante-ricercatore) del modulo.

Il completamento delle attività richieste per ogni modulo è attestato con l’assegnazione di un “badge”. Al termine del percorso, se si sono collezionati tutti i badge e dunque soddisfatte tutte le consegne del MOOC, si ottiene la certificazione finale di attestata frequenza e accertamento delle attività effettivamente svolte.

[2] Bacheca di comunicazione molto simile ad un Forum, in cui si possono postare, oltre al testo, anche documenti, immagini e video. A differenza del forum, Padlet non permette la nidificazione delle risposte.

[3] Per maggiori informazioni in merito si veda la Figura 9.

4. Quadro teorico

Un MOOC è un ambiente molto dinamico e complesso, in cui si alternano diversi protagonisti vicendevolmente. Infatti, nella fase di progettazione, quando inizia a prendere forma, il MOOC è abitato dai progettisti e dai formatori che propongono i materiali e le risorse da includervi. Una volta pronto, esso è ancora ad uno stato inerte; viene poi consentito l'accesso a nuovi partecipanti: i corsisti. Essi lo scoprono settimanalmente, poiché ogni nuovo modulo si apre di settimana in settimana, con i precedenti che rimangono via via aperti. Quindi i corsisti possono scoprire le novità contenute nel modulo appena aperto, ma allo stesso tempo andare ad approfondire i contenuti delle settimane precedenti (leggere più attentamente attività viste velocemente in precedenza; ritornare a leggere i commenti lasciati dagli altri, come pure lasciarne di propri). A volte, come è accaduto nel nostro caso, i corsisti possono condividere i propri materiali con gli altri corsisti tramite le bacheche di comunicazione, espandendo l'originaria struttura del MOOC.

Al fine di descrivere e analizzare le dinamiche che si svolgono all'interno di un MOOC, Taranto, lavorando con Arzarello, ha sviluppato un quadro teorico chiamato MOOC-MDT (Taranto *et al.*, 2017). Questo integra tre quadri teorici in una forma nuova: la Meta-Didactical Transposition, o brevemente MDT (Arzarello *et al.*, 2014), il Connettivismo (Siemens, 2004; Downes, 2012) e l'Approccio Strumentale (Verillon & Rabardel, 1995). In ciò che segue daremo una sintetica idea del quadro.

Innanzitutto possiamo considerare un MOOC come un artefatto (Verillon & Rabardel, 1995), cioè un insieme statico di materiali. Il Connettivismo permette di considerare che il MOOC-artefatto ha una sua rete di conoscenza, i cui nodi sono i contenuti, le idee, le immagini e i video usati; e le connessioni sono i collegamenti tra coppie di nodi. Quando un modulo del MOOC viene attivato, esso crea in maniera dinamica una struttura complessa che noi chiamiamo *ecosistema*, intendendo "tutte le relazioni (scambio di materiali, esperienze e personali idee/punti di vista) messe in atto dai partecipanti di una comunità online, grazie agli strumenti tecnologici attraverso cui essi interagiscono tra loro, stabilendo connessioni all'interno di un dato contesto" (Taranto *et al.*, 2017).

La rete di conoscenza del MOOC-ecosistema è dinamica: essa evolve come rete del MOOC-artefatto grazie ai contributi dei partecipanti. Anche la rete degli individui evolve come una personale auto-organizzazione (Siemens, 2004) dell'ecosistema. Il processo di trasformazione da artefatto a strumento (Verillon & Rabardel, 1995) è qui sostituito dall'evoluzione artefatto-ecosistema/strumento.

In un MOOC ci sono due comunità, una comunità di progettisti e ricercatori (che nel seguito indicheremo come "formatori") e una comunità di docenti-corsisti (che nel seguito indicheremo semplicemente come corsisti), così come anche individuate nella MDT (Arzarello *et al.*, 2014). Le prasseologie meta-didattiche[4] iniziali dei formatori evolvono erogando il percorso

[4] La MDT è un modello che descrive il processo di sviluppo professionale degli insegnanti, inteso come processo evolutivo e dinamico compiuto dall'attività sia degli insegnanti sia dei formatori durante un corso di formazione *in presenza*. Questa attività viene descritta facendo appello al costrutto teorico delle prasseologie meta-

formativo attraverso il MOOC e si basano su due consapevolezze. La prima è che, all'interno del MOOC, si ha un apprendimento di tipo connettivista: ogni corsista è parte di una comunità e mette in atto dei processi autonomi, infatti ha l'opportunità di condividere i suoi punti di vista, auto-organizzando le informazioni che riceve tramite la fruizione dei materiali del MOOC, creando così nuove connessioni e rivalutando quelle che già esistevano nella sua rete di conoscenza. La seconda è che ciò che viene proposto nel MOOC dovrebbe incoraggiare i corsisti a sperimentare in classe.

Le prasseologie meta-didattiche dei formatori costituiscono dunque le connessioni della rete del MOOC-artefatto, ossia i prodotti del MOOC. Durante l'implementazione della rete di conoscenza del MOOC-artefatto, infatti, i formatori incoraggiano la sua natura di ecosistema, condividendo strumenti e ponendo appropriate domande chiave. Inoltre i compiti che essi progettano suggeriscono ai corsisti, in maniera più o meno esplicita, di usare i materiali proposti in classe. In questo modo il MOOC è arricchito dalle testimonianze delle esperienze di insegnamento dei corsisti: questo processo innesca un circolo virtuoso che incoraggia altri corsisti a sperimentare gli stessi materiali.

La comunità dei corsisti non è un soggetto unitario che apprende: il MOOC-ecosistema è uno strumento che appartiene ad ogni singolo corsista. I corsisti devono svolgere multi-compiti, attraverso multi-tecniche, giustificate appropriatamente. Infatti essi devono visionare i materiali proposti, condividere le proprie idee mediante gli strumenti di condivisione e sperimentare le attività. Questi compiti non sono predeterminati, infatti dipendono dal tempo, dal modo e dal grado di approfondimento con cui ogni corsista vi si dedica. Le multi-tecniche sono perciò i modi con cui i corsisti ampliano e modificano la propria rete attingendo da quella dell'ecosistema, e influenzandola a loro volta (influenzando così tutti gli altri corsisti). Le prasseologie meta-didattiche di ogni corsista innescano quello che noi chiamiamo "doppio processo di apprendimento"[5]: visibile, da un lato nel fatto che il MOOC-ecosistema è uno strumento di apprendimento per il singolo individuo, dall'altro che l'uso del MOOC-strumento da parte dell'individuo genera apprendimento per l'intero ecosistema.

Il processo è dinamico ed è costituito dalle seguenti componenti che sono intrecciate e che si auto-alimentano a vicenda (Figura 1):

didattiche (Arzarello et al., 2014, pp. 353-355) di insegnanti e formatori, che consistono del compito nel quale essi sono impegnati durante il programma di formazione, delle tecniche usate per risolverlo, insieme alle sue giustificazioni teoriche.

[5] Si noti, nel seguito, come il doppio processo di apprendimento derivi dall'utilizzo della lente dell'Approccio Strumentale e del Connettivismo. Anche da un punto di vista di terminologia, il termine "processo" è ripreso dall'Approccio Strumentale, mentre il termine "apprendimento" dal Connettivismo.

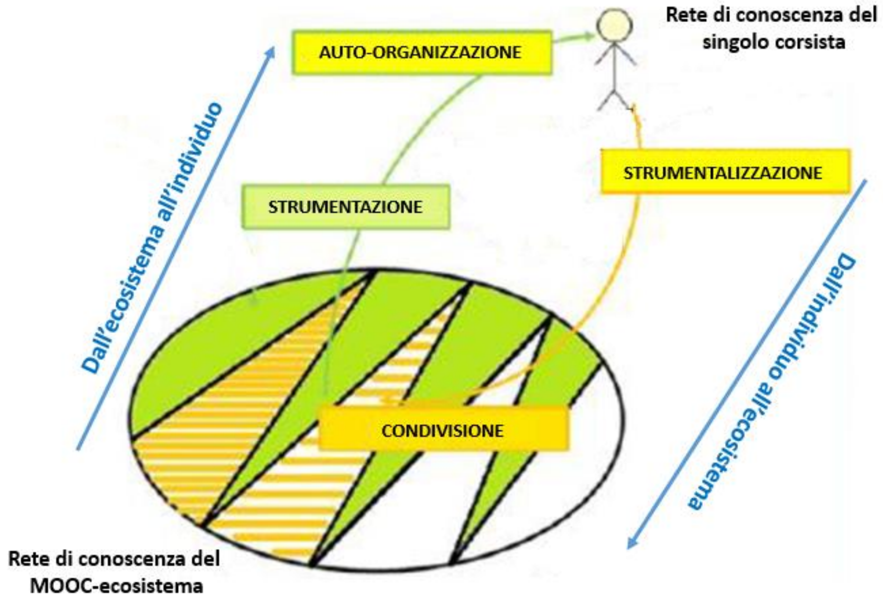


Figura 1 – Doppio processo di apprendimento

– *strumentazione/auto-organizzazione* (dall'ecosistema all'individuo): è il processo con cui la rete del MOOC-ecosistema amplia la rete di conoscenza dell'individuo. In particolare, la strumentazione (Verillon & Rabardel,1995) è il processo con cui il caos (Siemens, 2004) della rete dell'ecosistema raggiunge l'individuo. Le molte novità e diversità di opinioni e di esperienze, fanno in modo che l'individuo si confronti con nuovi schemi d'uso (di Didattica della Matematica). Questo instaura nuove connessioni, in uno stadio ancora caotico. A questo processo segue una fase di auto-organizzazione (Siemens, 2004), che avviene nel momento in cui l'individuo auto-organizza le informazioni presenti nel MOOC, seleziona quali schemi d'uso proposti sono per lui di valore e quali no, e amplia e modifica la propria rete di conoscenza su questi. Il MOOC-strumento è, in questo processo, sorgente da cui il corsista apprende.

– *strumentalizzazione/condivisione* (dall'individuo all'ecosistema): è il processo con cui la rete di conoscenza dell'individuo amplia la rete del MOOC-ecosistema. La strumentalizzazione (Verillon & Rabardel,1995) è il processo con cui l'individuo, con la propria rete di conoscenza rinnovata (sia dal processo precedente, che da altri avvenimenti esterni al MOOC, come dalla sperimentazione), pensa e costruisce in autonomia nuove connessioni. Stimolato da un compito richiesto dal MOOC, si rivolge all'ecosistema per trasformarlo secondo i propri (nuovi) schemi d'uso (di Didattica della Matematica), e per integrarlo con le proprie strutture cognitive. La condivisione consiste nel processo con cui il MOOC accoglie il contributo del singolo corsista e lo mette a disposizione di tutti: le informazioni vanno verso tutti i membri dell'ecosistema che possono quindi essere influenzati dai nuovi contenuti presenti nel MOOC.

Il MOOC-strumento a disposizione del singolo corsista, è, in questo processo, sorgente da cui l'ecosistema apprende.

Poiché al MOOC partecipa un gran numero di iscritti, il processo si itera: ad un momento di condivisione segue una nuova strumentazione; a un'auto-organizzazione una strumentalizzazione. Va sottolineato che i due processi sono "intrecciati": non esiste un momento in cui termina uno ed inizia il successivo. Inoltre, i due processi sono intrecciati a tal punto che ognuno di essi innesca il successivo, il che è determinato dal fatto che il MOOC-ecosistema si presenta come "un aggiornamento continuo del MOOC-artefatto".

È proprio in questo complesso e iterato processo di apprendimento che giace la differenza tra il quadro della MDT (formazione in presenza) e il MOOC-MDT (formazione a distanza). Infatti, nella MDT i formatori basano le loro proposte in accordo alle pratiche che reputano appropriate, avendo una chiara idea di quanto i corsisti apprendono via via da tali proposte mostrate. Al contrario, nel MOOC-MDT il processo appare più difficile da controllare: i formatori non sanno "cosa" il corsista ha veramente visionato tra i materiali presentati, né tanto meno possono sapere come lui li stia interpretando (a meno che egli non lo dichiari apertamente sulle bacheche di comunicazione). Contemporaneamente, i corsisti beneficiano di materiali forniti non solo dai formatori, ma anche da altri corsisti che condividono propri materiali e/o idee usando le bacheche di comunicazione. Il processo evolve quindi in maniera stocastica: un ruolo determinante è giocato dal singolo corsista e dal suo sentirsi parte di una comunità con cui collaborare, dalla quale farsi ispirare e condividere risultati.

5. Domanda di ricerca

Come evidenziato in precedenza, l'intento del contributo è quello di fornire risposta ad una tematica di ampio respiro sui MOOC: come gli insegnanti possono effettivamente beneficiare di uno sviluppo professionale da un'esperienza di formazione tramite MOOC. Alla luce del quadro teorico esposto, possiamo formulare la seguente domanda di ricerca: *Come avviene il doppio processo di apprendimento che permette lo sviluppo della rete di conoscenza degli insegnanti che prendono parte ad un MOOC-ecosistema? Esistono particolari potenzialità in un MOOC-artefatto che, se opportunamente organizzate, favoriscono tale sviluppo della rete di conoscenza individuale, ossia un mutamento delle proprie prasseologie meta-didattiche?*

6. Le potenzialità dei MOOC Geometria e Numeri

Soffermandoci solo al livello di progettazione, il MOOC-artefatto, ossia il luogo in cui hanno accesso solo i formatori (docenti universitari e insegnanti-ricercatori), è il contenitore di specifici prodotti, ovvero i materiali ricchi di metodologie didattiche innovative e gli specifici strumenti tecnologici. Possiamo quindi intenderlo come un archivio da cui gli insegnanti possono trarre spunto.

Una volta che però il MOOC viene aperto, questo viene abitato dai docenti-corsisti, che mettono in moto l'ecosistema con quelli che sono i processi esercitati sui prodotti. Infatti, grazie alle bacheche di comunicazione inserite nel MOOC, i corsisti – abitanti di diverse realtà geografiche e di diverso ordine scolastico – si ritrovano ad avere la rara occasione di poter riflettere insieme per orientare opportunamente strategie, processi e materiali, legati non solo a fascia di età, tipologia di scuola e situazione sociale/individuale, ma anche ai contenuti stessi della disciplina che presentano ostacoli cognitivi specifici. La ricchezza delle loro interazioni fa sì che ognuno abbia la possibilità di estendere la propria rete di conoscenza, ma al tempo stesso è lo stesso MOOC che si arricchisce con i loro contributi, in un'alternanza di MOOC-ecosistema/strumento intrecciata ed iterata. Viene via via a costituirsi una comunità unicamente di pari, che si profila essere una comunità di pratica (Wenger, 1998) sostenuta dalla vigile, ma non invadente presenza dei formatori[6].

Di seguito si alterneranno quindi l'esposizione della metodologia di conduzione della ricerca empirica e l'esposizione dei risultati, al fine di mostrare come i corsisti hanno tratto vantaggio da queste potenzialità dei MOOC: MOOC come archivio; interazione tra i partecipanti; comunità di pratica.

6.1. MOOC come archivio

In MOOC Geometria e MOOC Numeri sono stati realizzati rispettivamente 5 moduli, con titoli accattivanti, su specifici nodi concettuali e/o argomenti. Ognuno di essi ha un modulo finale che verte su attività di produzione e revisione da parte dei corsisti (Figura 2).

	MOOC Geometria		MOOC Numeri	
	Titoli	Contenuti	Titoli	Contenuti
Modulo 1	Rampe, vele, parchi e piegatura della carta	Distanza con attività laboratoriali e utilizzo di Geogebra	Meteoriti, batteri, chicchi di riso, i numeri e il loro significato	Ordine di grandezza e senso del numero con attività laboratoriali e utilizzo di Geogebra
Modulo 2	Da orologi, girandole e pattinatori allo spettacolo di Natale	Angolo con attività laboratoriali e utilizzo di Geogebra	Metodologia MERLO	Riconoscere rappresentazioni su diversi registri con stesso significato
Modulo 3	Eredità, un problema di Polya e quale dimostrazione	Argomentare, congetturare e dimostrare e utilizzo di Geogebra	Valutazione e INVALSI	Valutare intelligenze diversificate e competenze
Modulo 4	Valutazione- INVALSI	Valutare intelligenze diversificate e competenze	Salire le scale	Induzione/ricorsione e utilizzo di Geogebra
Modulo 5	Metodologia MERLO	Riconoscere rappresentazioni su diversi registri con stesso significato	Aritmetica, Algebra e i Linguaggi matematici	Aritmetica, linguaggio algebrico, il significato dei simboli e utilizzo di Geogebra
Modulo finale	Project Work finale e Peer Review	Progettare un'attività didattica mediante un software specifico e fare la revisione di un'attività progettata da un altro corsista	Project Work finale e Peer Review	Progettare un'attività didattica mediante un software specifico e fare la revisione di un'attività progettata da un altro corsista

Figura 2 – Moduli dei MOOC Geometria e Numeri

[6] Scelta metodologia dei formatori è stata infatti quella di intervenire il meno possibile nelle bacheche di comunicazione per non snaturare gli interventi dei corsisti e sostenere la nascita di una comunità interattiva fatta proprio da soli corsisti. Tuttavia, i formatori erano sempre vigili, dietro le quinte, per rispondere a qualsiasi necessità tecnico-didattica si poteva presentare.

In ogni modulo vengono proposte specifiche metodologie proprie della didattica della matematica, quali la didattica laboratoriale (Anichini *et al.*, 2004) con attenzione al considerare attività che prendano spunto da contesti reali, quindi familiari o facilmente immaginabili per gli studenti; lavori di gruppo per il saper fare in ottica collaborativa; stimolazione alla discussione matematica (Bussi et al., 1995); la metodologia MERLO (Arzarello, Robutti & Carante, 2015); utilizzo di tecnologia (soprattutto Geogebra con esempi guidati di costruzione), ma anche materiali poveri (cartoncino, spago…). Inoltre, vengono proposte attività con specifiche strategie didattiche, volte a sradicare comuni misconcetti degli studenti o ad introdurre argomenti presenti nelle Indicazioni Nazionali, ma poco trattati tra i banchi di scuola. Rispetto allo sradicare i misconcetti, facciamo per esempio riferimento ai Moduli 1 e 2 del MOOC Geometria, nei quali è stato importante per i corsisti ricevere esempi di attività per insistere sulla differenza tra verticale e perpendicolare, oppure tra arco ed angolo; oppure ancora al Modulo 1 del MOOC Numeri, in cui si sono presentate diverse attività orientate a sviluppare correttamente negli allievi il senso del numero. Rispetto invece ad argomenti poco trattati tra i banchi di scuola, ci riferiamo al modulo 4 del MOOC Numeri, in cui è stato affrontato il tema della ricorsione. Qualche corsista, infatti, si esprime così: "il tema della ricorsione mi ha stimolato parecchio perché, sinceramente, mi mancava una trattazione teorica".

Vedremo ora brevemente uno tra gli esempi sopra richiamati: riporteremo le strategie presentate nel MOOC ed i giudizi dei corsisti in merito. Nelle sezioni successive vedremo invece come questi elementi del MOOC-artefatto abbiano poi dato origine a specifici processi messi in atto dai corsisti nel MOOC-ecosistema/strumento.

DIFFERENZA TRA ARCO E ANGOLO (tratta da m@t.abel: https://goo.gl/HWGY5g; attività proposta per la scuola secondaria di primo grado – I anno).

L'angolo è uno dei primi enti della geometria nel quale gli alunni si imbattono nel loro percorso scolastico. E' nota tuttavia la difficoltà di raggiungere un'adeguata padronanza di questo concetto. Il problema della sua costruzione obbliga i ragazzi ad affrontare un grosso ostacolo epistemologico: quello della comprensione che l'ampiezza dell'angolo non varia al variare della lunghezza dei lati. Partendo da una situazione problematica legata all'orologio e allargandola alla costruzione di un orologio di grandi dimensioni, si vuole che gli allievi ottengano angoli piccoli (ad es. di un grado) su circonferenze di raggi diversi, in modo da associare l'angolo allo spazio tra le due semirette e non semplicemente all'arco che si usa per indicarlo. Questa esperienza ha lo scopo di evitare il fraintendimento, diffuso tra gli allievi, che l'angolo si identifichi con l'arco oppure con una regione finita di piano.

Figura 3 – Individuazione delle ore 3, 6, 9, 12

Figura 4 – Divisione dell’arco corrispondente all’angolo di 90° in tre parti uguali per ottenere l’ora 1 corrispondente all’angolo di 30°

Figura 5 – Misura dell’arco corrispondente all’angolo di 90°

Figura 6 – Angolo di 6°, corrispondente ad 1 minuto primo, quinta parte dell’angolo di 30° corrispondente all’ora 1

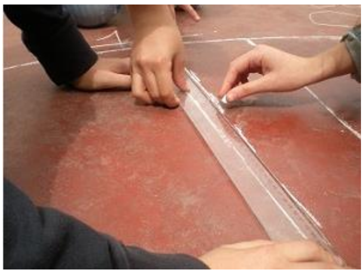


Figura 7 – Divisione in 6 parti dell’arco corrispondente all’angolo di 6° per ottenere l’angolo di 1°

Figura 8 – Angolo di 1°

La metodologia adottata si fonda sull’orchestrazione da parte dell’insegnante della discussione matematica, alternando momenti di lavoro a classe intera, ad altri a piccolo gruppo, per garantire la cooperazione, l’interazione, il confronto con i compagni. Occorre dedicare tempo sufficiente agli allievi per argomentare, discutere le proprie soluzioni, sostenere le proprie affermazioni, validare la propria attività matematica. La raccolta delle ipotesi di soluzione va fatta con estrema disponibilità, senza valorizzarne una in particolare, oppure stroncarne una non corretta.

Questa è l’attività con cui si apre il modulo. Ecco qualche commento “a caldo” dei corsisti, rilasciati sul Forum dedicato al commentare questa attività proposta, testimonianza della messa in atto della prima fase del doppio processo di apprendimento: la strumentazione/auto-organizzazione.

F.D. “mi sembra interessante”

F.G. “Domani provo con la mia classe prima. L’attività è molto ben strutturata e mi piacciono molto le domande stimolo proposte […]”

S.T. “Leggo che state affrontando le proposte in classe prima mentre io sto lavorando in seconda […] sto testando queste attività (entusiasmanti) più come consolidamento di due aspetti della geometria già trattati. E l’esperienza comunque funziona. Domani lavoro di sintesi dell’orologio. Vediamo se mi sorprendono. E’ una classe volonterosa ma con poche competenze”.

Tutti coloro che sono intervenuti nel Forum hanno certamente sperimentato una fase di strumentazione, nel momento stesso in cui hanno cliccato il link che li ha indirizzati all’attività dell’angolo di un grado. La fase di auto-organizzazione segue in maniera spontanea: nell’attimo in cui leggono le informazioni e le reputano un valore aggiunto per le proprie pratiche didattiche, stanno automaticamente espandendo la loro rete di conoscenza.

Se da un lato ciascuno formula il proprio giudizio, mettendo in atto una fase di strumentazione; qualcuno inizia anche a rispondere a commenti di altri colleghi, mettendo già in atto una fase di strumentalizzazione, ossia inizia a costruire autonomamente nuove connessioni sfruttando il MOOC-strumento, espandendo al contempo la rete dell’ecosistema.

F.B. “credo sia fondamentale che gli studenti sperimentino col movimento personale molti concetti della geometria. Mi chiedo se molte delle difficoltà che oggi hanno i ragazzi sono dovute al fatto che si gioca di meno all’aperto e più sul PC […]”

S.C. “Condivido pienamente la tua riflessione, al punto che non appena comincerò a trattare gli angoli nella classe prima di quest’anno, mi trasferirò per qualche ora in palestra, in collaborazione con l’insegnante di educazione fisica, che si è reso disponibile. Vorrei sperimentare attività che permettano di elaborare il concetto di angolo attraverso i movimenti del corpo... un po’ la scoperta dell’acqua calda, me ne rendo conto, ma tali esperienze mancano ai ragazzi!!!”.

Nel Modulo 2 seguono poi molti altri esempi di attività, scrupolosamente dettagliate come la precedente (“Muoversi con gli angoli” che parte dalla costruzione della rosa dei venti per arrivare a muoversi nello spazio, arrivando a definire di quanti gradi ci si deve spostare rispetto al nord (direzione) e di quanti metri (distanza) in modo che chiunque possa raggiungere lo stesso punto in modo inequivocabile; “Dall’astronomia alla trigonometria” in cui si discutono strategie per calcolare l’altezza di un palazzo, riuscendo a misurare la sua ombra. Ci sono soluzioni attuabili con carta e penna, altre con Geogebra, fin poi ad arrivare alla definizione di sen$x$, cos$x$, tan$x$ in un triangolo rettangolo, per poi estendere il concetto di seno di un angolo a qualsiasi angolo e così passare alle funzioni goniometriche) ed ancora altre sulle quali non abbiamo spazio per soffermarci.

I MOOC si possono quindi effettivamente considerare come degli archivi, ossia grandi contenitori di materiali a cui gli insegnanti possono attingere ed ispirarsi nella loro pratica didattica[7], integrandoli opportunamente, a seconda dell'ordine scolastico e/o tipologia di scuola nei quali insegnano.

6.2. MOOC e interazioni tra i partecipanti

I corsisti comunicano tra loro, in modalità sincrona e/o asincrona, attraverso specifiche bacheche di comunicazione. In Figura 10 una descrizione un po' più approfondita delle bacheche di comunicazione presenti nel Modulo 2.

Bacheca di comunicazione	**Azioni promosse**	**Motivi della scelta**
Forum	Per le discussioni pubbliche, dove ognuno può leggere e rispondere ai messaggi, usando risposte nidificate	Per dare ai corsisti uno strumento di discussione conosciuto e friendly da usare
Tricider	Per fare facili brainstorming e votare. Consente di prendere decisioni, ottenere informazioni e generare idee.	Per facilitare il prendere decisioni dopo ogni discussione, con la richiesta di votare.

Figura 9 – Bacheche di comunicazione del Modulo 2 del MOOC Geometria

È interessante analizzare come continuano le conversazioni dei corsisti man mano che esplorano il modulo. Siamo quindi nella fase della strumentalizzazione/condivisione, ovvero quel momento in cui ogni corsista ha ormai auto-organizzato i materiali del modulo e grazie a questi ha espanso la propria rete di conoscenza. Il corsista inizia così a creare nuove connessioni tra quella che era la sua precedente conoscenza e ciò che via via apprende non solo consultando le attività del MOOC, ma anche i commenti dei suoi pari, insegnanti di matematica che come lui sono quotidianamente immersi tra i banchi di scuola.

Interessante, nel Forum, è una discussione chiamata "Radiante" (dal primo corsista che ha iniziato a scrivere), che ha ricevuto 21 repliche. Vediamo il primo post e le risposte più significative.

N.C. – 2 novembre 2015, ore 09:49 – "Le attività proposte mi hanno fatto riflettere su quanto sia delicato lo snodo concettuale "angolo vs. arco". Ma quando i ragazzi al superiore iniziano la Trigonometria, viene presentato loro il Radiante che, tra l'altro, permette di non distinguere più tra (ampiezza dell')angolo e (lunghezza dell')arco. Mi piacerebbe conoscere le vostre riflessioni, specie di chi insegna alla secondaria di primo grado".

[7] Va infatti precisato che l'accesso ai materiali viene garantito sempre agli iscritti, anche una volta che il MOOC si conclude nelle sue tempistiche di erogazione.

Osserviamo che quando il corsista scrive "le attività […] mi hanno fatto riflettere" notiamo un'evidente fase di strumentalizzazione: il corsista sta creando nuove connessioni tra la sua rete di conoscenza e quella dell'ecosistema. N.C. è un docente di scuola secondaria di secondo grado, lui è stato stimolato dalle attività viste nel Modulo 2 e sta costruendo connessioni pensando alle sue classi, infatti chiama in causa "i ragazzi al superiore". Poi conclude invitando gli altri corsisti alla condivisione: "mi piacerebbe conoscere le vostre riflessioni", quindi ad esternare cosa pensano al riguardo.

L'intervento successivo è di T.S. – 2 novembre 2015, ore 18:20 – "Insegno alla Secondaria di primo grado e ho sperimentato questa attività che mi pare aiuti a chiarire (quest'anno l'ho proposta all'inizio della classe terza). Ho fornito delle foto/disegni con bambini sull'altalena (dimensioni diverse). Ho fissato un angolo di oscillazione uguale per tutti e ho fatto rappresentare le oscillazioni con un arco. Avrebbero dovuto ipotizzare che, tenendo fisso l'angolo, se aumenti la lunghezza della corda dell'altalena (raggio) aumenta l'arco di oscillazione. Mi pare che tutti ora sappiano distinguere l'angolo dall'arco e abbiano capito le relazioni, ma se si esce da un contesto e da un'attività, alcuni fanno ancora fatica a verbalizzare definizioni e motivazioni convincenti. Ora proverò anche l'attività dell'orologio, in prima media."

T.S. non si riaggancia a quello che aveva chiesto N.C. Ricordiamo che si tratta di comunicazioni a-sincrone: si articolano infatti in modalità ben diverse da quelle in presenza. Eppure T.S. condivide con l'ecosistema una sua prasseologia didattica. Si trova proprio nella fase della strumentalizzazione/condivisione: sebbene non si sia riagganciata al discorso del radiante, ha comunque creato una connessione tra difficoltà degli alunni verso il concetto di angolo e sua esperienza di insegnamento. Nello scrivere il suo commento mette in atto la pratica di condivisione.

Seguono altri interventi che rispondono a T.S. Per esempio F.D. – 2 novembre 2015, ore 18:44 – "mi piace questo tuo esempio...non hai il disegno da farci vedere?". T.S. – 4 novembre 2015, ore 15:01 – "Vi allego l'immagine che ho usato quest'anno. Ma non importa che immagine si usa, l'importante è tener fisso l'angolo e cambiare la lunghezza delle corde, così non fanno confusione fra l'angolo (sempre uguale) e l'arco (che aumenta)". La figura sottostante è il PDF che T.S. ha condiviso, in risposta alla corsista F.D., con tutto il MOOC-ecosistema.

N.C. deve aspettare fino al 5 novembre 2017 (ore 18:19), per ricevere un commento che risponde al suo. È quello di D.L.: “Ciao insegno in un liceo linguistico e anche io trovo che non hanno difficoltà a capire che l’angolo non dipende dall’arco. Quando introducono il radiante, dopo aver definito che cos’è, faccio disegnare a ciascuno una circonferenza nella quale devono individuare l’ampiezza di un radiante. A volte si ingegnano con nastri o fili per riportare sulla circonferenza la reale lunghezza del raggio. A questo punto faccio ritagliare le circonferenze, che saranno tutte o quasi di dimensioni diverse, e sovrapponendo capiscono che il radiante non dipende dal raggio e tanto meno dall’arco. Per quanto riguarda il grafico delle funzioni goniometriche […] Ho realizzato un file di Geogebra che lascia la traccia del segmento proiezione mano a mano che P sulla circonferenza descrive l’angolo. Se a qualcuno interessa ve lo allego […]”.

D.L., nel rispondere a N.C., percorre proprio le fasi del doppio processo di apprendimento: legge il commento del collega (strumentazione); lo reputa interessante e lo inserisce nella sua rete (auto-organizzazione); collega il vissuto del collega con il proprio e vi si ritrova (strumentalizzazione) e decide di condividere quella che è la sua prasseologia didattica con N.C. in particolare e più in generale col resto dell’ecosistema (condivisione).

Poco dopo D.L. risponde un altro corsista, E.G. – 7 novembre 2015, ore 16:16 – “Credo che il file di cui parli sia una cosa del genere... io lo trovo illuminante da far costruire agli allievi!”. E subito allega un file Geogebra. Non passa molto tempo prima che anche D.L. condivida il suo – 9 novembre 2015, ore 23:11 – “Vi allego il mio file per la creazione delle funzioni goniometriche sen*x* e cos*x* di cui vi parlavo […]”.

È interessante come E.G., D.L. ed anche T.S. raccontino spontaneamente le loro pratiche didattiche e non abbiano remore nel condividere i propri materiali. È una pratica che sicuramente in contesti di formazione in presenza non avviene e ha molto sorpreso noi formatori poiché è avvenuta in maniera del tutto naturale. In questo modo assistiamo al fatto che quella che è una prasseologia didattica di un insegnante, diventa qualcosa che potenzialmente può entrare a far parte delle prasseologie meta-didattiche (e non didattiche)[8] di qualche altro insegnante.

Nel Tricider i corsisti si raccontano e chiedono anche consigli, condividendo la gestione delle pratiche di classe, nonché la loro esperienza.

F.G. “ho un po’ di timore nel gestire l’attività di costruzione all’aperto dell’orologio di tre metri. Come fare ad impegnarli tutti organizzandoli con ruoli ben precisi, sono 20. qualcuno mi può dare dei suggerimenti? […]”

R.M. “Potresti dividerli in quattro gruppi e fare eseguire la costruzione di orologi con raggi diversi. Dovrebbe funzionare”

[8] Diciamo “meta” perché se entrasse proprio nella pratica didattica, significherebbe che il docente che legge deve inglobare e mettere davvero in pratica quanto ha letto. Non possiamo avere prova o certezza di questo, a meno che egli non lo dichiari esplicitamente in qualche bacheca di comunicazione. In generale, un qualsiasi corsista non è detto abbia l’opportunità o l’interesse di attuare immediatamente una pratica didattica propria di un altro corsista.

E.G. “Anche secondo me la divisione della classe in gruppi potrebbe essere la soluzione. Dalle esperienze degli anni passati le attività che impegnino i ragazzi "fuori dall’aula" e in contesti di apprendimento percettivo-motorio sono utilissime perché restano radicate per molto tempo negli allievi, e con loro anche i concetti che con tali attività si sono costruite”

I corsisti si scambiano dunque idee, si consigliano, mettono a disposizione la propria esperienza e condividono, in maniera del tutto spontanea (e per i formatori inaspettata), i propri materiali.

6.3. MOOC e comunità di insegnanti

Uno dei primi ricercatori che ha analizzato l’idea di comunità è Wenger (1998), che ha introdotto il costrutto teorico di *comunità di pratica* per indicare gruppi di individui che condividono un interesse o una passione per qualcosa che fanno e imparano a farlo meglio quando interagiscono tra loro con regolarità, attraverso delle pratiche condivise (Wenger, 1998). I membri di tali comunità vengono, infatti, coinvolti in attività comuni, attraverso l’uso di risorse familiari e la condivisione di quanto appreso. Wenger (1998) distingue tre diverse forme di partecipazione nell’ambito di una comunità di pratica:

– *Engagement*, ovvero fare cose assieme, produrre artefatti, confrontarsi;

– *Imagination*, ovvero costruire una immagine di se stessi e della propria comunità in modo da capire come riflettere sulle situazioni, esplorare le possibilità ed orientare le proprie azioni;

– *Alignment*, ovvero coordinare prospettive, interpretazioni ed azioni per poter realizzare obiettivi più elevati.

Un altro costrutto teorico attualmente molto diffuso è quello di *comunità di indagine* (Jaworski, 2006), introdotto, a partire da quello di comunità di pratica, per indicare le comunità di insegnanti coinvolti in programmi di formazione e progetti di ricerca. Jaworksi (2006) ha messo in luce la problematicità del meccanismo di *alignment* mirato esclusivamente a preservare norme e aspettative di una comunità ed al perpetuarsi di pratiche condivise (Cusi & Robutti, 2017). Introduce perciò l’idea di *critical alignment*, come l’auspicabile processo attraverso il quale i membri di una comunità mettono in discussione norme e pratiche condivise, ponendosi domande ed analizzando tali pratiche in maniera critica con l’obiettivo di svilupparle e migliorarle. Il mettere in discussione non significa qui dare una connotazione negativa all’esperienza, bensì analizzarla criticamente, integrarla con altre idee, proposte di esperienze, resoconti di attività sperimentate, materiali personali usati con i propri allievi. La nostra esperienza di MOOC è particolarmente in sintonia con i due costrutti teorici presentati, di Wenger e di Jaworski, e presenta esempi di critical alignment particolarmente interessanti. Possiamo quindi parlare della comunità dei docenti MOOC come comunità non solo di pratica, ma anche più precisamente di indagine, in quanto la condivisione di pratiche tra i docenti in formazione gioca un ruolo determinante, sia per la partecipazione che per la produzione, ma anche e soprattutto per il fatto di appartenere a un gruppo di docenti in formazione che cercavano, insieme, di migliorarsi. Questa ricerca di miglioramento, attraverso pratiche di critical alignment, si è realizzata nelle attività in piattaforma, realizzata come “lavoro insieme” e “apprendimento insieme” (Robutti *et al.*, 2016). Infatti, non sono poche le testimonianze di corsisti che raccontano di come hanno sperimentato alcune delle attività del MOOC; oppure di come spontaneamente abbiano deciso di condividere con gli altri corsisti propri materiali, sia in risposta a problematiche esposte da altri, sia come mezzo per ricevere spunti di miglioramento su questi materiali della loro personale esperienza.

Degno di nota è anche il lavoro compiuto come attività finale di progettazione didattica e peer review, dalla maggior parte di essi inteso come un momento di crescita professionale, per ripensare opportunamente alle strategie e ai processi di apprendimento con i propri studenti.

Nel questionario finale, somministrato nell'ultima settimana di lavori (sia in MOOC Geometria che in MOOC Numeri), una domanda a risposta aperta chiedeva: "Come partecipante del MOOC, fino a che punto ti sentivi di essere parte di una comunità?". Di seguito alcuni dei commenti raccolti.

"Mi sento parte di una comunità che apprende e impara a qualsiasi ora del giorno e della notte. La cosa mi rendeva felice e mi faceva sorridere".

"Molto. Purtroppo, trovo più colleghi di matematica con un approccio all'insegnamento simile al mio nel MOOC che non fisicamente a scuola […]".

"A causa del mio carattere, faccio fatica a relazionarmi con persone che non vedo o che non conosco. Però la vitalità di questa comunità mi ha coinvolto fin dal primo momento".

"Mi sono sentito molto partecipe con una comunità trasversale (a livello nazionale) e verticale (per i diversi ordini di scuola)".

7. Discussioni e conclusione

Nell'articolo si è analizzato come un programma di MOOC finalizzato al miglioramento professionale degli insegnanti di matematica può effettivamente mutare le loro prasseologie meta-didattiche (si ricordi la nota 6) generando la costituzione di una o più comunità di pratica tra i fruitori dei MOOC stessi. Tale complesso processo è stato descritto integrando e coordinando diversi modelli. Da un lato, la MOOC-MDT, ottenuta adattando il quadro della MDT, proprio dei programmi di aggiornamento *face-to-face*, alla situazione dinamica specifica dei MOOC. Dall'altro, i modelli del Connettivismo e dell'Approccio strumentale, opportunamente adeguati, hanno fornito un'ulteriore strumento di analisi che, integrato con gli altri, ha permesso di definire l'ecosistema in cui i vari processi sono generati dalle attività dei singoli e dall'integrazione di queste grazie al doppio processo di apprendimento (Taranto et al., 2017), reso possibile dall'ambiente MOOC.

Si è così costruito il modello del doppio processo di apprendimento, dall'ecosistema all'individuo e viceversa, che illustra efficacemente il composito quadro dinamico che distingue un MOOC da un corso tradizionale, e in cui si dà conto di come il corso inerte inziale prende vita nell'ecosistema per il contributo, in massima parte imprevedibile, con cui i singoli interagiscono con l'ambiente MOOC.

La struttura dinamica così descritta permette di comprendere quale sia la principale differenza strutturale tra un MOOC e un corso tradizionale, al di là delle differenze fenomeniche più evidenti. Il punto essenziale è la differenza in termini di operatività funzionale tra prodotti e processi. I materiali proposti nel MOOC sono infatti i PRODOTTI e costituiscono la sua parte inerte; la dinamica del doppio processo di apprendimento costituisce i PROCESSI, grazie ai quali si generano le pratiche di lavoro collaborativo e si strutturano le comunità di pratica (e talvolta di indagine) ad esse collegate.

La dinamica quindi si sviluppa da una comunità iniziale, piuttosto indistinta, cui si forniscono come input dei prodotti (progettati a priori dal team dei formatori); grazie all'ambiente tecnologico di interazione del MOOC, il materiale inerte di partenza, diventa produttivo e genera una o più comunità di pratica con nuove prasseologie. Il doppio processo di apprendimento che si genera può essere schematicamente riassunto in due passi fondamentali:

1. Il materiale inerte, cioè il MOOC-artefatto: la proposta educativa e metodologica di partenza (da parte del team dei formatori, che lavora secondo le proprie prasseologie professionali e l'analisi a priori della situazione di partenza che si crea);
2. La rete dell'ecosistema, cioè il MOOC-ecosistema/strumento: si sviluppa secondo le intrecciate dinamiche di strumentazione/auto-organizzazione e strumentalizzazione/condivisione, viste in Figura 1. La situazione di partenza offre una varietà di occasioni in cui:

a) un insegnante, diciamo A, stimolato da una qualche componente della situazione di partenza, produce qualcosa: ad esempio, fa riflessioni sulle bacheche di comunicazione, condividendo proprie idee o eventuali sperimentazioni condotte in classe; eventualmente condivide anche propri materiali;

b) un insegnante B trae beneficio dalle osservazioni/condivisioni di A, le integra nella sua rete e a sua volta interviene nel MOOC esponendo e condividendo le sue idee.

L'ecosistema arricchito dagli A influenza i B, che influenzano a loro volta l'ecosistema, e così via, in un processo che si autoalimenta. Grazie agli strumenti di comunicazione presenti nella piattaforma del MOOC (Tricider, Padlet, Forum) i fruitori del MOOC iniziano una serie di processi comunicativi tra pari (infatti il team dei formatori generalmente si astiene dall'intervenire), che si sviluppano secondo le modalità e le strumentazioni tipiche dei social network e producono un'aggregazione di gruppi di interesse che via via crescono e generano vere e proprie comunità di pratica e, talvolta, di indagine.

Il senso di questi processi, ancora da approfondire in sede di ricerca, può intanto essere chiarito ulteriormente da due osservazioni sulle dinamiche dei MOOC sopra descritte.

In primo luogo la partecipazione collaborativa, le prasseologie che cambiano, sono tutte pratiche che si evolvono sugli oggetti, ossia a partire dal materiale inerte che diventa ecosistema; il processo avviene in modo "caotico", nel senso che è imprevedibile e incontrollabile. Questa caratteristica distingue in modo particolare i MOOC dai corsi tradizionali, in cui tutto avviene in modo generalmente prevedibile e spesso previsto. Però è proprio questa caoticità che garantisce il coinvolgimento attivo e massiccio dei partecipanti (come descritto negli esempi) che intervengono spontaneamente in un dialogo tra pari, anche perché le modalità comunicative garantite dalla strumentazione del MOOC sono esattamente quelle dei social network, in cui si cancellano le inibizioni che invece per vari motivi limitano i processi comunicativi nei corsi tradizionali.

Una seconda osservazione riguarda i prodotti degli insegnanti (come quelli prodotti da A nell'esempio di cui sopra). Nel quadro della MDT essi sarebbero *oggetti di frontiera*[9] che la comunità responsabile del programma di aggiornamento propone ai corsisti. Nel caso dei prodotti del MOOC, la situazione è più complessa, proprio per il doppio processo di apprendimento.

Infatti, il prodotto dell'insegnante A del nostro esempio, che reagisce a quanto proposto dal MOOC è un oggetto di frontiera per così dire standard per A: A dà un significato all'interpretazione che ne dava il team del MOOC di quell'oggetto e lo usa in classe. Per B invece la situazione è diversa: l'esperienza di A non rientra generalmente nelle sue prasseologie; B può invece essere mosso da una certa tensione (Goos, 2013) a migliorare (per un qualsiasi motivo) e, prendendo spunto anche dall'esperienza di A (che è stata compiuta liberamente e non "imposta" dai formatori) ha una fonte d'apprendimento in più (quello che vede nel MOOC, quello che vede fare da un altro grazie al MOOC): spinto da questo innesca un processo di strumentalizzazione e fa suo quell'oggetto, facendo appello a schemi di utilizzo che lui reputa interessanti. Da un lato, si tratta di un oggetto di frontiera in quanto media una prasseologia tra A e B, ma dall'altro il processo in cui si inserisce questa mediazione è quello doppio, più volte richiamato, e in questo senso l'oggetto non media una conoscenza ma entra in una genesi di schemi di utilizzo prodotta in quel momento.

In conclusione, l'articolo illustra come le dinamiche proprie dei MOOC aprano uno scenario in cui i *programmi di miglioramento professionale* degli insegnanti (di matematica) assumono una connotazione diversa rispetto ai *corsi di aggiornamento* tradizionali. Essi si offrono quindi come un promettente terreno di indagine ai ricercatori in cui sembra necessario elaborare un quadro teorico nuovo rispetto a quelli tradizionali. Il nostro contributo, qui illustrato, va in questa direzione e auspicabilmente molte altre ricerche saranno necessarie per definirne uno completo.

8. Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., *et al*. (Eds.) (2004). *Matematica 2003*. Lucca: Matteoni stampatore.

Arzarello, F., Robutti, O., & Carante, P. (2015). MERLO: a new tool and a new challenge in mathematics teaching and learning. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 57-64. Hobart, Australia: PME.

[9] La nozione di Oggetto di Frontiera (Boundary Object) è stata adattata dalla sociologia (Star & Griesemer, 1989) all'insegnamento della matematica da Rasmussen & Keene (2015), che definiscono gli OF in questo modo: "sono simboli matematici, tecnologie, documenti, software o altri elementi che consentono alle persone di collegare diverse comunità e di lavorare insieme" (p. 282). Nel nostro caso, le comunità coinvolte sono la comunità dei formatori del MOOC e la più ampia comunità dei fruitori del MOOC, a sua volta articolata in comunità come gli A e B dell'esempio.

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programmes. In N. Sinclair, A. Clark-Wilson, O. Robutti (Eds.). *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (pp. 347-372). Springer Netherlands.

Bussi, M. G. B., Boni, M. & Ferri, F. (1995), *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Centro Documentazione Educativa.

Cusi, A. & Robutti, O. (2017). La collaborazione per rendere i docenti protagonisti della propria formazione: esempi dall'Italia e dal mondo. In L. Giacardi, M. Mosca, C. Sabena (a cura di). *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2016-2017* (pp. 231-248). L'Artistica Editrice.

Downes, S. (2012). *Connectivism and Connective Knowledge: essays on meaning and learning networks*. Stephen Downes Web.

Goos, M. (2013). Sociocultural perspectives in research on and with mathematics teachers: a zone theory approach. *ZDM*, 45(4), 521-533.

Jaworski, B. (2006). Theory and Practice in Mathematics Teaching Development: Critical Inquiry as a Mode of Learning in Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(2), 187-211.

Ozturk, H. T. (2015). Examining value change in MOOCs in the scope of Connectivism and Open Educational Resources movement. *The International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 16(5).

Panero, M., Aldon, G., Trgalová, J. & Trouche, L. (2017). Analyzing MOOCs in terms of their potential for teacher collaboration: the French experiences. In Dooley, T. & Gueudet, G.. (Eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1 – 5, 2017)*. Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Rasmussen, C., & Keene, K. (2015). Software tools that do more with less. *Mathematics TODAY*, 51(6), 282-285.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., & Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. *ZDM*, 48(5), 651-690.

Siemens G. (2004), *Connectivism: A learning theory for a digital age*, http://www.elearnspace.org/Articles/connectivism.htm

Siemens, G., Irvine, V., & Code, J. (2013). Guest editors' preface to the special issue on MOOCs: an academic perspective on an emerging technological and social trend. *Journal of Online Learning and Teaching*, *9*(2), iii.

Star, S. L., & Griesemer, J. R. (1989). Institutional ecology, translations' and boundary objects: Amateurs and professionals in Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, 1907-39. *Social studies of science*, 19(3), 387-420.

Taranto, E., Arzarello, F., Robutti, O., Alberti, V., Labasin, S. & Gaido, S. (2017). Analyzing MOOCs in terms of their potential for teacher collaboration: the Italian experience. In Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of European Society for Re-*

search in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME

Teixeira, A., Mota, J., Morgado, L., & Spilker, M. J. (2015). iMOOC: um modelo pedagógico institucional para cursos abertos massivos online (MOOCs). *Revista Educação, Formação & Tecnologias*, 4-12.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, 10(1), 77-101.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. New York: Cambridge University press.

Received October 10, 2017
Revision received November 11, 2017/December 18, 2017
Accepted January 8, 2018

"Annali online della Didattica e della Formazione Docente"
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 280-293 – ISSN 2038-1034

Insegnare Scienze: qualche considerazione metodologica, ma non solo

Margherita Venturi
Marianna Marchini

Abstract – *Even if science stimulates the curiosity of young people because it has the charm of discovery and the unknown, the teaching/learning of scientific disciplines is in crisis at national and international level, particularly as far as high school is concerned. Obviously, in the classrooms, the natural disposition of young students towards scientific disciplines is not maintained, or even totally lost. There is, therefore, the need to reflect on ways of looking at the teaching of scientific disciplines and how to see the role that the students can play during their school experience. In other words, it is necessary to reconsider professional choices in the light of explicit awareness and reference models. In order to ensure that students understand the language and the ways of operating science, both scientific and pedagogical literature suggests: 1) exploiting hands-on inquiry-based learning, b) addressing issues associated with the daily realities in the social context, and c) using an interdisciplinary approach. These three aspects will be discussed in the present contribution.*

Riassunto – *Nonostante le Scienze incuriosiscano i giovani perché hanno il fascino della scoperta e dell'ignoto, il loro insegnamento/apprendimento è in crisi a livello nazionale ed internazionale, in particolare nella scuola secondaria di secondo grado. Evidentemente nelle aule non si mantiene, o addirittura si perde, questa naturale disposizione degli studenti verso le discipline scientifiche. Emerge, quindi, l'esigenza di riflettere sui modi di guardare al loro insegnamento e sul modo di vedere il ruolo che lo studente può svolgere durante la sua esperienza scolastica; in altre parole, è necessario ri-vedere le scelte professionali alla luce di consapevolezze e modelli di riferimento espliciti. Le indicazioni fornite dalla letteratura, sia scientifica che pedagogica, per far sì che gli studenti si approprino del linguaggio e dei modi di operare della scienza possono essere riassunte nei tre aspetti discussi nel presente contributo: 1) usare la metodologia didattica laboratoriale di tipo inquiry-based; 2) affrontare temi di rilevanza sociale e vicini al quotidiano degli studenti; 3) utilizzare un approccio interdisciplinare.*

Keywords – Science teaching/learning, inquiry-based learning approach, choice of the scientific topics to be addressed, skills development, interdisciplinary approach

Parole chiave – insegnamento/apprendimento delle Scienze, apprendimento per scoperta, argomenti da affrontare, sviluppo di competenze, didattica trasversale

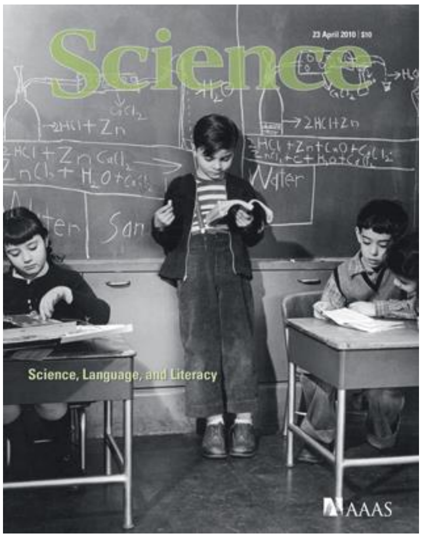
Margherita Venturi è Professore Ordinario di Chimica all'Università di Bologna. La sua attività di ricerca riguarda la chimica applicata alla nanotecnologia ed in particolare lo sviluppo di congegni e macchine a livello molecolare, come limite estremo di miniaturizzazione. Da sempre si interessa dei problemi legati alla didattica e alla divulgazione della Scienza, tanto che nel 2000 ha realizzato, presso il Dipartimento "G. Ciamician", lo spettacolo *Suoni, luci, colori ed altri effetti speciali* per promuovere l'immagine della Chimica. È autrice di oltre 240 pubblicazioni scientifiche, uscite sulle riviste internazionali più quotate e di oltre 40 pubblicazioni a carattere didattico, fra cui il libro *Chimica! Leggere e scrivere il libro della natura* (Scienza Express, 2012), tradotto in inglese dalla Royal Society of Chemistry nel 2014.

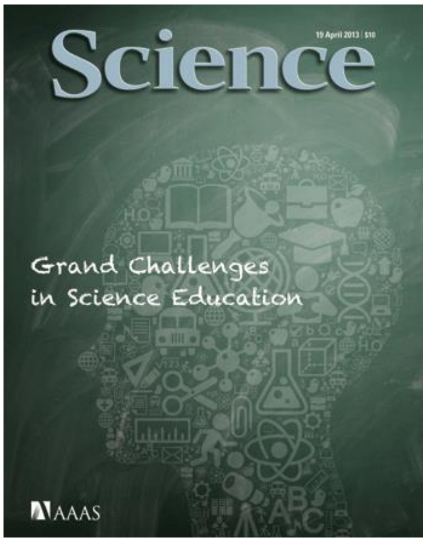
Marianna Marchini ha concluso il Dottorato in Chimica presso il Dipartimento "G. Ciamician" dell'Università di Bologna nel dicembre 2016 svolgendo, nel gruppo di ricerca della Prof.ssa Paola Ceroni, una tesi dal titolo *Photoactive molecules in supramolecular architectures and photoredox reactions*. Dal 2017 è Assegnista di ricerca e nell'ambito del progetto progetto "ERC PhotoSi", coordinato sempre dalla Prof.ssa Ceroni, si interessa dello studio fotofisico ed elettrochimico di sistemi supramolecolari e molecole fotoattive. Dal 2015 svolge attività di tutorato per gli insegnamenti di *Elementi di Chimica ed Ecologia*, corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria e di *Chimica di Coordinazione con Laboratorio*, corso di laurea in Chimica e Chimica dei Materiali.

1. Introduzione

Nonostante le Scienze incuriosiscano i giovani perché hanno il fascino della scoperta e dell'ignoto, il loro insegnamento/apprendimento è in crisi a livello nazionale ed internazionale, soprattutto per quanto riguarda la scuola secondaria di secondo grado. Evidentemente nelle aule non si mantiene, o addirittura si perde, questa naturale e buona disposizione verso le discipline scientifiche sostituita da un atteggiamento, da parte degli studenti, disinteressato e poco motivato alla curiosità e alla conoscenza. Emerge, quindi, l'esigenza di riflettere sui modi di guardare all'insegnamento delle discipline scientifiche e sul modo di vedere il ruolo che lo studente può svolgere durante la sua esperienza scolastica; in altre parole, è necessario rivedere le scelte professionali alla luce di consapevolezze e modelli di riferimento espliciti.

La letteratura su come affrontare e tentare di risolvere questo problema (che in realtà è una vera e propria emergenza se si pensa che la nostra attuale società attinge a piene mani ai risultati della ricerca scientifica e ai prodotti della tecnologia) è vastissima; anche riviste scientifiche di grande prestigio, come Science, periodicamente dedicano interi fascicoli al modo più proficuo per insegnare le Scienze e, quindi, per appassionare e coinvolgere gli studenti.





Ciò che emerge da questa letteratura, sia scientifica che pedagogica, è che il processo di coinvolgimento degli studenti deve cominciare subito, già a partire dalla scuola primaria, se non addirittura da quella dell'infanzia, e che *"People learn by doing, not by just watching and listening and they learn best what they want to know and need to know"* (Le persone imparano facendo, non guardando o ascoltando, e imparano meglio quello che desiderano o devono conoscere), come sottolineato da Bruner (Wood *et al*., 1976) e Felder (Felder e Silverman, 1988).

In sintesi, per far sì che gli studenti si approprino dei linguaggi e dei modi di operare della scienza e anche della tecnologia, intesa come applicazione dei risultati della scienza, sono due le indicazioni fondamentali: adottare una didattica laboratoriale (people learn by doing) e affrontare temi collegati alla realtà quotidiana e al contesto sociale (they learn best what they want to know and need to know).

2. Come insegnare (people learn by doing) e come valutare

La prima grande rivoluzione nell'insegnamento delle materie scientifiche è iniziato alla fine degli anni '50 del secolo scorso. L'impulso principale è arrivato dal mondo anglosassone e una delle caratteristiche principali del movimento di rinnovamento è stato il ruolo fondamentale assegnato alle attività sperimentali condotte in prima persona dagli allievi. Non a caso uno dei motti diventati celebri all'epoca è la famosa frase di Confucio "Se ascolto dimentico, se vedo ricordo, se faccio imparo".

Ma che cosa significa mettere l'esperienza al centro dell'insegnamento/apprendimento nell'area scientifica?

A prima vista sembrerebbe una scelta ovvia: le discipline scientifiche, intese in senso moderno, hanno da sempre avuto come riferimento la realtà dei fatti e le speculazioni teoriche hanno dovuto fare i conti con i dati sperimentali. Questo sembrerebbe portare come naturale conseguenza che anche l'apprendimento delle scienze debba avvenire mediante una sistematica esperienza del mondo che ci circonda. D'altra parte, che la conoscenza si sviluppi fin dai primi mesi di vita attraverso l'esperienza diretta è fatto assolutamente evidente ed assodato. Allora perché ci troviamo ancora a discutere del significato dell'esperienza nell'apprendimento scientifico?

Innanzitutto perché, nonostante siano passati più di 50 anni dall'inizio di quella rivoluzione nell'insegnamento scientifico, dobbiamo constatare che nelle nostre scuole troppo spesso si studiano ancora le materie scientifiche prevalentemente sul libro di testo, invitando quindi gli studenti a ricordare piuttosto che a capire. Non si tratta solo di scelte dovute ai limiti strutturali della scuola italiana (mancanza di laboratori, di personale tecnico, limiti di orario scolastico), molto più spesso si tratta di limiti nella formazione degli insegnanti che non hanno essi stessi potuto sperimentare in prima persona quel processo di costruzione di conoscenza che auspichiamo avvenga negli allievi.

In secondo luogo, dobbiamo tener conto del fatto che a partire da quei favolosi anni '50 è avvenuto uno sviluppo fondamentale nel processo di rinnovamento dell'insegnamento scientifico: i risultati delle ricerche sulla formazione dei concetti, iniziati anch'essi in quegli anni con il contributo eccezionale di Piaget (Piaget, 2000), hanno avuto infatti, con qualche decennio di ritardo, un enorme effetto sui fondamenti teorici della ricerca in didattica delle discipline scientifiche. Si tratta di quell'importante filone di ricerca che si proponeva di indagare le concezioni spontanee (o alternative) degli studenti con lo scopo di individuare strategie opportune per "conciliare" le rappresentazioni spontanee della realtà costruite dagli individui con le teorie accreditate in campo scientifico. Tali ricerche hanno messo in luce elementi di continuità e di discontinuità tra i modi spontanei di guardare il mondo e quelli tipici delle diverse discipline e, pertanto, hanno sperimentato diverse proposte di intervento educativo a partire dai primi livelli scolastici.

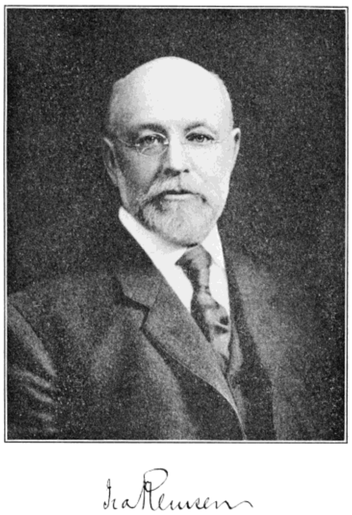
Si è venuto così chiarendo anche il ruolo svolto dall'esperienza nell'apprendimento significativo di conoscenza scientifica. L'esperienza della realtà è il primo passo verso la costruzione di conoscenza, ma già la semplice esperienza è in qualche modo carica di un contenuto "teorico", cioè di una rielaborazione di esperienze precedenti, naturalmente in forme diverse a seconda dell'età e della formazione scolastica ricevuta.

Nel percorso individuale verso la conoscenza scientifica è dunque indispensabile la conoscenza concreta ed interattiva degli oggetti e dei fenomeni naturali, perché questa esperienza ha un ruolo fondamentale per stimolare i processi cognitivi e l'apprendimento. L'osservazione diretta e la percezione sensoriale aiutano a costruire immagini reali della natura e dei suoi fenomeni, favorendone la comprensione e suscitando domande, motivazioni ed interessi. In mancanza della possibilità di osservare, manipolare, interrogarsi, confrontare, verificare e riflettere non si sviluppa un vero senso della Scienza. Senza esperienza diretta è particolarmente difficile poter ricollegare i concetti teorici con i fenomeni reali, con la pratica quotidiana e con l'osservazione del mondo circostante (Freinet, 1969).

Quanto questo sia vero è ben descritto in un articolo della letteratura chimica americana di cui è protagonista il giovane Ira Remsen, diventato poi un autorevole chimico, ben noto per la sintesi della saccarina, e di cui una libera traduzione è qui di seguito riportata (Shakhashiri, 1983).

"Leggendo un testo di Chimica arrivai alla frase – l'acido nitrico agisce sul rame. Mi stavo stancando di leggere cose così assurde e allora decisi di vedere quale fosse il significato reale di quella frase. Il rame era per me un materiale familiare, perché a quei tempi le monete da un centesimo erano in rame. Avevo visto una bottiglia di acido nitrico sulla tavola dell'ufficio del dottore dove mi mandavano per passare il tempo. Non sapevo le proprietà dell'acido nitrico, ma ormai lo spirito di avventura era sceso su di me. Così, avendo rame e acido nitrico, potevo imparare cosa significassero le parole "agisce sul". In questo modo, la frase "l'acido nitrico agisce sul rame" sarebbe stata qualcosa di più che un insieme di parole. Al momento, lo era ancora. Nell'interesse della scienza ero persino disposto a sacrificare uno dei pochi centesimi di rame che possedevo. Ne misi uno sul tavolo, aprii la bottiglia dell'acido, versai un po' di liquido sulla monetina e mi preparai ad osservare quello che accadeva. Ma cos'era quella magnifica cosa che stavo osservando?

Il centesimo era già cambiato e non si poteva dire che fosse un cambiamento da poco. Un liquido verde-blu schiumava e fumava dalla moneta e l'aria tutt'intorno si colorava di rosso scuro. Si formò una gran nube disgustosa e soffocante. Come potevo fermarla? Provai a disfarmi di quel pasticcio prendendolo con le mani per buttarlo dalla finestra. Fu così che imparai un altro fatto: l'acido nitrico agisce non solo sul rame, ma anche sulle dita. Il dolore mi spinse ad un altro esperimento non programmato. Infilai le dita nei calzoni e scoprii un altro fatto: l'acido nitrico agisce anche sui calzoni. Tutto considerato, quello fu l'esperimento più impressionante e forse più costoso della mia vita. Fu una rivelazione e mi spinse a desiderare di imparare di più su quel rimarchevole agisce sul".



Affinché la conoscenza sia significativa è pertanto necessario utilizzare una didattica di tipo laboratoriale, che non significa spiegare la teoria e poi proporre un'attività pratica che di solito consiste nel fatto che gli studenti duplicano pedissequamente una ricetta, ma significa far nascere nello studente domande e curiosità che lo invogliano a sapere. La Comunità Europea e molti esperti di didattica delle scienze suggeriscono di adottare l'apprendimento per scoperta, detto anche Inquiry-Based Science Education (IBSE) (Bybee, 2006; Bybee *et al.*, 2006; Bybee, 2009), o metodo delle 5E, dal momento che consta di cinque fasi ciascuna delle quali, in inglese, comincia con la lettera E: *Engage*, *Explore*, *Explain*, *Elaborate*, *Evaluate*.

Questo approccio laboratoriale può essere visto come la versione didattica della ricerca scientifica, perché fa salire lo studente su quella meravigliosa giostra che comincia a muoversi per effetto della curiosità e che si alimenta di domande per rispondere alle quali si organizzano esperimenti. Dai risultati degli esperimenti deriva la conoscenza che genera stupore e da questo nascono nuova curiosità e nuove domande. Allora, si parte per un secondo giro di giostra, alla fine del quale, inebriati dal fascino della scoperta, non si vorrebbe più scendere.

Il lavoro in laboratorio è importante anche perché costituisce non solo un momento di osservazione diretta, ma anche di analisi, di problematizzazione, di confronto e di verifica, di formulazione di interpretazioni e previsioni, di invenzione di attività; aiuta quindi a capire, stimola le attività di pensiero, promuove l'elaborazione attiva e personale delle conoscenze. In altre parole la didattica laboratoriale, già rintracciabile nella pedagogia di Dewey (Dewey, 1999) e raccomandata dalle "Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione" (2012), si fonda su un'educazione che parte dai bisogni propri di chi apprende, insegna la cooperazione per organizzare esperienze trasformandole in competenze, sfrutta percorsi flessibili riconosciuti dallo studente, significativi per se stesso e spendibili nella realtà e genera un apprendimento duraturo. Inoltre con le attività laboratoriali vengono recuperate le pre-conoscenze degli studenti che rappresentano lo sfondo e lo scenario dal quale partire per costruire le nuove conoscenze; infatti, se si volesse condensare in un unico principio l'intera psicologia dell'educazione, si troverebbe che il fattore a influenzare maggiormente l'apprendimento è rappresentato dalle conoscenze che lo studente già possiede per sua esperienza personale (Ausubel, 2004).

Affinché le esperienze di laboratorio siano significative è però fondamentale una programmazione accurata e consapevole del lavoro, dei suoi obiettivi e delle tecniche da proporre agli studenti. Albert Einstein era solito paragonare l'uomo che si occupa di scienza a un detective che deve procedere con "metodo": ciò significa che deve raccogliere tutti i possibili indizi per spiegare il fenomeno che sta osservando. Inoltre deve essere molto preciso nella raccolta dei dati e, una volta scoperto un possibile legame tra i fatti, deve formulare delle supposizioni, o ipotesi, e cercare di verificarle raccogliendo delle prove.

La sperimentazione inizia pertanto dall'osservazione, ne è parte integrante e comporta una serie di operazioni mentali e manuali in ordine logico, così come chiaramente indicato dalla già citata metodologia didattica IBL e in accordo con il modo di procedere della ricerca scientifica. Osservare vuol dire "guardare con attenzione", in modo da mettere in evidenza particolari che altrimenti sfuggirebbero e fissarli così nella memoria. L'osservazione attenta e controllata del mondo circostante è il passo necessario per iniziare a comprenderlo, ma non basta guardare; per osservare più a fondo è necessario "toccare con mano", lavorare, trasformare qualcosa con le mani. La manipolazione di sostanze, materiali, oggetti o elementi naturali aiuta a sviluppare, attraverso l'esplorazione sensoriale e il riconoscimento delle differenze percettive, la conoscenza della realtà concreta e le sue possibili trasformazioni, permette di consolidare la relazione tra processi e prodotti e stimola la creatività come trasformazione del noto o dell'esistente in forme nuove e impreviste.

È dalla vivacità dell'esperienza che nasce la necessità di fare ordine fra le molte scoperte e approfondire le conoscenze in modo organico così da far emergere le prime regole della disciplina. Gli esperimenti ci permettono, infatti, di esaminare un fenomeno in condizioni controllate ed eventualmente di riprodurlo più volte per essere certi dei risultati. Se i risultati degli esperimenti sono in accordo con l'ipotesi, questa viene confermata; diversamente occorre ritornare all'ipotesi di partenza, modificarla o sostituirla con una nuova ipotesi e realizzare altri esperimenti. Solo quando l'ipotesi è confermata, si potrà trarre una conclusione.

Nel momento conclusivo, attraverso la discussione, vengono fissate le scoperte fatte nelle attività di osservazione e manipolazione diretta. È il momento della riflessione, che è molto importante per evitare che lo studente, invece di assimilare concetti, abbia in realtà imparato solo parole (Dewey, 1994): "*Le parole possono isolare e conservare un significato solo allorché esso è stato in precedenza implicato nei nostri contatti con le cose. Tentare di dare un significato tramite la parola soltanto, senza una qualsiasi relazione con la cosa, significa privare la parola di ogni spiegazione intelligibile… Vi è la tendenza a credere che ovunque vi sia una definita parola o forma linguistica vi sia anche un'idea definita: mentre, in realtà, sia gli adulti che i fanciulli, possono adoperare formule verbalmente precise, avendo solo la più vaga e confusa idea di ciò che significano*".

Il momento della riflessione è anche quello in cui si formulano le prime regole di carattere generale, andando a rivedere il cammino percorso. È, quindi, necessaria un'accurata documentazione per "concretizzare" ciò che è stato fatto, far memoria dell'esperienza, capire cosa si è imparato e mettere in ordine i nessi tra le cose e le informazioni essenziali; quest'ultimo è un passo fondamentale per far sì che gli studenti acquisiscano la capacità di riconoscere quanto è stato appreso anche in contesti differenti da quello affrontato specificatamente. La documentazione può usufruire di diversi strumenti che dovrebbero essere scelti liberamente dagli studenti di volta in volta e in relazione al livello scolastico: cartelloni murali per riportare dati e le diverse fasi del lavoro svolto, fotografie per fissare lo sviluppo logico-temporale delle attività e registrazioni delle conversazioni collettive utili per ricordare le osservazioni, le domande, i dubbi e gli interrogativi rimasti aperti. Per quanto riguarda la Scuola dell'Infanzia e la Scuola Primaria le attività di laboratorio devono essere coinvolgenti e presentate sotto forma di gioco, aspetto che non va sottovalutato perché il gioco fa parte del naturale approccio dei bambini con la realtà (Venturi, 2006).

Le attività di tipo ludico-esplorativo rappresentano pertanto l'inizio di una conoscenza scientifica che potrà poi passare a forme più strutturate. Inoltre, un'acquisizione ludica del procedere del processo scientifico può, molto più che l'acquisizione nozionistica, aiutare i bambini a fare propria una capacità di critica delle informazioni, aumentandone la sensibilità scientifica fondamentale per l'interpretazione del mondo che ci circonda. Ciò appare di particolare importanza in un'era come l'attuale in cui, a fronte dei progressi nelle conoscenze, la cultura comune appare sempre più affidata a supporti tecnologici che mancano spesso delle adeguate fonti informative, così da essere sempre più diffuse conoscenze errate ed opinioni non scientificamente supportate.

L'ambiente del laboratorio è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, dove tutto partiva dalla sperimentazione creativa e nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con i maestri, rubando con gli occhi quello che poi sarebbe diventato tecnica: le attività di laboratorio favoriscono l'apprendimento nella forma "fa' e impara", a cui sottende una forte motivazione del soggetto a impegnarsi per costruire/ricostruire il proprio modello di realtà, e insegnano a sfruttare in modo positivo anche l'errore che diventa così un efficace mezzo per maturare la propria conoscenza.

Un altro aspetto particolarmente interessante di questo approccio didattico riguarda il fatto che il lavoro in laboratorio è normalmente organizzato in gruppi e quindi l'esperienza di apprendimento è vissuta in un contesto relazionale, proprio come avveniva nella bottega rinascimentale. Ciò significa che il "fa' e impara" viene integrato con il "confrontati e impara", portando alla costruzione di modelli condivisi di rappresentazione e di esplorazione della realtà. È l'ambiente di apprendimento dove gli studenti imparano ad aiutarsi a vicenda, il paradigma giusto per coinvolgere chi ha difficoltà di apprendimento e chi, provenendo da diverse nazioni, può avere problemi nella comprensione della lingua (Cuomo, 1995): "*Una pedagogia che propone l'integrazione deve avere come obiettivo, valore principale il rispetto delle diverse intelligenze, originalità e potenzialità cognitive ed affettive di ciascuno. Nel gruppo, in un rapporto di reciprocità, le difficoltà di apprendimento degli "altri" divengono un problema che "noi" dobbiamo risolvere".*

Il laboratorio è allora il luogo e l'ambiente per maturare competenze sociali, perché durante un lavoro cooperativo entrano sempre in gioco abilità comunicative, di leadership, di soluzione negoziata, di gestione dei conflitti e soprattutto di soluzione di problemi.

È inoltre l'ambiente dove gli studenti imparano a ricercare ed usare strumenti in situazioni di problem solving (Gargantini, 2006): "*Proporre un percorso di educazione scientifica significa introdurre all'arte del domandare e non fornire soluzioni a problemi mai posti… Sottolineare il ruolo dei problemi equivale a porre l'accento sulla persona che se li trova di fronte ed è invitata a mettere in gioco tutte le sue risorse di razionalità, creatività, ingegno per risolverli. Ciò vale per i ricercatori impegnati in problemi complessi; ma altrettanto per lo studente alle prese con qualsiasi capitolo del programma di fisica, chimica o biologia, che andrebbero visti come problemi da risolvere piuttosto che come contenuti da assimilare*".

Non è difficile capire che, adottando questa metodologia didattica, studenti e insegnanti rivestono ruoli ben definiti che invertono le idee guida della tradizione didattica trasmissiva e mettono lo studente-protagonista al centro della relazione e del processo di insegnamento-apprendimento, mentre il docente si colloca in secondo piano, quale organizzatore, guida e facilitatore nei percorsi didattici. L'insegnante è un regista che deve saper creare l'atmosfera giusta e allestire un palcoscenico didattico all'interno del quale ogni studente è invitato a mettere in gioco tutte le sue risorse di razionalità, creatività e ingegno, esattamente come fanno i ricercatori impegnati nel risolvere i loro problemi complessi.

Ovviamente in questo contesto cambia anche il concetto di valutazione e il modo di valutare gli studenti. Fermo restando che la valutazione tradizionale da parte dell'insegnante è imprescindibile ed ha un fondamentale ruolo formativo di accompagnamento dei processi di apprendimento e di stimolo per gli studenti a migliorare, è importante valutare gli studenti coinvolgendoli in attività di tipo informale, quali preparazione di festival della scienza, mostre ed exhibit per divulgare presso altri studenti, le famiglie e la cittadinanza temi di particolare interesse e rilevanza sociale affrontati nel corso dell'anno scolastico. Queste attività stimolano moltissimo gli studenti, soprattutto quelli che generalmente non hanno prestazioni scolastiche buone, e permettono di sviluppare nuove competenze quali autonomia, creatività e abilità di comunicazione. Viene anche potenziata la capacità critica e autocritica perché, inevitabilmente e spontaneamente, gli studenti sono portati a dare una valutazione sia del proprio lavoro che di quello dei compagni.

3. Cosa insegnare (people learn best what they want to know and need to know)

La seconda indicazione che deriva dalla letteratura sull'insegnamento/apprendimento delle Scienze è quella di affrontare temi collegati alla realtà quotidiana e al contesto sociale. In questo caso la scelta è molto vasta, ma sicuramente temi come energia, salute, cibo, acqua e ambiente sono particolarmente adatti per svariati motivi.

Sono i grandi temi di oggi e, ancor di più, saranno i grandi problemi di domani; sono inoltre gli argomenti di punta della ricerca scientifica, basti pensare agli attuali studi sulle fonti energetiche alternative e agli sviluppi nanotecnologici correlati, alle indagini sui cambiamenti climatici e ai risvolti ambientali che ne conseguono e alle innovazioni in ambito diagnostico e medico. Sono infine temi che permettono di discutere in maniera critica il flusso di informazioni continuo, disordinato e spesso discordante proveniente da fonti eterogenee.

Sono temi che motivano gli studenti, sia perché sono vicini alla loro realtà, sia perché dimostrano che la scienza non è solo qualcosa da studiare sui libri, ma pervade ogni aspetto della vita; affrontare questi temi permette inoltre alla scuola di aprirsi al confronto con le problematiche vissute dagli allievi, a cominciare dal contatto con i contesti territoriali nei quali essi costruiscono ed esprimono le proprie esperienze. Permettono anche di coniugare il locale con il globale, dove il "locale" fa riferimento ai saperi situati e contestualizzati, cioè legati agli essenziali spazi di formazione in cui i saperi non sono separati dalla concretezza del soggetto conoscente, dai suoi tempi, dai suoi luoghi e dalle sue radici, e dove il "globale", invece, riguarda la partecipazione responsabile allo sviluppo della propria comunità e del proprio territorio, in una prospettiva di sostenibilità e di attenzione al futuro del mondo intero.

Sono temi complessi e, quindi, per essere capiti nella loro globalità necessitano di un approccio inter- e trans-disciplinare, coinvolgendo tutta la comunità dei docenti, che motiva in modo particolare le studentesse, spesso non attratte dalle Scienze dure quali fisica e chimica, e che porta ad una benefica e positiva riduzione della dispersione scolastica.

Possono essere affrontati a diversi livelli di approfondimento e, quindi, sono adatti per sviluppare un curriculum verticale; sono inoltre tutti strettamente connessi per cui, indipendentemente dal tema dal quale si decide di partire, si possono affrontare, a ricadere, anche tutti gli altri.

Infine, permettono di andare oltre il teaching to the test, discutendo aspetti di tipo etico e sociale, quali la ricerca e l'innovazione responsabile per affrontare l'attuale emergenza energetica e ambientale, le disuguaglianze sociali e di genere, il libero accesso ai risultati della ricerca, il coinvolgimento di tutti i partner (ricercatori, politici, cittadini) per un armonioso sviluppo tecnologico e sociale.

4. Le indicazioni della Commissione Europea per l'educazione scientifica

Quanto finora esposto è perfettamente in linea con le indicazioni riportate nel documento *Science education for responsible citizenship* redatto nel 2015 dalla Commissione Europea

(Rapporto della Commissione Europea, 2015). Nonostante questo documento sia alquanto corposo, andrebbe letto tutto con estrema attenzione perché le linee guida in esso descritte sono veramente molto importanti e interessanti, non solo per gli insegnanti e i ricercatori in didattica delle Scienze, ma anche per tutti i partner sociali, cittadini compresi.

Nel documento sono individuati in maniera chiara e dettagliata gli obiettivi che l'insegnamento delle Scienze si deve porre e vengono suggeriti anche i modi per raggiungerli. In breve, con questo rapporto la Commissione Europea vuole promuovere quanto segue.

Obiettivo 1: assicurare a tutti un'adeguata e continua educazione scientifica

Questo obiettivo può essere raggiunto inserendo obbligatoriamente per tutti gli studenti e a qualsiasi livello scolastico l'insegnamento di discipline scientifiche, ma anche e soprattutto motivando gli studenti ad apprendere adottando metodologie didattiche inquiry-based.

Obiettivo 2: focalizzare l'educazione scientifica sulle competenze piuttosto che sui contenuti

Questo significa che occorre privilegiare l'interdisciplinarietà che è l'unico approccio per arrivare a comprendere a fondo i nuclei essenziali della Scienza e per affrontare i problemi complessi e le sfide sociali. In altre parole ciò vuol dire "imparare le Scienze studiando le altre discipline e imparare le altre discipline studiando le Scienze". Ad esempio, partendo dallo studio dell'arte si può facilmente arrivare ad affrontare concetti fisici e chimici, quali il colore, l'interazione luce-materia, pigmenti naturali ed artificiali con l'eventuale preparazione di alcuni pigmenti usati in passato riproponendo antiche ricette. Tutto ciò permette di comprendere molto meglio le tecniche pittoriche e la loro evoluzione con il passare del tempo. Naturalmente è altrettanto possibile il percorso inverso e cioè partire dalle discipline scientifiche per approdare a quelle artistiche. Altri temi particolarmente adatti per collegare in maniera sinergica i vari ambiti del sapere sono l'energia e la luce. La prima, infatti, dà la possibilità di spaziare da aspetti più propriamente fisici e chimici (il concetto di energia e lavoro) a quelli economici (economia lineare ed economia circolare; disuguaglianze sociali) e ambientali (inquinamento; risorse, sostenibilità). Fra l'altro il concetto di sostenibilità mette molto bene in evidenza che lo sviluppo scientifico e tecnologico non può prescindere dal prendere in considerazione tutti gli aspetti della vita e i valori comuni di equità e rispetto per gli altri, per le generazioni future, per la diversità, per l'ambiente, per le risorse della Terra. Analogamente la luce può essere vista da molti punti di vista: cosa è e cosa fa la luce, domande tipiche in ambito scientifico, come si è evoluto con il passare del tempo il concetto di luce e i grandi scienziati che hanno contribuito a svilupparlo, aspetti che riguardano la storia della scienza, ma anche il significato di luce dal punto di vista filosofico e religioso. Un approccio trans- e inter-disciplinare permette, quindi, di rafforzare i rapporti e le sinergie fra scienza, creatività, impresa e innovazione.

Obiettivo 3: potenziare l'apprendimento migliorando la qualità della didattica

Questo obiettivo, con il quale l'attenzione si sposta dallo studente al docente, può essere raggiunto valorizzando il prestigio professionale degli insegnanti, migliorando la loro formazione e puntando su un continuo e concreto aggiornamento che si può realizzare solo con una stretta collaborazione fra scuola e centri di ricerca in didattica.

Obiettivo 4: instaurare una stretta collaborazione fra il mondo della scuola e le realtà imprenditoriali e sociali

Questo tipo di collaborazione si può stabilire solo aprendo le porte della scuola al mondo esterno (open schooling), coinvolgendo le famiglie e i professionisti di varie estrazioni, mettendo gli studenti di fronte ad esperienze di vita vissuta e facendoli lavorare su progetti concreti.

Obiettivo 5: affrontare in classe i concetti alla base di una ricerca e innovazione responsabile (RRI)

Raggiungere questo obiettivo vuol dire discutere con gli studenti dei risvolti etici e sociali del progresso scientifico e dello sviluppo tecnologico e, quindi, parlare anche della responsabilità della scienza e degli scienziati. Ovviamente e necessariamente occorre preparare gli insegnanti ad affrontare questi aspetti che sono nuovi e quasi mai considerati nei curricula scolastici.

Obiettivo 6: collegare innovazione ed educazione scientifica

Questo significa affrontare nell'insegnamento delle Scienze temi di ricerca di grande attualità e importanti dal punto di vista ambientale e sociale; affrontare questi temi vuol anche dire parlare delle strategie adottate sia a livello locale che nazionale, europeo e globale per guardare responsabilmente al futuro dell'umanità e del pianeta.

5. Considerazioni conclusive

L'obiettivo prioritario della formazione a qualsiasi livello scolastico è che lo studente deve imparare a imparare. Questo significa sviluppare nello studente gli atteggiamenti necessari per interrogarsi e misurarsi con l'idea di molteplicità e problematicità del reale che si realizza attraverso l'integrazione e il dialogo fra le varie discipline. Occorre, cioè, offrire gli strumenti per far sì che i giovani siano in grado di analizzare criticamente le proposte che vengono dalla comunità scientifica e tecnologica in merito alla soluzione di problemi che riguardano ambiti codificati (fisico, chimico, biologico e naturale) e aree di conoscenza al confine tra le discipline, come ad esempio la salvaguardia della biosfera. L'asse scientifico-tecnologico, evidenziando il legame fra scienza e tecnologia e la loro correlazione con l'ambiente culturale e sociale, ha quindi il fine ultimo e importante di offrire una cassetta di attrezzi utili al futuro cittadino per operare scelte consapevoli ed autonome nei molteplici contesti, individuali e collettivi, della vita reale.

Tutto ciò permette di raggiungere un altro obiettivo, strettamente legato al precedente e non meno importante del precedente: far capire l'unità del sapere e quanto sia sbagliato separare la cultura scientifica da quella umanistica. Secondo Charles P. Snow (1959) *l'attuale frattura fra queste due culture si deve al fatto che gli scienziati hanno per loro natura il futuro nel sangue, mentre gli umanisti hanno gli occhi rivolti al passato*. Sono due atteggiamenti che potrebbero sembrare contrastanti e che, invece, sono perfettamente complementari perché si può pensare responsabilmente al proprio futuro solo conoscendo molto bene il proprio retroterra; è, quindi, da una armoniosa integrazione della cultura scientifica e della cultura umanistica che si origina vera cultura.

Occorre pertanto promuovere iniziative che non si fermino al solo specifico disciplinare, ma che tocchino aspetti trasversali. Infatti, se ciascuna disciplina è importante perché rappresenta una specifica chiave interpretativa della realtà, solo quando è integrata con le altre discipline permette di vedere il mondo nella sua complessità e globalità. Ciò, in altre parole, significa adottare una didattica inter- e trans-disciplinare in cui tutti i docenti, sia di area scientifica che di area umanistica, sono coinvolti con pari dignità. Per quanto riguarda le Scienze è molto facile sviluppare attività integrate con italiano, storia, filosofia, arte, musica, scienze motorie, geografia, economia, matematica, religione e diritto alla cittadinanza; questo, ad esempio, è il caso dell'educazione ambientale che dovrebbe essere affrontata ad ogni livello scolastico per creare un cittadino responsabile nei confronti del pianeta e dell'umanità.

È inoltre importante notare che per creare competenza, definita come la "capacità di orientarsi e di agire in maniera consapevole" e, quindi, per realizzare vero apprendimento non è sufficiente far acquisire agli studenti abilità e conoscenze; è infatti necessario che esse vengano interiorizzate a tal punto da essere spendibili in contesti anche molto diversi fra di loro. Per il raggiungimento di questo obiettivo la metodologia didattica gioca un ruolo fondamentale: quella che si è rivelata più proficua sfrutta l'approccio Inquiry-Based Learning o apprendimento per scoperta, che parte da una domanda stimolo su cui far lavorare, sia sperimentalmente che concettualmente, gli studenti.

L'obiezione comune che viene fatta a questo tipo di didattica è che comporta una forte dilatazione dei tempi; la cosa è certamente vera, ma non deve spaventare per i seguenti motivi: (a) è meglio affrontare meno argomenti in maniera approfondita, che molti argomenti in maniera superficiale e velocemente; (b) basta utilizzare un tale approccio in uno o due casi per far sì che lo studente impari ad apprendere personalmente; (c) la didattica laboratoriale può essere efficacemente combinata con le metodologie didattiche tradizionali, aspetto estremamente importante tenuto conto che non tutti gli obiettivi di apprendimento devono (o possono) essere perseguiti con l'approccio laboratoriale.

Non deve neanche spaventare il fatto di non avere a disposizione in ambito scolastico un laboratorio opportunamente attrezzato, perché il problema può essere facilmente superato sfruttando tutte le opportunità che il territorio offre, come ad esempio i dipartimenti universitari, i centri di ricerca e i musei scientifici.

È infine importante sottolineare che la didattica laboratoriale non riguarda in modo specifico le discipline scientifiche, ma è piuttosto da intendersi come un approccio che, utilizzando la metodologia della ricerca e della risoluzione dei problemi, mira all'acquisizione di competenze invece che all'accumulo di nozioni. In quest'ottica, il lavoro di laboratorio può essere concepito con diverse e più ampie prospettive e non esclusivamente, o prevalentemente, come dimostrazione delle attività degli scienziati e del loro modo di procedere e ragionare: è la metafora di come dovrebbe avvenire tutto l'apprendimento, non solo uno spazio chiuso e attrezzato in cui poter svolgere con gli studenti un certo numero di esperimenti e dimostrazioni, ma l'insieme di tutte le opportunità che consentono di esercitare osservazione, progettazione e sperimentazione. Si tratta, quindi, di un luogo in cui non solo si elaborano saperi, ma da cui si possono ricavare tutte le opportunità formative trasversali di carattere osservativo, logico, linguistico, utili per produrre nuove conoscenze e sviluppare nuove competenze nel pieno rispetto dei diversi stili di apprendimento. È, pertanto, la metodologia che, nell'ottica di una didattica inter- e trans-disciplinare, permette di accumunare tutte le discipline.

In conclusione, con questo approccio didattico l'azione educativa si sposta dall'insegnamento all'apprendimento, cioè ai processi del far apprendere e del riflettere sul fare, allo scopo di rendere gli allievi consapevoli del processo che vivono. Tutto ciò si inquadra perfettamente in quelli che sono i compiti formativi della scuola: promozione dell'apprendimento (istruzione), ma anche e soprattutto accompagnamento al saper stare al mondo (educazione), ricordando che l'istruzione non può e non deve mirare ad essere enciclopedica e che la regola dovrebbe essere quella di insegnare alcune cose bene e a fondo, non molte cose male e superficialmente. In altre parole il docente deve avere il coraggio di selezionare, scegliere, eliminare argomenti, anche operando scelte che a prima vista potrebbero sembrare dolorose per la sua sensibilità disciplinare. In fin dei conti, come dicevano i filosofi greci, *insegnare non è riempire un vaso, ma accendere un fuoco*.

6. Riferimenti bibliografici

Ausubel, D. (2004). *Educazione e processi cognitivi. Guida psicologica per gli insegnanti*. Milano: FrancoAngeli.

Bybee, R. W. (2006). Scientific inquiry and science teaching. In *Scientific inquiry and nature of science: Implications for teaching for teaching, learning, and teacher education* (Eds. L. Flick, N. Lederman). Dordrecht: Springer.

Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., Landes, N. (2006). *BSCS 5E instructional model: origins and effectiveness* in http://bscs.org/sites/default/files/_legacy/BSCS_5E_Instructional_Model-Full_Report.pdf.

Bybee, R. W. (2009). *The BSCS 5E instructional model and 21st century skills* in http://itsisu.concord.org/share/Bybee_21st_Century_Paer.pdf.

Cuomo, N. (1995). *L'altra faccia del diavolo. Apprendere ed insegnare in stato di benessere: un atteggiamento sperimentale*. Torino: UTET.

Dewey, J. (1994). *Come pensiamo*. Firenze: La Nuova Italia.

Dewey, J. (1999). *Il mio credo pedagogico. Antologia di scritti sull'educazione.* Firenze: La Nuova Italia.

Felder, R. M., Silverman, L. K. (1988). Learning And Teaching Styles In Engineering Education. *Engr. Education,* 78(7), 674-681.

Freinet, C. (1969). *Le mie tecniche*. Firenze: La Nuova Italia.

Gargantini, M. (a cura di) (2006). *La cultura scientifica nella scuola*, Genova-Milano: Marietti 1820.

Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'Infanzia e per il primo ciclo d'istruzione, settembre 2012.

Piaget, J. (2000). *Lo sviluppo mentale del bambino e altri studi di psicologia*. Torino: Einaudi, collana Piccola biblioteca Einaudi, Nuova serie.

Rapporto della Commissione Europea (2005). *Science education for responsible citizenship* in https://jcom.sissa.it/science-education-responsible-citizenship-report

Shakhashiri, B. Z. (1983). *Chemical demonstrations – A handbook for teachers of chemistry*, vol. 1. Madison: The University of Wisconsin Press.

Snow, C. P. 1959). *The two cultures*. London: Cambridge University Press.

Venturi ,M. (a cura di) (2006). *Il laboratorio di Scienze*. Napoli: Tecnodid.

Wood, D., Bruner, J., Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of child psychology and psychiatry, 17*, 89.

Received October 10, 2017
Revision received November 27, 2017/November 27, 2017
Accepted December 19, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 294-317– ISSN 2038-1034

Dalla classificazione degli alberi allo studio delle ombre prodotte dal Sole

Giulio Alluto

Abstract – *This article describes a mathematics and science pathway for first-grade secondary school, included in a large interdisciplinary project developed through the didactic laboratory and cooperative learning integrated into digital teaching in BYOD mode. Using the simplified dichotomous key created “ad hoc” by the teacher, the pupils classified the tree species present in the city park near the school. The activity continued in class with the network search of information about the meaning of “classification” and the botanical characteristics of plant species, the processing of billboards, and the production of videos later published on the YouTube channel of the school. With the experimental study of shadows produced by the Sun, pupils have linked the parallelism of shadows with the parallelism of solar rays and have created the mathematical model of the natural phenomenon useful to understand the concept of relationship and proportions. The mathematical model has been “tested” and / or validated through a simulation using a dynamic geometry software. Finally, the strengths and limits of the classroom teaching pathway, references to national legislation and references to studies and publications in the field of mathematics and science teaching (in particular on activities concerning the study of shadows produced by the Sun) are highlighted.*

Riassunto – *Nell’articolo viene descritto un percorso didattico di matematica e scienze per la scuola secondaria di primo grado, incluso in un ampio progetto interdisciplinare, sviluppato mediante la didattica laboratoriale e il cooperative learning integrate alla didattica digitale in modalità BYOD. Mediante l’utilizzo di chiavi dicotomiche semplificate create “ad hoc” dal docente, gli alunni hanno classificato le specie arboree presenti nel parco cittadino limitrofo alla scuola. L’attività è continuata in classe con la ricerca in rete di informazioni riguardanti il significato di “classificazione” e le caratteristiche botaniche delle specie vegetali, l’elaborazione di cartelloni , la realizzazione di video in seguito pubblicati sul canale YouTube della scuola. Con lo studio sperimentale delle ombre prodotte dal Sole, gli alunni hanno messo in relazione il parallelismo delle ombre con il parallelismo dei raggi solari ed hanno creato il modello matematico del fenomeno naturale utile a comprendere il concetto di rapporto e di proporzione. Il modello matematico è stato “collaudato” e/o validato utilizzando una simulazione tramite un software di geometria dinamica. Infine sono evidenziati i punti di forza e i limiti del percorso didattico sperimentato in classe, i riferimenti alla normativa nazionale e i riferimenti a studi e pubblicazioni nel campo della didattica della matematica e delle scienze (in particolare su attività riguardanti lo studio delle ombre prodotte dal Sole).*

Keywords – didactic laboratory, digital didactics, interdisciplinary, cooperative learning, arguing skills

Parole chiave – didattica laboratoriale, didattica digitale, interdisciplinarità, cooperative learning, saper argomentare

Giulio Alluto è Docente di *Matematica* e *Scienze* di scuola secondaria di primo grado presso l’Istituto Comprensivo Spotorno (SV). Referente regionale UMI – CIIM Membro del gruppo di sperimentazione “Linguaggio e Argomentazione nello studio della Matematica” nell’ambito del Progetto Lauree Scientifiche del Dipartimento di Matematica dell’Università di Genova e referente PLS Chimica (Dipartimento di Chimica e Chimica Industriale UNIGE) per la Provincia di Savona nel progetto “Progettiamo insieme”.

1. Premessa

La didattica digitale in modalità BYOD è stata sperimentata presso l'Istituto Comprensivo di Spotorno a partire dall'anno scolastico 2010/2011: da quell'anno scolastico tutti gli alunni delle classi quarte primaria potevano portare a scuola il proprio dispositivo, computer uguali tra loro, poiché acquistati insieme, grazie ad un accordo tra genitori e docenti. Tale progetto sperimentale chiamato "Impariamo al futuro", ha avuto, nel tempo, sostanziali modifiche in funzione della normativa nazionale: attualmente si può considerare superato poiché inglobato nelle specifiche azioni del Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD)[1]. "Impariamo al futuro" ha avuto il pregio di affrontare in anticipo alcune problematiche tipiche della didattica digitale: ad esempio, le criticità di tipo tecnico, dovute all'utilizzo del collegamento alla rete tramite wifi (tipo di infrastruttura, potenza del segnale, problemi di connessione, ecc.), problematiche relative alla sicurezza e alla privacy durante la navigazione da parte degli studenti, ecc.

Gli alunni dell'istituto dalla quarta primaria iniziano ad utilizzare alcuni programmi fondamentali come quelli di "Word Processing", "Presentation" ed arrivano alla secondaria di primo grado già "alfabetizzati" dal punto di vista informatico.

Il percorso didattico di matematica e scienze descritto di seguito è incluso in un più ampio progetto interdisciplinare dal titolo "All'ombra dell'albero" svolto in una classe a tempo prolungato, per due anni scolastici consecutivi (2015/2016, classe prima e 2016/17 classe seconda) con una periodicità di due ore settimanali e la compresenza in aula di due docenti (uno di matematica e scienze e l'altro di italiano, storia, geografia).

Il titolo "All'ombra dell'albero" è stato scelto con gli alunni durante una discussione sui contenuti:, all'ombra dell'albero siedono, si muovono, pensano, agiscono diversi personaggi con ruoli differenti (botanico, matematico, poeta, scrittore, pittore… e tanti altri).

Il progetto è articolato in una serie di attività collegate tra loro:

– classificazione delle specie arboree presenti nel parco cittadino limitrofo alla scuola mediante l'utilizzo di chiave dicotomiche semplificate;

– esperienze sulle ombre prodotte dal Sole per sviluppare competenze matematiche e geometriche

– ricerca, lettura e/o narrazione di miti e leggende, poesie sugli alberi e sulle ombre;

– creazione di miti, leggende, poesie e narrazioni sugli alberi e sulle ombre da parte degli alunni

– ricerca di informazioni e documenti su alcuni studiosi (scienziati, poeti, scrittori, artisti) del passato utili a soddisfare la curiosità degli alunni in riferimento alle tematiche trattate.

Saranno evidenziate, di seguito, le caratteristiche delle attività riguardanti la matematica e le scienze ed in particolare la classificazione delle specie arboree e l'attività sulle ombre prodotte dal Sole.

[1] Il documento è disponibile in rete al seguente indirizzo: http://www.miur.gov.it/scuola-digitale.

In un articolo pubblicato su "La voce della scuola" del 1945 dal titolo "Lo sviluppo intellettuale del ragazzo e l'insegnamento delle scienze naturali"[2] Emma Castelnuovo, nota docente di matematica e scienze ed esperta di didattica della matematica, argomenta sulla "passione classificatoria" presente nei "fanciulli" della "scuola media". Nonostante i numerosi anni passati, gli studenti di oggi, amano ancora classificare, riconoscere, dare un nome agli esseri viventi: per tale motivo abbiamo deciso (docenti e gruppo classe insieme) di classificare gli alberi del parco vicino alla scuola. L'utilizzo della didattica digitale è un grande aiuto perché, a differenza degli alunni di Emma Castelnuovo, i nostri studenti, oltre a fare l'erbario e a cercare informazione sui libri, possono fotografare, cercare informazioni online su banche dati specializzate ricche di immagini per confrontare i reperti raccolti sul campo con le informazioni multimediali presenti in rete. L'attività proposta ai ragazzi rientra tra gli "Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado" presenti nelle "Indicazioni Nazionali per il curricolo"[3] ed in particolare: "Riconoscere le somiglianze e le differenze nel funzionamento delle diverse specie di viventi".

Dalle relazioni dei ragazzi e dalle discussioni in classe è emersa l'esigenza di conoscere le misure degli alberi studiati: in particolare, come si può misurare l'altezza di un albero, senza abbatterlo o salire fino al punto più alto? E in generale, esiste un metodo per misurare l'altezza di un qualsiasi oggetto "alto" (ad es. i lampioni) presente nel parco senza salire sull'oggetto o abbatterlo? Durante le uscite i ragazzi hanno evidenziato la presenza delle ombre create dalle chiome degli alberi o dai lampioni: possono essere utili per trovare le altezze degli oggetti?

Lo studio delle ombre ha affascinato moltissimi scienziati, artisti, letterati e filosofi che si sono succeduti nel corso della storia dell'umanità: ad esempio Talete, Eratostene, Galileo Galilei ecc. Un fenomeno a prima vita banale, è stato utilizzato dall'umanità per creare conoscenza scientifica, artistica e filosofica, tramite l'utilizzo dei vari tipi di intelligenza caratteristici della nostra specie. Le ombre prodotte dal Sole sono state oggetto di studi e pubblicazioni da parte di numerosi esperti di didattica della matematica: dalle proposte didattiche di Emma Castelnuovo alle attività del Nucleo di Ricerca Didattica di Genova guidato da Paolo Boero. Le ombre prodotte dal Sole fanno parte dei "campi di esperienza" definiti così da P. Boero: "un settore dell'esperienza di vita (reale o potenziale) degli allievi identificabile da essi, unitario, dotato di specifiche caratteristiche che lo rendono adatto (sotto la guida dell'insegnante) per attività di modellizzazione matematica, proposizione e risoluzione di problemi matematici ecc." (Boero, 1989). L'attività in questione, infatti, prende spunto dal progetto originale sullo studio delle ombre del Nucleo di Ricerca Didattica di Genova ma viene rivisitato in base alla normativa vigente ed integrato con la didattica digitale. Nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione del 2012, l'ombra prodotta da Sole viene considerata un "caso emblematico" di attività didattica all'interno del percorso di scienze che

[2] Articolo presente in rete all'indirizzo: http://www.science.unitn.it/~fontanar/EMMA/voce_scuola_gennaio_19-45.pdf.

[3] Documento scaricabile da: http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/Indicazioni_-Annali_Definitivo.pdf.

“dovrà comunque mantenere un costante riferimento alla realtà”. Le Indicazioni Nazionali evidenziano, inoltre, la necessità di sviluppare “un’adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell’uomo”.

2. Spazi, strumenti e metodi

Il percorso didattico di tipo laboratoriale vuole evidenziare la possibilità di integrare le attività di osservazione e argomentazione con l’utilizzo delle nuove tecnologie per elaborare e validare modelli scientifici utili a comprendere in modo approfondito la realtà.

Per evidenziare l’importanza della didattica laboratoriale, utilizzo le parole tratte dalle Indicazioni Nazionali per la scuola dell’infanzia e del primo ciclo: “In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l’alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive”[4].

In questo progetto abbiamo considerato di fondamentale importanza anche la gestione degli spazi e degli arredi dell’aula poiché siamo convinti che per cambiare il modo di far lezione occorra anche creare spazi adeguati all’utilizzo delle nuove tecnologie e metodologie didattiche: i banchi degli alunni disposti ad isole (a gruppi di quattro), la cattedra in posizione laterale e la presenza di due lavagne (LIM e tradizionale) disposte su pareti opposte nell’aula, hanno materialmente favorito le attività cooperative.

Lavorare in modalità BYOD significa permettere ad ogni alunno di utilizzare il proprio dispositivo: notebook, tablet e cellulari. Questi ultimi con il permesso del docente, possono essere utilizzati solo per scopi didattici. La scuola fornisce la connessione WiFi dotata degli opportuni filtri per navigare in sicurezza.

Gli alunni per scrivere, elaborare i dati e creare presentazioni utilizzano abitualmente la Suite LibreOffice[5]. I prodotti multimediali sono stati condivisi tramite cloud con Google Drive[6] ed una bacheca virtuale di Padlet[7]: in questo modo gli elaborati possono venire revisionati dai docenti e in molti casi utilizzati da altri studenti della stessa classe. La bacheca virtuale della classe è stata inglobata nel blog del docente[8]: blog utilizzato anche per raccogliere e condividere link di siti internet utili per la didattica e quindi facilitare l’accesso a tali siti da parte degli

[4]Documento scaricabile da: http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf.

[5] Il software open source è scaricabile dal sito: http://it.libreoffice.org.

[6] Google drive disponibile all’indirizzo internet: https://www.google.com/drive.

[7] Padlet è anche definito “muro virtuale” o “bacheca virtuale”. Disponibile all’indirizzo: https://it.padlet.com.

[8] Blog disponibile all’indirizzo: https://giulioallutoweb.blogspot.it.

alunni. Per condividere idee, proposte e comunicare in modo rapido tra studenti e tra studenti e docenti, previo parere favorevole dei genitori, abbiamo deciso di creare un gruppo di classe su WhatsApp denominato “Gruppo didattico”. Gli elaborati finali sono stati pubblicati sul sito internet[9] o sul Canale YouTube del nostro Istituto[10]. Le verifiche e i test sono stati svolti on line tramite l’utilizzo di Socrative[11].

La didattica digitale utile nel condividere, modificare creare e pubblicare elaborati multimediali è stata integrata con tre metodologie di lavoro tipiche della didattica laboratoriale, utilizzate in funzione della loro opportunità didattica durante l’intero progetto: la lezione partecipata, la discussione argomentativa e il cooperative learning.

Tramite la lezione partecipata e la discussione argomentativa, gli studenti hanno la possibilità di esporre idee, ipotesi ed opinioni personali utili a costruire insieme un percorso di apprendimento condiviso e motivato.

L’apprendimento cooperativo permette di lavorare insieme per raggiungere obiettivi comuni: il singolo studente si applica in attività con la finalità di raggiungere dei risultati o creare degli elaborati che vanno a vantaggio suo e di tutti i suoi compagni di classe.

3. La rete internet e la veridicità delle informazioni

Importante obiettivo di questo progetto è rendere autonomi gli alunni nel valutare la veridicità e la qualità delle informazioni nel processo di ricerca in internet . Prerequisito fondamentale, quindi, è comprendere cos’è la rete e come viaggiano le informazioni in internet. Inoltre occorre comprendere come funzionano i motori di ricerca. Abbiamo utilizzato alcuni video reperibili su internet, nei quali i concetti vengono introdotti in modo semplice ma efficace ed in seguito, abbiamo creato semplici checklist con i suggerimenti utili. Gli studenti devono comprendere che internet è la più grande rete di connessioni ad accesso pubblico che mette in comunicazione milioni di computer in ogni parte del mondo: il World Wide Web è una rete di connessioni tra computer che consente la gestione delle informazioni in rete a livello globale ed è paragonabile ad una sorta di “biblioteca mondiale” aperta 24 ore al giorno che mette a disposizione degli utenti interi “scaffali” di testi, ipertesti, immagini, suoni, filmati, ecc. Ma in questa “biblioteca mondiale” ogni utente può essere sia “autore” che “lettore”: ogni persona può inserire nuove informazioni o utilizzare quelle già presenti in rete. Nasce quindi il problema della veridicità delle informazioni in internet: occorre evitare di reperire informazioni inventate, ingannevoli o distorte e quindi è necessario informarsi sulle competenze dell’autore o degli autori del sito internet relativamente alle informazioni pubblicate. Abbiamo definito il motore di ricerca come un servizio di Internet utile a trovare i siti che contengono le informazioni da noi cercate. L’utente “interroga” il motore di ricerca digitando la parola o la frase ed il servizio “risponde” mostrando un elenco di tutte le pagine web presenti nel proprio “database” che con-

[9] Sito internet IC Spotorno: http://www.icspotorno.gov.it.

[10] Disponibile all’indirizzo: https://www.youtube.com/channel/UC7HJ29sPiz0WOGxmYnfLrow.

[11] https://www.socrative.com.

tengono al loro interno la parola o la frase inserita. Esistono dei "trucchi" che permettono di rendere più efficace la ricerca di informazioni: l'utilizzo delle virgolette, il segno +, il segno – , gli operatori logici (AND, OR, NOT, NEAR) e la ricerca tramite l'estensione del file (FILETYPE:). Con alcuni esempi, utilizzando i propri dispositivi, i ragazzi hanno provato questi "trucchi" sotto forma di gioco. Dopo aver visto i video esplicativi e dopo aver giocato con gli operatori logici utili a rendere la ricerca in rete più efficiente, abbiamo creato una semplice checklist su cartellone come promemoria di classe.

Gli undici suggerimenti della nostra checklist:

– non perdere tempo con link non pertinenti e visita pagine con poca pubblicità;

– quando serve utilizza gli operatori logici (AND, OR, NOT, NEAR);

– quando serve utilizza FILETYPE:;

– per cercare più parole insieme o una frase esatta occorre mettere i termini di ricerca tra virgolette;

– cerca informazioni anche in "immagini" in "video" in "libri" e in "news";

– verifica se l'autore o gli autori del sito internet possono essere considerati esperti degli argomenti trattati;

– controlla, se possibile, le date di aggiornamento del sito;

– discuti con compagni, genitori e professori della qualità dei siti selezionati;

– scegli almeno tre siti diversi tra tutti quelli consultati;

– scegli le informazioni utili al lavoro che devi svolgere;

– cita sempre la fonte delle informazioni nella sitografia.

4. Classificazione delle specie arboree del parco ed elaborazione prodotti cartacei e digitali sui principali alberi

Il lavoro necessario dei docenti per avviare questa attività è stata la creazione di chiavi dicotomiche semplificate per la classificazione delle specie arboree presenti nel parco urbano limitrofo alla scuola: considerando che gli alunni non avevano mai classificato specie vegetali era opportuno utilizzare come criterio di classificazione la forma delle foglie. In questo modo è stata creata una chiave dicotomica cartacea molto semplice, con solo le specie arboree ornamentali del parco, ricca di immagini, che poteva essere utilizzata con poche conoscenze botaniche sulla forma delle foglie: semplici sempreverdi, semplici caduche, composte, squamiformi (quelle dei cipressi) e aghiformi. La distinzione tra un tipo di foglia e l'altra è stato l'argomento di una breve lezione partecipata nella quale abbiamo discusso anche sul significato di classificare.

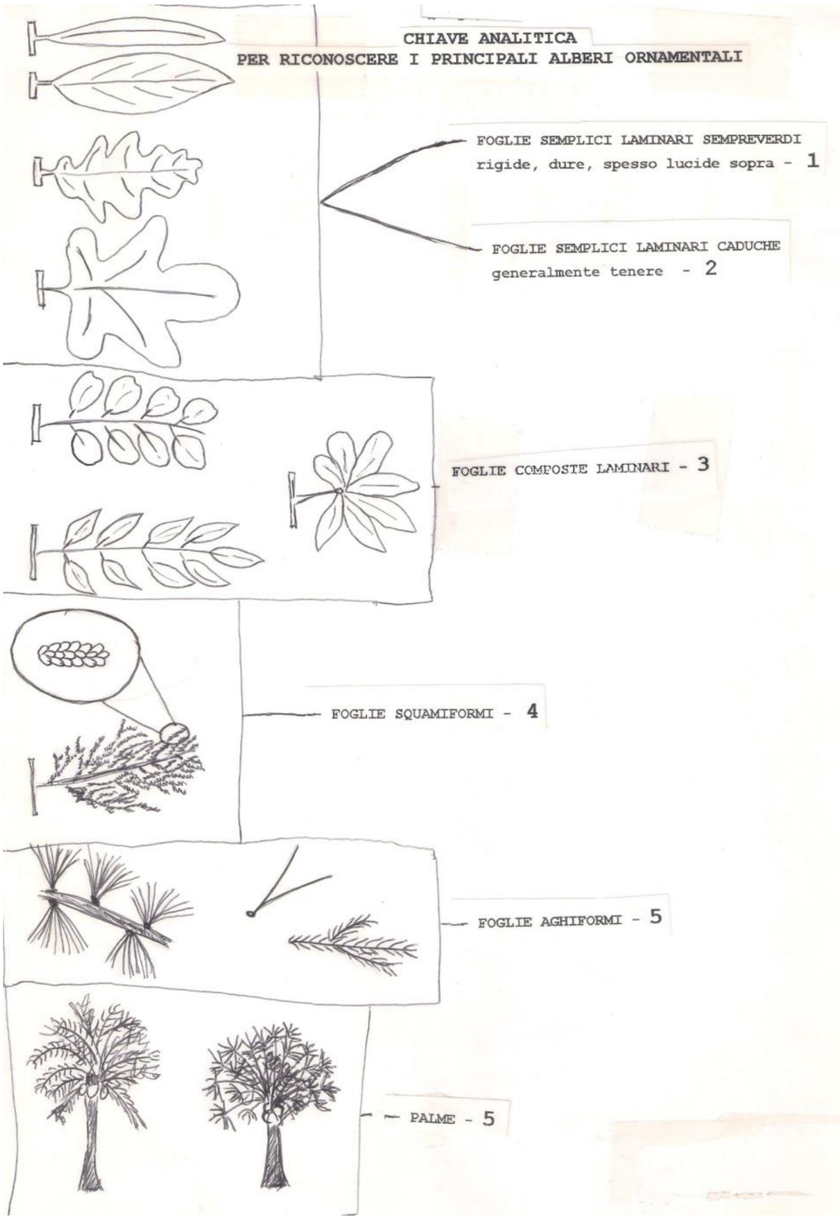


Figura 1 – Prima pagina della Chiave dicotomica semplificata

In seguito gli alunni, divisi in gruppi di lavoro, hanno iniziato a classificare gli alberi del parco: ogni gruppo poteva raccogliere campioni (foglie, fiori, frutti rami), scattare fotografie con i cellulari, misurare, descrivere le proprie osservazioni. L'attività di classificazione e raccolta dei campioni nel parco è durata circa due ore: gli studenti hanno dimostrato curiosità ed entusiasmo per l'attività ed una discreta capacità organizzativa.

Le attività degli incontri successivi sono state le seguenti:
– cercare informazioni in rete o e/o su libri riguardo gli alberi classificati;
– raccogliere e sintetizzare tutte le informazioni in cartelloni da appendere in classe;
– produrre brevi video da caricare sul canale YouTube della scuola.

I docenti ad ogni gruppo hanno dato il compito di descrivere una specie con le particolarità morfologiche ed ecologiche. Un gruppo, invece aveva il compito di approfondire tramite cartellone e video il concetto di classificazione binomia Questa fase è risultata lunga e complessa per gli alunni: occorreva organizzarsi bene nei gruppi per gestire il tempo in modo efficace, dividersi i compiti di lavoro, risolvere problemi di comprensione di testi ricchi di termini tecnici, decidere insieme quale prodotto creare. In totale l'attività complessiva è durata 12 ore ovvero sei incontri pomeridiani ma possiamo dire che è stata svolta esclusivamente dagli studenti: i docenti avevano solo i ruoli di facilitatori e osservatori. L'obiettivo, infatti, era quello di potenziare l'autonomia dei singoli gruppi nel lavoro: la priorità era valutare il processo più che il prodotto finale. In una prima fase sono stati prodotti i cartelloni: per far questo i ragazzi avevano anche a disposizione due stampanti oltre al materiale di cancelleria necessario.

In seguito sono stati realizzati i video: ogni gruppo poteva usare i cellulari e poteva scegliere gli spazi dove realizzare le riprese. Con i video i ragazzi dovevano descrivere il cartellone prodotto. La fase d creazione dei video è stata meno caotica della precedente: anche in questo caso, l'obiettivo non era avere un prodotto finale perfetto ma valutare il processo di realizzazione in tutte le sue fasi (organizzazione del gruppo, divisione del lavoro, capacità di ottimizzare i tempi, ecc). I video realizzati sono stati condivisi tramite Google Drive e poi pubblicati sul canale YouTube di Istituto.

5. Studio sperimentale delle ombre prodotte dal sole

Per iniziare l'attività sulle ombre abbiamo chiesto all'intero gruppo classe di rispondere alla domanda "Cos'è l'ombra?": nella discussione sono emerse le rappresentazioni mentali degli allievi sul concetto di ombra. La discussione è stata ripresa con il cellulare: l'analisi dettagliata dei video o delle registrazioni di una discussione di classe è un metodo molto utile per evidenziare, a posteriori, gli schemi mentali e le difficoltà espresse dai singoli alunni. E' un lavoro che richiede tempo e due docenti in classe: uno che osserva e registra o riprende mentre l'altro che modera e facilita la discussione. Di seguito viene riportata una parte del dialogo tra pari mentre il docente funge da moderatore.

Benedetta: l'ombra è qualcosa che avviene grazie alla luce ...la proiezione
Prof: tu dici che l'ombra di un qualcosa è la proiezione di questo qualcosa rispetto alla luce
Francesca: secondo me l'ombra è (pensa) un oggetto che interrompe un raggio che è la luce solare e oscura qualcosa
Chiara :secondo me l'ombra è una figura che viene realizzata secondo la forma dell'oggetto che viene posto davanti al fascio di luce che lo attraversa e che quindi forma l'ombra che prende, possiamo dire, la forma dell'oggetto considerato, del corpo considerato
Prof.: allora tu dici che la luce attraversa il corpo
Chiara :sì la luce attraversa il corpo e lo delimita formando una forma riflessa sulla parete ... l'ombra è una parte non illuminata dalla luce perché essa, cioè la luce è stata interrotta da qualcosa cioè intromessa.
Greta: l'ombra è un fascio di luce che viene interrotta da un corpo e forma un'immagine identica alla forma del corpo sullo sfondo
Francesca: l'ombra è una figura che prende le sembianze dell'oggetto sul terreno solo se c'è luce
Yari :l'ombra è una cosa che ti segue ovunque, solo se c'è luce
Qualcuno parla dell'ombra come una sagoma sul terreno, qualcun altro afferma che l'ombra si forma quando i raggi solari sono bloccati da un corpo. Molti parlando del sole alzano il braccio ad indicare la sua posizione

Figura 2 – Esempio di discussione argomentativa

La discussione ha permesso di chiarire i dubbi dei singoli alunni e di trovare una definizione di ombra condivisa da tutti: "l'ombra è l'area scura proiettata su una superficie da un corpo posizionato tra la stessa superficie e una sorgente luminosa. La presenza del corpo impedisce il passaggio della luce e si crea l'ombra sulla superficie" Questa definizione viene accettata da tutta la classe poiché "creata" da loro anche se non completamente esatta poiché bisognerebbe distinguere tra "ombra propria" e "ombra portata": l'ombra propria è la parte non illuminata dell'oggetto mentre l'ombra portata è "la sagoma che viene proiettata su una superficie" (Casati, 2008) ed è generalmente ciò che noi intendiamo per ombra. Il termine ombra portata è preso in prestito dalle discipline pittoriche e/o architettoniche.

In seguito ad ogni alunno è stata consegnata una scheda con la seguente richiesta: "Immagina che il professore sia fermo in una zona soleggiata alle ore 14.00. Disegna, anche in modo schematico, il professore, la sua ombra e indica la posizione del Sole". Sulla stessa scheda venivano presentate due domande alle quali gli studenti avrebbero dovuto rispondere dopo aver fatto il disegno: "Perché hai scelto di posizionare l'ombra del professore e il sole in questo modo?" e "Cambierebbe l'ombra se invece delle 14 fossero le 8 di mattina?".

Con questa attività si evidenziano ancora le rappresentazioni mentali che gli allievi hanno sul fenomeno studiato e contemporaneamente si stimola la capacità dell'alunno di produrre ipotesi. Nell'immagine seguente è rappresentato un disegno di uno studente.

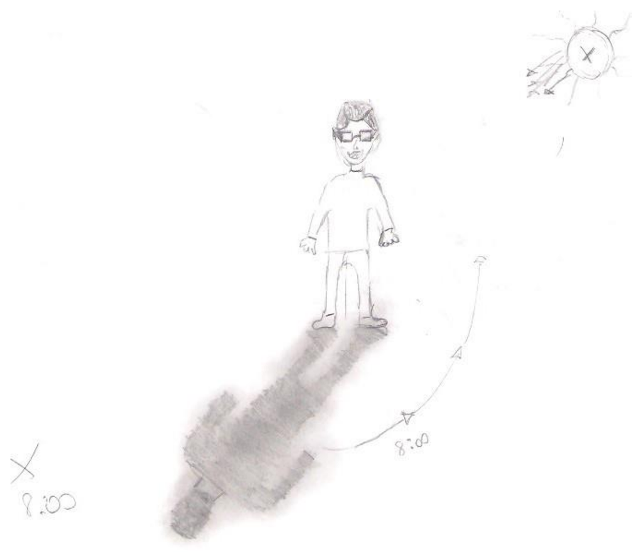


Figura 3 – Disegno dell'ombra

Gli alunni hanno apprezzato la consegna ed in molti casi i disegni sono risultati ricchi di particolari. I disegni sono stati fotografati con i cellulari dei ragazzi ed inviati alla bacheca virtuale della classe in modo da condividere e confrontare i lavori.

La seconda discussione argomentativa di classe aveva come oggetto le domande scritte sopra. La maggioranza degli alunni giustificava la posizione dell'ombra del docente e del sole sul proprio disegno affermando che il sole a quell'ora è "verso ovest" perché tramonta ad ovest e quindi l'ombra del professore doveva essere "verso est". Altri affermavano che "se il sole è a destra, l'ombra è a sinistra" Gli alunni quindi conoscevano il concetto di percorso apparente della nostra stella nel cielo anche se avevano difficoltà ad orientarsi e quindi ad indicare i punti cardinali.

Riguardo la seconda domanda "Cambierebbe l'ombra se invece delle 14 fossero le 8 di mattina?", la maggioranza degli alunni affermava che la posizione dell'ombra cambiava al variare della posizione del sole ma nessuno argomentava sulla lunghezza dell'ombra. La domanda quindi viene resa esplicita dal docente e la classe, dopo una discussione, elabora due ipotesi: "l'ombra è più lunga perché il Sole è più basso nel cielo" e "l'ombra alle 8 del mattino è meno nitida perché al mattino il sole è meno forte ma non cambia la sua lunghezza".

La definizione di ombra e le ipotesi emerse dalla discussione vengono condivise sulla bacheca virtuale della classe: gli alunni hanno una settimana per rivedere il materiale pubblicato prima dell'incontro successivo.

L'incontro successivo viene svolto all'aperto: le condizioni meteo permettono la verifica delle ipotesi della lezione precedente. Gli studenti lavorano a gruppi formati da quattro alunni ciascuno, con due obiettivi: verificare le ipotesi emerse dalla discussione di classe dell'incontro precedente e iniziare a raccogliere elementi utili per creare il modello bidimensionale di un fenomeno naturale tridimensionale.

La scheda consegnata ai gruppi chiedeva di rispondere alle seguenti consegne:

1. Mettersi eretti in posti diversi del cortile e osservare le ombre, scrivere le osservazioni rilevate; 2. Ad occhi bendati, si può capire se facciamo ombra? In quale direzione è l'ombra?; 3. A turno un compagno osserva e descrive le ombre degli altri tre compagni disposti in fila; 4. Fare uno schizzo di un paletto e la sua ombra e individuare la direzione dei raggi solari

I ragazzi avevano la possibilità di scrivere, disegnare, scattare foto con i loro cellulari.

La prima consegna permetteva di verificare l'ipotesi del disegno dell'ombra elaborato nell'incontro precedente in classe.

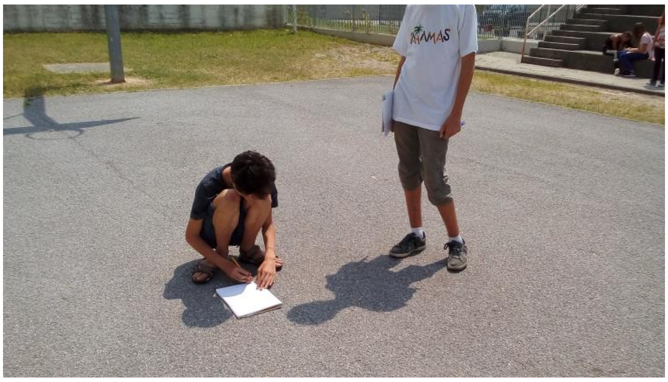


Figura 4 – L'ombra del compagno

La seconda consegna è utile per far sperimentare agli alunni che è possibile trovare la posizione del sole tramite la percezione del calore sul corpo e quindi trasmettere il concetto che i raggi luminosi trasportano calore cioè energia: inoltre gli allievi dovevano indicare da bendati in che direzione poteva essere l'ombra e quindi verificare le loro conoscenze acquisite riguardo la posizione dell'ombra prodotta rispetto alla direzione dei raggi solari.

Figura 5 – Sperimentare ad occhi bendati

La terza consegna permetteva di percepire tramite una semplice esperienza che le ombre generate dai tre ragazzi disposti in fila sono parallele tra loro.

Figura 6 – Ombre parallele

La quarta consegna è propedeutica alla costruzione del modello bidimensionale del fenomeno naturale "ombra prodotta dal sole" perché invita i ragazzi a schematizzare su foglio il paletto, l'ombra e la direzione dei raggi.

Segue in classe una discussione di classe utile a ricostruire le esperienze fatte all'aperto e ad esporre i risultati di tali esperienze: i gruppi sono invitati a relazionare a turno. Dalle relazioni dei gruppi e dalla discussione si evidenzia che per rappresentare in modo "scientifico" l'ombra di un compagno occorre che nel disegno siano presenti tre elementi: il compagno, la sua ombra e la direzione dei raggi solari. Iniziamo a pensare ad un modello da rappresentare alla lavagna: sono molto utili gli schizzi delle rappresentazioni bidimensionali dell'ombra del paletto e l'osservazione alla LIM di una foto scattata da un gruppo:

Figura 7– Tentativo di modellizzazione del fenomeno

Il gruppo precisa che" il bastone è stato utilizzato per materializzare il raggio di Sole e quindi è posizionato in modo che un estremo è alla fine dell'ombra e l'altro estremo è sopra la testa della compagna"

Dall'osservazione si evidenzia che" l'alunna, il raggio del Sole (rappresentato dal bastone grigio) e l'ombra sono i lati di un triangolo rettangolo dove l'alunna e la sua ombra sono i cateti e il raggio del Sole l'ipotenusa" e che questo "si verifica quando tra l'alunna e la sua ombra esiste un angolo retto cioè l'alunna è perpendicolare rispetto alla sua ombra" L'immagine viene schematizzata alla lavagna da un altro compagno in questo modo:

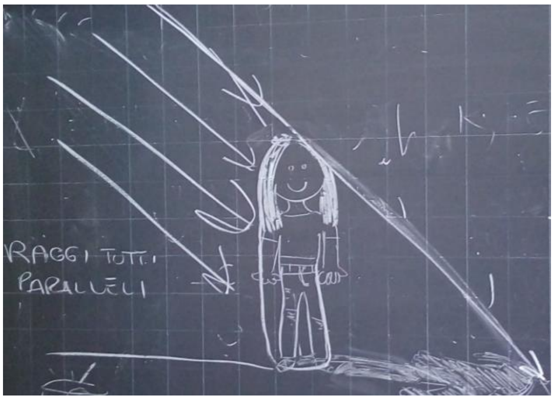


Figura 8 – Tentativo di modellizzazione del fenomeno

Vicino all'immagine l'alunno scrive "raggi tutti paralleli". Il docente quindi chiede "tutti d'accordo sul fatto che i raggi del sole sono paralleli?" La maggioranza degli studenti risponde in modo affermativo giustificando con la terza esperienza svolta in cortile: "se le ombre dei compagni sono parallele tra loro, anche i raggi del sole sono paralleli tra loro". Ma qualcuno afferma di aver provato a casa con la luce di una torcia e che le ombre prodotte non risultavano parallele tra loro. Questa ulteriore affermazione crea nuovamente il dubbio in classe: l'argomento sarà affrontato durante l'incontro successivo Inoltre agli alunni viene chiesto di elaborare una relazione scritta da caricare sulla bacheca virtuale di classe in modo da rivedere gli argomenti trattati

Si apre infatti l'incontro successivo con una semplice esperienza utilizzando materiale di facile reperibilità: una torcia e alcuni regoli. La luce prodotta da una torcia vicino a dei regoli disposti in fila non produce ombre parallele tra loro. Per ottenere ombre "che si avvicinano ad essere parallele" occorre allontanare la torcia rispetto ai regoli: più la torcia viene allontanata, più le ombre sembrano essere parallele tra loro. Di seguito le foto dell'esperienza svolta.

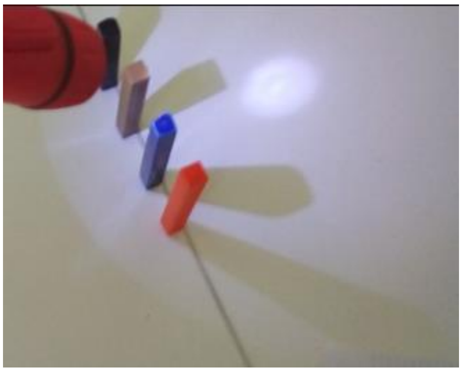


Figura 9 – La torcia vicino ai regoli

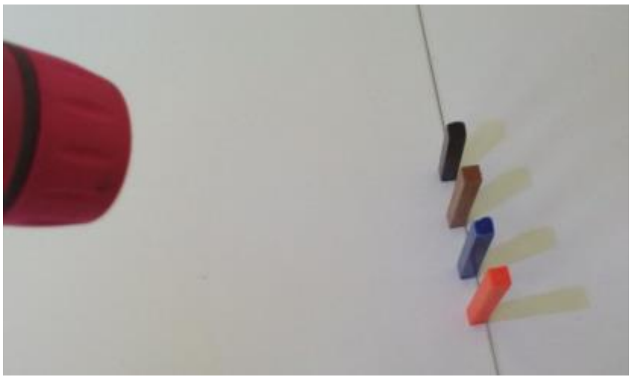


Figura 10 – La torcia lontano dai regoli

Alcuni studenti decidono di cercare in rete la distanza media Terra – Sole: tale distanza "può essere considerata quasi infinita" quindi i raggi solari che arrivano sulla superficie terrestri possono essere considerati paralleli tra loro. La semplice esperienza convince il gruppo classe e quindi finalmente possiamo schematizzare alla lavagna il modello matematico. Nell'immagine seguente si evidenzia la costruzione del modello matematico da parte di un'alunna che per rappresentare bene i raggi paralleli del sole utilizza il bordo della lavagna stessa.

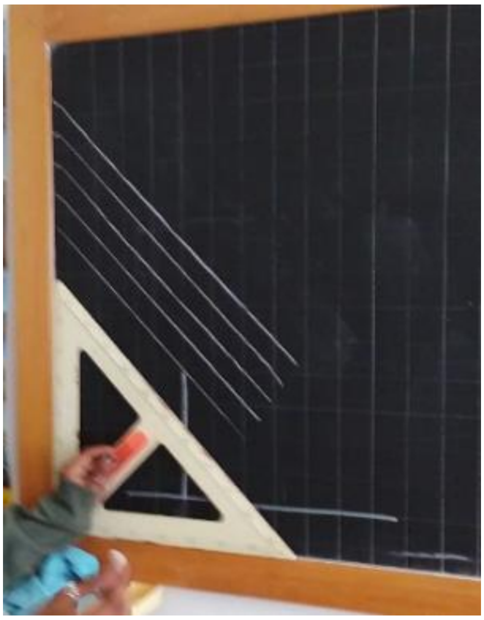


Figura 11 – Creazione del modello matematico alla lavagna

Gli altri studenti a gruppi provano a creare lo stesso modello matematico utilizzando il proprio dispositivo:

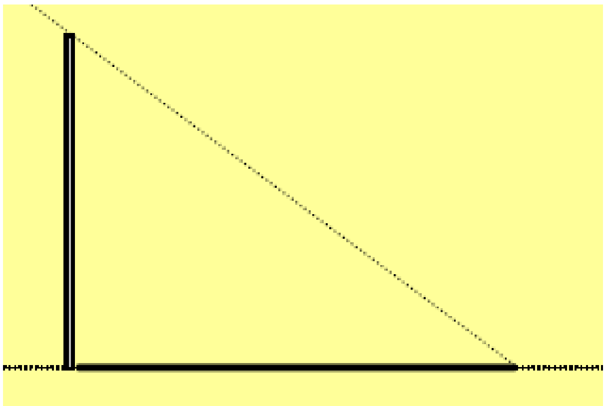


Figura 12 – Esempio di modellizzazione dell'ombra sul PC

Quando il gruppo classe dimostra di aver compreso il modello matematico, il docente può iniziare ad introdurre il "ragionamento proporzionale". Le attività che seguono nascono dall'esigenza di far comprendere bene agli alunni il ragionamento proporzionale per evitare di trasmettere solamente l'applicazione di uno schema procedurale in ambito aritmetico; "i problemi di proporzionalità sono stati ampiamente studiati negli ultimi decenni e costituiscono il cuore dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di primo grado, basti pensare alle tante occasioni in cui il ragionamento proporzionale entra in gioco: riduzione in scala, problemi moltiplicativi, similitudine, proporzionalità diretta, ecc." (Garuti, 2011).

Il ragionamento proporzionale rimane uno degli ostacoli principali della scuola secondaria di primo grado come dimostrano numerose ricerche comparative nazionali e internazionali: "La pratica più diffusa nella scuola secondaria, relativamente ai problemi di proporzionalità consiste nell'addestramento all'applicazione dello schema A:B=C:D con prevalenza dell'ambito aritmetico" (Garuti, 2011).

Agli studenti divisi in gruppi viene consegnata la seguente scheda:

Ad una certa ora della giornata il bastoncino proietta l'ombra disegnata (vista di lato):

a. Traccia: il raggio che determina l'ombra, alcuni raggi bloccati dal bastoncino, alcuni raggi non bloccati dal bastoncino
b. Si può secondo te scoprire la misura dell'ombra proiettata dal secondo bastoncino allo stesso momento in cui il primo bastoncino ha proiettato l'ombra disegnata ? Se sì, disegna e misura l'ombra, se no spiega il perché

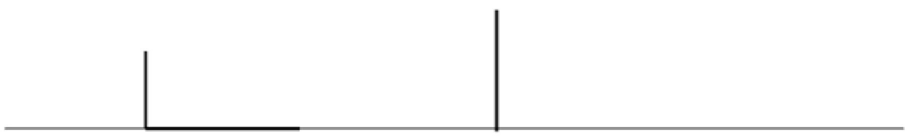


Figura 13 – Scheda operativa sull'ombra per introdurre il ragionamento proporzionale

L'attività può essere svolta o sulla scheda utilizzando righello e squadretta oppure su pc utilizzando Geogebra[12]: all'interno dei gruppi i lavori sono stati svolti in entrambi i modi e poi confrontati.

La difficoltà riscontrata tra coloro che hanno deciso di non utilizzare il proprio dispositivo è stata quella della manualità nell'uso degli strumenti per disegnare raggi solari paralleli tra loro. Naturalmente tale difficoltà non è emersa per coloro che utilizzavano il software di geometria.

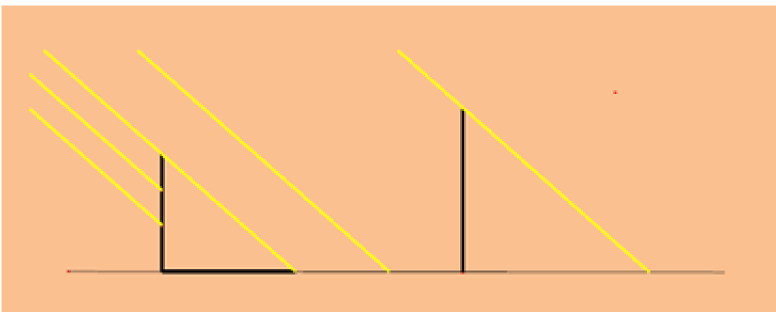


Figura 14 – Esempio di compilazione scheda operativa tramite

[12] https://www.geogebra.org.

Dopo aver dato un tempo adeguato per terminare i lavori si è aperta la discussione di classe: i gruppi hanno relazionato a turno, spiegando la procedura utilizzata per creare l'ombra del secondo paletto Inoltre i gruppi hanno evidenziato che il rapporto tra la misura tra il primo paletto e la sua ombra è uguale al rapporto tra il secondo paletto e l'ombra disegnata dagli alunni.

Gli studenti scoprono il concetto di rapporto e proporzionalità a partire da un concetto geometrico: qualche alunno infatti ha evidenziato che "i due triangoli che abbiamo disegnato sono triangoli rettangoli simili"

Per terminare quest'incontro abbiamo provato a fare un'altra esperienza insieme, utilizzando i regoli di diverso colore dopo aver misurato la loro lunghezza : disponiamo un banco vicino alla finestra aperta in aula per far entrare la luce solare e poi posizioniamo i regoli in fila sopra un foglio a quadretti come nella figura seguente.

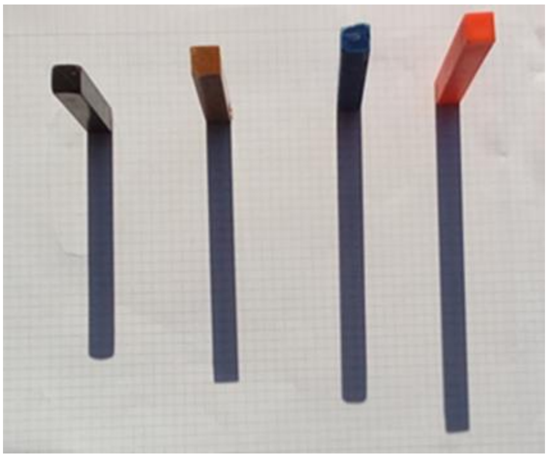


Figura 15 – Regoli di diverse altezze ed ombre di diverse lunghezze

Misuriamo le lunghezze dei regoli e le lunghezze delle ombre prodotte e calcoliamo i rispettivi rapporti approssimando i valori trovati ai decimi: i rapporti risultano sempre uguali tra loro (nel nostro caso 0,8 cm). La proporzione è un'uguaglianza di rapporti: tra l'oggetto e la sua ombra esiste una proporzionalità diretta.

Nell'incontro successivo siamo ritornati sul concetto di rapporto e di proporzione con altri esempi e problemi da risolvere nei singoli gruppi. Inoltre abbiamo lanciato un test on line da svolgere a coppie mediante l'utilizzo di Socrative.

Di seguito tre reports inviati da tre coppie di studenti:

1. Lorenzo e Luigi alle 10.30 del 22 marzo misurano l'ombra di un bastone di 6 cm, posto verticalmente sul terreno pianeggiante : è lunga 7 cm.
Lorenzo ipotizza che alla stessa ora un bastone lungo 8 cm, posto verticalmente sul terreno pianeggiante , proietta un'ombra di 9 cm.

Generalizza l'ipotesi di Lorenzo

6:7=8:9
lorenzo iopotizza che se il secondo bastone è aumentato di due centimetri come nel primo caso l'ombra è più grande del bastone di un centimetro. quini se l'altezza del bastone è di 8cm lombra per lorenzo sarà di 9cm.

2. Secondo te, Lorenzo ha ragione? Motiva la risposta

lorenzo per me non ha ragione perché facendo un rapporto e un disegno la misura dellombra veniva sempre più di nove; precisamente di 9,333333...
il mioil nostro enunciato è che lorenzo doveva dire che l'ombra era circa 9 cm

Figura 16 – Test online su Socrative

1. Lorenzo e Luigi alle 10.30 del 22 marzo misurano l'ombra di un bastone di 6 cm, posto verticalmente sul terreno pianeggiante : è lunga 7 cm.
Lorenzo ipotizza che alla stessa ora un bastone lungo 8 cm, posto verticalmente sul terreno pianeggiante , proietta un'ombra di 9 cm.

Generalizza l'ipotesi di Lorenzo

Alle 10:30 del 22 marzo in quel preciso puntotutte le ombre proiettate sul terreno pianeggiante misura un centimetro in piú rispetto al corpo.

2. Secondo te, Lorenzo ha ragione? Motiva la risposta

6:7 = 8:X _
X= (7•8):6= 56:6= 9,3

Questo calcolo ci dimostra che la teoria di Lorenzo é imprecisa perchè la proporzione tra 6 e 7 non corrisponde a quella di 8 e 9.

Figura 17 – Test online su Socrative

1. Lorenzo e Luigi alle 10.30 del 22 marzo misurano l'ombra di un bastone di 6 cm, posto verticalmente sul terreno pianeggiante : è lunga 7 cm.
Lorenzo ipotizza che alla stessa ora un bastone lungo 8 cm, posto verticalmente sul terreno pianeggiante , proietta un'ombra di 9 cm.

Generalizza l'ipotesi di Lorenzo

l'ipotesi di lorenzo è che piu il bastone è corto più l'ombra è corta, e piu il bastone è lungo piu l'ombra è lunga.

2. Secondo te, Lorenzo ha ragione? Motiva la risposta

secondo me è sbagliata perche noi abbiamo fatto un rapporto per vedere se la lunghezza era giusta ed è venuto " 6:7=8:× (x = 9 cm nell'ipotesi di lorenzo)
x= 7×8=56. 56:6= 9,3(periodico).
quindi è circa uguale.

Figura 18 – Test online su Socrative

Dalle attività svolte in aula e dalla lettura delle relazioni scritte elaborate e caricate sulla bacheca virtuale si poteva dedurre che la maggioranza degli alunni avevano compreso il ragionamento proporzionale applicato al modello bidimensionale dell'ombra di un oggetto prodotta dal Sole.

6. Attività di simulazione con geogebra

Il modello matematico elaborato in base alle esperienze svolte all'aperto e/o in classe mediante l'utilizzo della didattica laboratoriale, della discussione argomentativa di classe e del cooperative learning viene poi validato e/o collaudato utilizzando una simulazione di Geogebra disponibile in rete: occorre precisare che la simulazione con il software di geometria dinamica ha la funzione di validare il modello matematico elaborato a partire dall'osservazione del fenomeno reale. Il software "Geogebra" è di fondamentale importanza "nella modellizzazione e nell'esplorazione di una situazione problematica: "al movimento della mano sul mouse corrisponde una particolare raffigurazione della situazione problematica; inoltre la considerazione simultanea di modelli diversi (numerico, grafico, simbolico) mette in atto strategie multimodali che sono in sintonia con le modalità di azione del vivere quotidiano" (P Accomazzo, Silvia Beltramino, Ada Sargenti, 2013). Utilizzando una simulazione di Geogebra dal titolo "Talete e il metodo delle ombre"[13] nell'aula di laboratorio di informatica abbiamo "collaudato" il nostro modello matematico elaborato nelle attività precedenti.

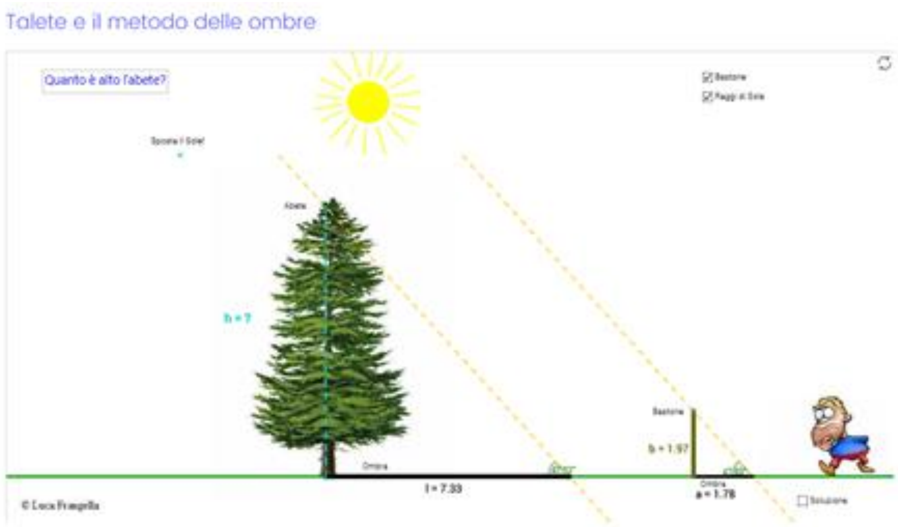


Figura 19 – Simulazione di Geogebra "Talete e il metodo delle ombre"

[13] Simulazione online creata da Luca Frangella: https://www.geogebra.org/m/CQdk6bjM.

In questa simulazione gli alunni devono calcolare l'altezza dell'albero ed hanno a disposizione un bastone e le rispettive ombre prodotte dal Sole.

La simulazione permette di variare l'altezza del bastone e/o l'inclinazione dei raggi solari. Gli alunni lavorando a coppie hanno utilizzato la simulazione senza indicazioni da parte del docente poiché la domanda, presente sullo schermo del pc, è "Quanto è alto l'albero?": alcune coppie hanno modificato l'altezza del bastone fino a portarla alla stessa misura dell'altezza dell'albero ed in tal modo hanno verificato l'uguaglianza fra le ombre mentre altre coppie hanno deciso di variare l'inclinazione dei raggi solari per ottenere le ombre uguali alla lunghezza dei rispettivi oggetti, ecc. Le strategie e le prove messe in atto sono state molteplici ma comunque utili per comprendere meglio "il ragionamento proporzionale".

Utilizzando il software alcuni alunni si sono posti la domanda su chi era Talete: la docente di lettere ha quindi proposto una lezione su Talete, sulla sua vita e sulle sue intuizioni matematiche e scientifiche.

7. Altri percorsi multidisciplinari del progetto

Come già ricordato all'inizio di questo articolo, le attività di questo progetto sono state molteplici e multidisciplinari anche se per ragioni di brevità sono state analizzate quelle riguardanti principalmente matematica e scienze. È comunque importante menzionare che in più occasioni didattiche si sono verificati i collegamenti ad altre discipline: un'attività che ha permesso questi collegamenti è stata lo studio di alcune biografie di studiosi e scienziati del passato quali Leonardo da Vinci, Galileo Galilei, Konrad Lorentz, Albert Einstein, Lavoisier, ecc. tramite l'utilizzo dei video di "Lampi di Genio in TV"[14].

Tramite l'utilizzo di "Lampi di Genio in Tv" abbiamo viaggiato nel tempo e nello spazio e attraverso l'analisi di biografie abbiamo affrontato argomenti trasversali collegando ad esempio la rivoluzione francese in storia con la vita e le opere di Lavoisier, l'inquisizione e il potere della Chiesa con Galileo Galilei, le leggi razziali e la seconda guerra mondiale con Albert Einstein, ecc.

8. Verifiche scritte, test online e valutazione delle competenze

Le attività proposte in questo progetto hanno l'obiettivo di sviluppare competenze disciplinari di matematica e scienze, italiano, storia e geografia ma anche competenze digitali e trasversali.

Sono stati verificati e di conseguenza valutati:

[14] Serie televisiva per Rai Edu scritta e condotta da Luca Novelli e reperibile sul sito internet: http://www.raiscuola.rai.it/programmi-nuovi/lampi-di-genio/116/default.aspx.

– relazioni scritte e orali delle attività svolte;
– test online;
– presentazioni multimediali;
– presentazioni di video progettati ed elaborati dagli studenti;
– capacità di lavorare in piccoli gruppi (max 4-5 alunni);
– partecipazione alle attività sia in presenza che in maniera virtuale.

La correzione degli elaborati cartacei o digitali (presentazioni e video) e di qualsiasi altra attività interdisciplinare è avvenuta ad opera di entrambi i docenti: ad esempio, le relazioni riguardanti le attività di classificazione e dello studio delle ombre hanno permesso valutazioni di matematica, scienze e italiano

I test online elaborati e somministrati con Socrative hanno permesso valutazioni rapide del prodotto finale e sono stati utilizzati in situazione diverse: dalla valutazione della capacità di comprensione di un testo o di un video alla risoluzioni di problemi ed esercizi di matematica. I test online sono stati molto graditi da parte degli alunni e di genitori degli studenti con la motivazione della rapida valutazione del prodotto finale poiché nella maggior parte dei casi erano a risposta multipla o in modalità vero/falso quindi con possibilità di autocorrezione ad opera dello stesso software utilizzato.

In riferimento alla normativa vigente riguardante la valutazione delle competenze[15] si può affermare che il monitoraggio e la valutazione di tale progetto permette di raccogliere informazioni utili alla compilazione della “Schede per la certificazione delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione” ed in particolare permette di raccogliere dati utili alla valutazione delle seguenti “competenze chiave europee”:
– Comunicazione nella madrelingua o lingua di istruzione;
– Competenza matematiche e competenze di base in scienza e tecnologia;
– Competenze digitali;
– Imparare ad imparare;
– Competenze sociali e critiche;
– Spirito di iniziativa e imprenditorialità.

Riguardo alla “Comunicazione nella madrelingua o lingua di istruzione” si può valutare “la capacità di comprendere e produrre enunciati e testi di una certa complessità, di esprimere le proprie idee, di adottare un registro linguistico appropriato alle diverse situazioni” così come menzionato nel “Profilo dello studente al termine del primo ciclo di istruzione”

In riferimento alle “Competenze matematiche e competenze di base in scienza e tecnologia” si può valutare la capacità dello studente di “utilizzare le sue conoscenze matematiche e scientifico – tecnologiche per analizzare dati e fatti della realtà” e contemporaneamente la capacità di “utilizzare il pensiero logico – scientifico per affrontare problemi sulla base di elementi certi” come scritto nel “Profilo dello studente al termine del primo ciclo di istruzione”

[15] http://www.miur.gov.it/web/guest/-/prosecuzione-sperimentazione-certificazione-delle-competenze-i-ciclo.

Questo progetto è molto utile per la valutazione delle competenze digitali in riferimento alle quali possiamo raccogliere dati utili in linea con "The Digital Competence Framework 2.0"[16] ed in particolare:

– Individuare e recuperare dati digitali, informazioni e contenuti;
– Essere in grado di valutare la pertinenza della fonte e del suo contenuto;
– Memorizzare, gestire e organizzare dati digitali, informazioni e contenuti;
– Interagire, comunicare e collaborare attraverso le tecnologie digitali;
– Creare e modificare contenuti digitali;
– Risolvere problemi concettuali e situazioni problematiche in ambienti digitali.

Le modalità di lavoro proposte da questo percorso didattico sono favorevoli a potenziare la competenza "imparare ad imparare" che si declina nel saper organizzare il proprio apprendimento, individuando, scegliendo ed utilizzando varie fonti e nel saper individuare, collegare e utilizzare le informazioni a disposizione scegliendo quelle utili a risolvere problemi o raggiungere gli obiettivi prefissati.

In riferimento alle "competenze sociali e critiche" il progetto esaminato, attraverso il cooperative learning, permette di rilevare il saper collaborare tra pari per raggiungere obiettivi e prodotti comuni ed inoltre permette di verificare la capacità di portare a compimento il lavoro iniziato da solo o insieme ad altri compagni. Altre "competenze sociali e critiche" possono essere osservate durante le discussioni argomentative di classe ed in particolare, la capacità di intervenire con serenità nelle discussioni, la capacità di valorizzare gli interventi dei compagni nel rispetto dell'opinione altrui, comprendendo i diversi punti di vista.

Lo "spirito di iniziativa e imprenditorialità" si manifesta nella capacità di produrre idee originali e progetti creativi, nell'assumersi le proprie responsabilità, nel chiedere o nel fornire aiuto agli altri compagni, nell'essere in grado di affrontare novità ed imprevisti.

9. Conclusioni

La didattica laboratoriale ovvero le esperienze svolte in aula o all'aperto per studiare i fenomeni naturali, le modalità di lavoro in gruppi o a coppie, la ricerca di informazioni utili ricavate dalla rete o da più testi cartacei permettono di potenziare l'autonomia e l'autostima di ogni singolo alunno, di valorizzare le capacità personali all'interno dei gruppi di lavoro o della classe, di stimolare la curiosità e la motivazione degli studenti. Queste modalità di lavoro risultano inoltre inclusive nei confronti dei ragazzini BES presenti nel gruppo classe poiché ogni studente mette in gioco le proprie capacità, il proprio "saper fare" ed ogni tipo di "diversità" può essere valorizzata all'interno del gruppi di lavoro o nelle discussioni di classe.

All'interno dell'apprendimento cooperativo, la didattica digitale ha sicuramente un ruolo positivo poiché permette agli studenti di creare elaborati multimediali che possono essere considerati prodotti intermedi da condividere tra pari all'interno dei cloud utilizzati o prodotti finali da

[16] https://ec.europa.eu/jrc/en/digcomp/digital-competence-framework.

pubblicare sul sito o sul canale YouTube della scuola. La didattica digitale è invece da considerarsi meno efficace se confrontata con un'esperienza che i ragazzi possono vivere realmente: ad esempio la simulazione virtuale di un esperimento scientifico ha un valore didattico minore rispetto alla possibilità di progettare e realizzare con gli studenti la stesso esperimento.

In riferimento al percorso didattico descritto precedentemente, ad esempio, sarebbe stato utile, dopo la validazione del modello matematico eseguita tramite l'utilizzo di Geogebra, effettuare un'ulteriore validazione in ambiente naturale, utilizzando l'ombra prodotta da un albero del parco.

Il ruolo del docente cambia in funzione delle attività in atto: da esperto, a facilitatore a moderatore, sicuramente non è più l'unico protagonista della trasmissione del sapere, ma in questo modo, può dedicare più tempo agli alunni che necessitano di interventi utili all'apprendimento mentre i gruppi di lavoro possono continuare le loro attività. Il docente diventa anche osservatore delle dinamiche di gruppo che si manifestano in classe, raccoglie più informazioni utili a conoscere meglio gli stili di apprendimento personali degli studenti.

La didattica digitale può però aumentare il carico cognitivo del docente soprattutto nella continua condivisione di materiale in cloud da parte degli alunni che necessita tempo per essere visionato e corretto.

Le modalità didattiche utilizzate in questo progetto sicuramente provocano la dilatazione dei tempi di lezione rispetto alla classica lezione frontale a parità di argomenti trattati quindi nella progettazione di un simile percorso didattico occorre prevedere tempi molto più lunghi rispetto ad una lezione frontale tradizionale. La dilatazione dei tempi significa affrontare meno argomenti durante l'anno scolastico e quindi occorre trovare tematiche o "nodi concettuali" significativi ed emblematici in grado di avviare un processo di apprendimento utile alla costruzione di competenze: "Si tratta di elaborare strategie didattiche nelle quali lo studente viene non attirato a prendere in esame catene di contenuti, ma a partecipare alla costruzione della sua propria competenza a partire da concetti scelti in modo tale da costituire interesse di per sé e sviluppi che coinvolgono ed amalgamano altri contenuti ritenuti chiave nello sviluppo della disciplina" (D'Amore, 2000).

Per quanto riguarda gli spazi di apprendimento occorre evidenziare che il nostro istituto, come la maggior parte delle scuole italiane, non ha ancora le strutture (aule e arredo) progettate in modo funzionale alla didattica digitale e laboratoriale per cui abbiamo cercato di adeguare le strutture esistenti (progettate per lezioni frontali suddivise in discipline) creando ed utilizzando anche i pochi spazi comuni presenti nella scuola (atrio, corridoi, cortile) soprattutto per quanto concerne le fasi di realizzazione di video o momenti in cui occorreva maggior tranquillità e attenzione nei lavori di gruppo.

Infine vorrei sottolineare che questo progetto, ha iniziato a preparare gli studenti alle modalità di lavoro che dovranno affrontare nella loro vita futura e quindi ai requisiti che la società chiederà per entrare nel mondo del lavoro: condivisione di obiettivi, di contenuti e di spazi, creatività personale e di gruppo, capacità di riconoscere le informazioni scientifiche corrette, capacità di comunicare i risultati di un lavoro in modo multimediale ed efficace. Il progetto ha inoltre permesso ai docenti di sperimentare un modo di insegnare più coinvolgente, meno rigido e schematico, più motivante per gli studenti e per i docenti stessi.

10. Bibliografia

AA.VV. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*. Numero speciale. Annali della Pubblica Istruzione. Firenze: Le Monnier.

Accomazzo, P., Beltramino, S., Sargenti, A. (2013). *Esplorazioni matematiche con geogebra*. A cura di O. Robutti. Milano: Ledizioni.

Casati, R. (2008). *La scoperta dell'ombra*. Roma: Edizioni Laterza.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Sbaragli, S. (2007). *Alcuni spunti di riflessione sulla didattica della matematica*. (Articoli scelti). Bologna: Assessorato Istruzione, Formazione Lavoro.

Garuti, R. (2010). *Ragionamento proporzionale: marmellate & ombre*. Progetto Nazionale "Qualità e Merito" PQM.

Johson, D. W, Johson, R. T., Holubec, E. J. (2015). *Apprendimento cooperativo in classe. Migliorare il clima emotivo e il rendimento".* Trento: Edizioni Erickson.

Persico, D., Midoro, V. (a cura di) (2013). *Pedagogia nell'era digitale*. Ortona: Edizioni Midoro.

Sitta, E. (2016). *Apprendimento cooperativo.* Torino: Edizioni Il capitello.

Received October 9, 2017
Revision received November 27, 2017/December 11, 2017
Accepted December 18, 2017

"Annali online della Didattica e della Formazione Docente"
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 318-331 – ISSN 2038-1034

Nuove tecnologie e pensiero computazionale fra passato e presente: un'esperienza didattica nella scuola del primo ciclo

Angela Balestra

Abstract – *In spite of a myriad of contradictions, the school is undergoing change owing to the increasing variety of technological tools which have invaded the classroom and brought into discussion not only the type of organisation within the classroom but also the role of the teacher. This article describes an experiment, carried out in the scholastic year of 2016/2017 with primary and junior high school pupils, which has been trying out, as an approach to computational thinking, little robots which can be programmed with Scratch, a language of intuitive and visual oriented programming. Some situations have also included the use of so-called "unplugged" methods, which do not require programming, as far as information technology is concerned. The context which gave rise to the experiment is analysed as well as the reasons behind it and the changes it has brought about in teaching. Over the years, the teachers' focus has shifted from digital tools used in teaching to the processes underpinning the use of little robots requiring programming in order to work. In this phase of the experiment, pupils' behaviour was closely observed and the data collected by each teacher formed the basis of a general discussion among colleagues regarding their opinions and useful ideas for future development. Much thought was given to In this work we reflect on to the application of this new area of knowledge taking into consideration how the lack of consolidated experience and the speed of innovation make it difficult to evaluate with precision its role in the curriculum and its efficacy in the teaching/learning process. Starting from the 1980s, the most significant steps of technological illiteracy within compulsory education are retraced through an examination of ministerial intervention carried out and the critical nature implicit in the challenge of innovation.*

Riassunto – *Nella scuola, pur fra mille contraddizioni, è in atto un cambiamento imposto dalla crescente varietà di strumenti tecnologici che irrompono nelle aule e mettono in discussione il tipo di organizzazione della classe, il ruolo e la funzione del docente. In questo articolo viene descritta un'esperienza realizzata nell'a. s. 2016/2017 in continuità fra studenti di scuola primaria e secondaria di primo grado in cui si è sperimentato un approccio al pensiero computazionale, attraverso l'uso di piccoli robot programmabili con Scratch, un linguaggio di programmazione intuitivo e visuale, ma prevedendo, in alcune situazioni, anche l'utilizzo di metodi cosiddetti "unplugged", che non richiedono cioè una programmazione, nell'accezione informatica del termine. Si analizza il contesto in cui è nata l'esperienza, le motivazioni che l'hanno generata e i cambiamenti che ha prodotto nella didattica. Lo sguardo dei docenti si è spostato nel corso degli anni, dagli strumenti digitali al servizio della didattica disciplinare ai processi sottesi all'uso di piccoli robot che necessitano di istruzioni per poter funzionare. Ogni docente in questa ultima fase si è posto nel ruolo di osservatore attento al comportamento degli alunni, ha raccolto informazioni su cui ha avviato un processo di riflessione e revisione con i colleghi utile a futuri sviluppi. Si riflette sulle implicazioni nella prassi quotidiana di questi nuovi saperi nella consapevolezza che la mancanza di esperienze consolidate e la rapidità dell'innovazione rendono difficile un'accurata valutazione del loro ruolo nel curricolo e della loro efficacia nel processo di insegnamento/apprendimento. Si ripercorrono, a partire dagli anni Ottanta, le tappe più significative dell'alfabetizzazione informatica nella scuola di base, esaminando i piani di intervento ministeriali che si sono succeduti e le criticità implicite nella sfida all'innovazione.*

Keywords – computational thinking, coding education, digital innovation, educational robotics, constructivism

Parole chiave – pensiero computazionale, coding, innovazione digitale, robotica educativa, costruttivismo

Angela Balestra ha insegnato Matematica e Scienze nella scuola Secondaria di primo grado, dove è stata referente del piano di formazione dei docenti sulle competenze digitali. Ha svolto numerose attività di formazione in collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università di Ferrara e con l'USR-ER. Ha svolto incarichi di docenza di Didattica della Matematica con l'uso di software di geometria dinamica. Ha progettato e realizzato laboratori nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche del MIUR. Ha coordinato, attuato e pubblicato progetti di scienze integrate promossi dal Dipartimento di Matematica di Ferrara, nell'ambito del progetto regionale Matematicainsieme e del progetto Europeo ISSUE (Integrated Subject Science Understanding in Europe). Coordina le attività di formazione nella associazione Mathesis – Sezione di Ferrara.

1. I cambiamenti della società e la scuola

La tecnologia sta influenzando tutti gli aspetti della nostra vita quotidiana e produce cambiamenti con una velocità sorprendente. Ogni giorno si legge di robot non più relegati alle catene di montaggio, ma protagonisti nei settori più disparati, dalla medicina, alla difesa, all'assistenza personale. Si tratta di dispositivi molto diversi dai robot di ieri, per portabilità e destrezza, più leggeri, in possesso di riconoscimento vocale, capaci di apprendere e di accedere a comunicazioni molto veloci, a banche di dati e algoritmi. Si evolvono in intelligenze artificiali e animano il dibattito di filosofi e scienziati che non nascondono i loro timori di fronte alla diffusione di queste macchine sempre più avanzate, paventando il rischio che, come dichiarato dall'astrofisico Hawking[1], sviluppino una volontà propria, contrastante con quella umana.

È in atto la quarta rivoluzione industriale e la scuola nel suo complesso, a tutt'oggi, appare latitante, o perlomeno resistente alle innovazioni, mentre in commercio sono già disponibili kit robotici educativi che consentono ai bambini di esplorare concetti di programmazione in modo tangibile, a partire dall'età di tre anni. Il rischio è quello di assistere a un progressivo allontanamento della scuola dal suo compito primario, quello della formazione dei futuri cittadini.

Se poi si aggiunge che, come risulta da indagini e ricerche[2], nei prossimi vent'anni il 10% dei posti di lavoro rischia di essere sostituito da macchine automatizzate o robot e il 60% del lavoro cambierà drasticamente per adeguarsi alla trasformazione digitale, si comprende quanto sia complesso per le diverse componenti del sistema educativo ideare un modello di scuola adeguato alle sfide della società del futuro. La pervasività delle nuove tecnologie nella quotidianità sta portando a evidenti mutamenti nel modo di apprendere e di relazionarsi delle persone. Sociologi e psicologi ripetono che la conoscenza, oggi, non è importante come un tem-

[1] Intervista alla BBC – Ottobre 2016, Stephen Hawking – will AI kill or save humankind?

[2] Risultati indagine dell'Organizzazione per la Cooperazione e lo sviluppo economico. Maggio 2017. http://www.lavoce.info/archives/40406/il-lavoro-senza-qualita.

po. È possibile accedere alla conoscenza del mondo in ogni istante, grazie ai nostri dispositivi e motori di ricerca, pertanto ai cittadini di domani sarà richiesta soprattutto la capacità di selezionare informazioni, generare idee, prendere decisioni, sfidare la realtà per generare il nuovo.

Il manifesto europeo delle competenze digitali del 2014 dichiara che "il mondo sta andando verso il digitale, così pure il mercato del lavoro, se vuoi essere un ingegnere, un architetto, un insegnante, un infermiere avrai bisogno di competenze digitali"[3].

I problemi da affrontare sono quindi molteplici e sono questioni che mettono in discussione le metodologie, gli spazi e i tempi dell'apprendimento, intaccano la progettazione disciplinare e mettono al centro la formazione docente che non potrà più essere episodica ma continua perché i mutamenti saranno continui. Di fronte a questa sfida la scuola deve attrezzarsi per non smarrire la sua identità. Le nuove tecnologie offrono un potente mezzo per facilitare e personalizzare l'apprendimento ma occorre che il docente impari a padroneggiare tutti gli strumenti di cui dispone per scegliere il più idoneo a sviluppare le competenze del cittadino di domani. Perché questo succeda su vasta scala e non solo in realtà ristrette del nostro Paese è importante avere linee guida nazionali, una meta comune a cui tendere. Per la scuola del primo ciclo il riferimento principale sono le *Nuove Indicazioni Nazionali per il curricolo* (2012) che chiariscono bene qual è il compito principale della scuola "non sarà quello di inseguire lo sviluppo delle tecnologie ma quello di formare saldamente ogni persona sul piano cognitivo e culturale, affinché possa affrontare positivamente l'incertezza e la mutevolezza degli scenari sociali e professionali, presenti e futuri".

La scuola, supportata dalle agenzie educative nazionali, è chiamata a cogliere la dimensione culturale degli strumenti tecnologici per aiutare i giovani a rapportarsi in modo consapevole nella società, ma dovrà attrezzarsi per formare docenti in grado di insegnare i concetti di base dell'informatica che a tutt'oggi non sono presenti nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola del primo ciclo di istruzione.

2. L'alfabetizzazione informatica nella scuola del primo ciclo

Ripercorrendo i progetti più significativi proposti dal Ministero o da Centri specializzati per l'educazione degli ultimi decenni, l'ingresso del computer nella scuola è segnato dall'introduzione del *pensiero computazionale*. Nella scuola di base le prime esperienze di alfabetizzazione informatica risalgono agli anni Ottanta con il progetto IRIS (Iniziative e Ricerche per l'Informatica nella Scuola), organizzato dal Centro Europeo dell'Educazione (CEDE) di Frascati, volto a sperimentare l'introduzione dell'alfabetizzazione informatica nella scuola di base, senza l'uso dei calcolatori. In quegli anni infatti gli elaboratori erano costosi e pochi i docenti in grado di muoversi con sicurezza sia nella conoscenza della loro struttura interna che del sistema operativo, ma in alcune realtà si iniziava a dibattere del valore formativo del pensiero algoritmico. È di quegli anni la comparsa del Logo, un linguaggio di programmazione svi-

[3] http://gesi.org/uploads/2017/06/the-e-skills-manifesto.pdf.

luppato da Seymour Papert pensato per la didattica in chiave costruzionista. L'obiettivo non era quello di formare dei potenziali programmatori ma di offrire agli studenti uno strumento potente per ideare progetti significativi orientati alla costruzione di animazioni, testi illustrati, oggetti ipermediali.

La scuola del primo ciclo deve attendere il 1997, per vedere pubblicato dal Ministero della Pubblica Istruzione un piano triennale di alfabetizzazione informatica, il "Programma di Sviluppo delle Tecnologie Didattiche (PSTD)" orientato alla formazione docenti e alla diffusione delle nuove tecnologie nella didattica che propone due modalità di adesione: la prima è prevalentemente rivolta ai docenti che potranno ricevere una prima formazione sulla multimedialità e studiare le possibilità applicative nella didattica, la seconda modalità prevede la destinazione di risorse ai progetti che prevedono l'introduzione della multimedialità nelle normali attività curricolari e quindi Il coinvolgimento degli studenti in attività didattiche con l'uso dei nuovi strumenti tecnologici. Le scuole coinvolte sono in numero ridotto e la richiesta di utilizzo di strumenti diventa ogni anno più pressante. Prende il via nel 2002, il Piano nazionale di formazione degli insegnanti sulle tecnologie dell'informazione e della comunicazione denominato FOR TIC (Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione). Il Piano prevede una vasta azione formativa e tre livelli d'intervento: il primo è un percorso formativo di base rivolto ai docenti con scarsa o nessuna competenza nell'uso delle TIC, un secondo percorso è teso a costituire una figura di docente esperto nelle metodologie e nelle risorse didattiche offerte dalle TIC, un ultimo percorso si propone di formare docenti con competenze avanzate relative alle infrastrutture tecnologiche della scuola o di reti di scuole.

Dopo alcuni anni, nel 2007 si inizia a discutere di Piano nazionale per le nuove tecnologie con investimenti rivolte a tre principali iniziative: l'acquisto di Lavagne interattive multimediali (LIM) con relativa formazione docente, l'allestimento di Cl@ssi 2.0, classi cioè dotate di computer e tablet interconnessi, per ciascun alunno e l'azione Editoria Digitale Scolastica, per trasferire le risorse didattiche dal formato cartaceo a quello digitale, ma questi strumenti che consentono la condivisione dei contenuti e favoriscono la cooperazione, non hanno modificato, in modo sostanziale la didattica nella prassi quotidiana.

Nel 2015 viene approvata la riforma dell'istruzione (Legge 107) e il MIUR, con apposito decreto, adotta il Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD). È un piano ambizioso perché non solo dispone di investimenti considerevoli per le strutture e le dotazioni tecnologiche, ma elenca obiettivi chiari e indica una strategia complessiva in cui viene messa al centro dell'educazione non la tecnologia ma nuovi modelli di formazione dei docenti e nuove metodologie didattiche in cui lo spazio di apprendimento deve essere vissuto come un sistema aperto a una società che cambia rapidamente. Alcune azioni del Piano sono rivolte a garantire l'accesso a internet, a creare ambienti per la didattica digitale, a digitalizzare le procedure amministrative; altre azioni sono mirate allo sviluppo di nuove competenze per gli studenti come "l'introduzione al pensiero logico e computazionale e la familiarizzazione con gli aspetti operativi delle tecnologie informatiche". Il pensiero computazionale entra quindi come protagonista nel dibattito sulle competenze del XXI secolo.

3. Cos'è il pensiero computazionale

Seymour Papert (1928 – 2016) informatico, matematico e pedagogista, viene considerato il precursore del pensiero computazionale inteso come processo cognitivo utile a formulare la soluzione di un problema con una procedura provvista di una logica interna rigorosa, in modo che possa essere realizzata da un computer.

Papert è il creatore del Logo, linguaggio di programmazione accessibile anche ai bambini grazie alla intuitiva interfaccia e alla semplicità delle liste dei comandi. Il Logo è anche un progetto educativo, in cui il bambino è posto al centro dell'ambiente di apprendimento e il suo agire genera competenze. Entra nelle scuole italiane a partire dagli anni Ottanta e viene utilizzato prevalentemente in ambito geometrico perché attraverso una serie di comandi è possibile tracciare figure e scoprirne le specifiche proprietà geometriche.

La prima definizione di pensiero computazionale è attribuita a Jeannette M. Wing, ricercatrice di Scienze informatiche dell'Università di Pittsburgh, che in un articolo del 2006, *Computational Thinking*[4], lo descrive con l'espressione "il modo di pensare di un informatico". La Wing considera il pensiero computazionale un'abilità fondamentale per tutti, non solo per gli informatici spingendosi a sostenere che occorre inserirlo nel curricolo di base esattamente come il leggere, lo scrivere e il far di conto.

Dopo questo articolo ne sono seguiti altri e nel 2014 sulla rivista *Communications of the ACM* la Wing pubblica "Computational Thinking Benefits Society"[5] in cui descrive il pensiero computazionale come "l'insieme dei processi mentali coinvolti nella formulazione di problemi e delle loro soluzioni in modo che le procedure risolutive siano rappresentate in una forma che possa essere efficacemente effettuata da un agente (persona o macchina) che elabora le informazioni." Se si adotta questa definizione si deduce che il pensiero computazionale, essendo un processo della mente, in cui prevale l'approccio analitico e algoritmico, è indipendente dalla tecnologia. Gli articoli della Wing contribuiscono a sensibilizzare politici ed educatori attorno all'importanza del pensiero computazionale e ai concetti ad esso correlati quali il coding, la programmazione e il pensiero algoritmico e dopo qualche anno lo si ritrova inserito nell'agenda politica di molti Paesi.

È nota la dichiarazione del presidente degli Stati Uniti, Barack Obama, che nel 2015, presentando l'importante investimento per l'introduzione del pensiero computazionale nell'insegnamento, si è rivolto direttamente ai giovani invitandoli a non comprare un nuovo videogame, ma a crearlo. Ha voluto con questo appello, indicare nello studio dell'informatica e nello sviluppo del pensiero computazionale, la strada per diventare cittadini attivi, creatori di innovazioni e non consumatori passivi di oggetti tecnologici.

Il tema inizia a diffondersi nelle scuole anche in Europa e nel 2016 viene pubblicato il rapporto del JRC (Joint Research Center – Centro di ricerca, servizio scientifico della Commissione europea)[6] che esamina lo sviluppo del pensiero computazionale nella istruzione obbli-

[4] https://www.cs.cmu.edu/~15110-s13/Wing06-ct.pdf.

[5] http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html%3Fp=279.html.

[6] https://ec.europa.eu/jrc/en/computational-thinking.

gatoria dei diversi paesi europei. Il documento è particolarmente interessante perché rivela i punti critici ed esplicita gli impegni che si intende assumere nel prossimo futuro. In particolare si sottolinea l'urgenza di giungere a una definizione condivisa di pensiero computazionale e di chiarire le analogie e le differenze che intercorrono fra pensiero computazionale e competenza digitale. Si sollecita a promuovere prioritariamente quelle iniziative che coinvolgano tutti gli studenti nella scuola di base, offrendo solo successivamente, a quelli più motivati, un insegnamento degli aspetti più formali. Viene sottolineata la necessità di definire un quadro organico di obiettivi specifici condivisi e di strumenti di valutazione condivisi approdando a una chiara collocazione all'interno del curricolo. L'ultimo paragrafo è dedicato alla formazione dei docenti e alla necessità di offrire opportunità di crescita sia dal punto di vista didattico che pedagogico, ricorrendo alla condivisione di buone pratiche.

In Italia il pensiero computazionale è entrato formalmente nel dibattito educativo con la presentazione del Piano Nazionale Scuola Digitale in cui viene citato numerose volte, senza essere definito. La scelta di inserirlo fra le competenze digitali può indurre a equiparare il processo cognitivo del "pensare come un informatico" alle competenze nell'uso delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione. Un valido supporto per orientarsi in questa miriade di definizioni, il docente lo trova nell'iniziativa del MIUR "Programma il futuro" porta di accesso istituzionale al sito statunitense "code.org"[7]. Il sito contiene una serie di lezioni, alcune fruibili tramite web e suddivise in una serie di esercizi progressivi, altre sono strutturate per essere svolte in assenza di computer o di connessione ad Internet. L'obiettivo comune è quello di fornire alle scuole una serie di strumenti semplici, divertenti e facilmente accessibili per avviare gli studenti ai concetti di base dell'informatica. Il progetto si arricchisce dell'iniziativa "ora del codice" che consiste nello svolgimento di un'ora delle attività proposte nel sito, in una determinata settimana, in concomitanza con analoghe attività in corso in tutto il mondo. Il progetto è stato riconosciuto come un'eccellenza europea per l'istruzione digitale nell'ambito degli European Digital Skills Awards del 2016 e ha visto aumentare notevolmente il numero degli studenti iscritti. In Italia, nel 2016, la partecipazione all'iniziativa è stata del 56% per le scuole primarie e del 28% per le secondarie di primo grado.

Le scuole, nella loro autonomia didattica e organizzativa, si stanno attivando, anche se in modo non omogeneo sul territorio nazionale, per inserire nell'offerta formativa, progetti che sviluppino competenze indispensabili per un futuro in cui l'interazione con strumenti digitali sarà sempre più diffusa.

4. Il pensiero computazionale in classe: il contesto in cui è nata l'esperienza

A seguito del terremoto del 2012, una grande azienda cooperativa del territorio, ha donato un milione di euro alle 58 scuole di ogni ordine e grado colpite dal sisma delle province di Modena e Ferrara. Ogni scuola ha ricevuto le attrezzature necessarie (15 IPad, 15 Netbook e una LIM) per realizzare una classe 2.0 e ha usufruito di un percorso di formazione rivolto ai

[7] https://code.org.

docenti delle classi coinvolte, con il supporto del Servizio Marconi TSI (Tecnologie della Società dell'Informazione)[8] dell'Ufficio Scolastico Regionale-Emilia Romagna. La finalità del progetto denominato "*AzioneCoop classe2.0*" era quella di diffondere nelle scuole l'innovazione della didattica, modernizzare gli ambienti di apprendimento, integrare le metodologie dell'informazione e della comunicazione nella prassi quotidiana. È stata avviata una formazione dei docenti articolata in incontri seminariali e laboratoriali finalizzati allo scambio di esperienze tra colleghi delle diverse scuole coinvolte, ma sono state previste anche forme di tutoraggio più personalizzate da attivare nelle fasi più critiche del lavoro con le classi. La scelta di riservare una parte consistente delle risorse a una formazione così articolata e strettamente connessa alle attività in aula con gli studenti, è stata molto apprezzata dai docenti . I partecipanti, sotto la guida di esperti, hanno acquisito sicurezza nell'uso dei dispositivi e degli applicativi utili per la didattica, in particolare nell'utilizzo della suite "GoogleApps for education" che contiene soluzioni integrate di collaborazione e condivisione, inoltre hanno ricevuto preziose indicazioni didattiche dalla disamina di progetti realizzati nelle scuole del territorio e dal confronto con colleghi di altre realtà scolastiche.

L'Istituto comprensivo "Teodoro Bonati" di Bondeno (FE) è una delle scuole coinvolte nel progetto e nel 2013 la classe 2B, secondaria di primo grado, riceve la propria dotazione. Il primo anno docenti e studenti, hanno subìto il fascino esercitato dai nuovi strumenti senza comunque distogliere l'attenzione dalla programmazione disciplinare. Sono stati realizzati prodotti multimediali di buona qualità su argomenti studiati nelle singole discipline, frutto di ricerche personali e lavori di gruppo. Si è potuto constatare che l'uso delle nuove tecnologie e la realizzazione cooperativa dei contenuti didattici ha modificato, in modo del tutto naturale, l'organizzazione del lavoro e la relazione fra gli alunni. L'approccio laboratoriale, la metodologia del lavoro di gruppo, lo sguardo multidisciplinare alle tematiche affrontate, hanno motivato maggiormente tutti gli studenti, favorito la coesione del gruppo classe, promosso competenze civiche e ridotto la distanza fra scuola ed extrascuola.

Gli insegnanti hanno avuto accesso a una notevole quantità di risorse digitali utili per insegnare, valutare, collaborare, documentare, personalizzare l'insegnamento. L'obiettivo era quello di riuscire a cogliere il valore aggiunto delle nuove tecnologie nella didattica e, al termine del primo biennio il giudizio è stato complessivamente positivo. Le importanti modifiche apportate alla programmazione che coinvolgevano la metodologia, i contenuti e le prestazioni richieste agli alunni, ha imposto una riflessione sugli strumenti di valutazione. Valutare la realizzazione di un prodotto multimediale non poteva effettuarsi attraverso una verifica orale o scritta, serviva uno strumento che fosse coerente con il tipo di prestazione. È stata pertanto adottata la *rubric*, una tabella a doppia entrata in cui in verticale vengono individuati e sintetizzati i compiti essenziali richiesti agli allievi e in orizzontale i livelli di prestazione, esplicitati in modo molto dettagliato, *un modello che contiene, sia gli elementi importanti che servono per valutare la prestazione dell' alunno, sia i criteri per misurarli*"[9].

[8] http://serviziomarconi.w.istruzioneer.it/

[9] E. Zecchi (2014). *Le rubric. Per una valutazione autentica in classe* (https://enzozecchi.files.wordpress.com/2014/02/2004_zecchi_rubric1.pdf).

5. Sviluppare il pensiero computazionale con esperienze di coding e thinkering

Nel 2015 la strumentazione delle scuole colpite dal terremoto, si è arricchita del kit *Robocoop* costituito di mini-robot per la didattica e di strumenti per programmarli rivolto principalmente alla scuola primaria.

In una grande valigia erano contenuti:

– Lego Wedo mattoncini Lego, un motore e due sensori (movimento e inclinazione) con i quali realizzare costruzioni che si muovono e compiono azioni programmabili via bluetooth con un software dotato di interfaccia drag and drop (trascinando e rilasciando) o con un computer utilizzando il linguaggio visuale di programmazione Scratch

– Sphero&Romo: una palla robotizzata programmabile che si muove a una discreta velocità grazie a un motore elettrico; è accoppiata a uno smartphone dal quale può essere programmata o comandata a distanza

– LittleBits: piccoli moduli elettronici che si collegano tramite magneti con i quali si possono costruire oggetti animati

– Bee bot: un'ape robot programmabile via bluetooth da smartphone e tablet, in grado di eseguire semplici movimenti su superfici piane.

Il progetto è stato realizzato dapprima, nella classe di scuola primaria e ha visto i bambini impegnati in attività cosiddette unplugged, senza l'uso del computer, finalizzate allo sviluppo del pensiero computazionale. Il materiale è stato reperito in rete in particolare sul sito "Computer Science Unplugged Team"[10] dove un gruppo ricercatori e insegnanti della Nuova Zelanda hanno sviluppato una vasta gamma di risorse per svolgere attività senza i computer, particolarmente adatti a livello di scuola primaria e secondaria di primo grado. Le attività coinvolgono contenuti afferenti la matematica e l'informatica, come i numeri binari, mappe, grafi, problemi di riconoscimento e di ordinamento, avvicinando gli studenti agli algoritmi, alla rappresentazione delle informazioni e procedure, attraverso situazioni problematiche significative e divertenti. Si è passati a costruire circuiti e fantasiose creazioni che si muovevano grazie a piccoli motorini elettrici e solo successivamente sono stati messi a disposizione i piccoli robot. Si è realizzato quello che in ambiente educativo viene definito come laboratorio di Thinkering, un'attività cioè che prevede <il fare, il creare con le mani> e contemporaneamente avvicina i ragazzi a fenomeni fisici e concetti scientifici. La sequenza con la quale sono stati introdotti gli strumenti nasce dalla convinzione che prima di programmare il movimento dei pixel sullo schermo è meglio programmare gli oggetti che possiamo reperire attorno a noi. *Non è solo perché il contesto è più ricco di sorprese e coinvolgente, ma soprattutto permette di non perseverare nell'illusione di separare le risorse concettuali da quelle materiali* (Antonio Rizzo, 2014)[11].

Il progetto nella classe scuola secondaria di primo grado ha inizio con un momento importante, un incontro in cui i bambini della primaria raccontano la loro esperienza e invitano i

[10] http://csunplugged.org.

[11] https://www.youtube.com/watch?v=lA0SHysLt1c.

compagni della secondaria a mettersi in gioco assieme a loro. Provvisti di diversi materiali e divisi in gruppi eterogenei i ragazzi più grandi hanno imparato dai piccoli a costruire oggetti di diverso tipo. Nelle due ore a disposizione la grande sala si è riempita di pennarelli che disegnavano da soli, fiori che si illuminavano, una sfera che si muoveva su circuiti stabiliti, un drago che all'avvicinarsi di un dito chiudeva la bocca. Il valore di questa esperienza è nell'approccio metodologico (peer education) volto a rendere gli studenti protagonisti del loro apprendimento in un contesto che li stimola ad assumersi degli impegni, a condividere successi e insuccessi e aiuta tutti a entrare in relazione con un linguaggio, verbale e non, ricco di significati. L'insegnante si è messo a disposizione dei gruppi, ha osservato, ascoltato, sollecitato i più pigri nella consapevolezza di essere, alla pari degli studenti, solo uno dei protagonisti del processo di apprendimento. Il ritorno in classe è stato segnato da grande euforia per tutti quegli oggetti mai visti prima. I docenti coinvolti nel progetto (matematica e scienze, tecnologia, italiano e inglese) hanno sollecitato i ragazzi a porsi domande sull'esperienza vissuta e provare a ipotizzare come fosse possibile che un oggetto inanimato prendesse vita e obbedisse a ordini ben precisi. L'intento era quello di inserire l'esperienza nel curricolo e utilizzare questo contesto così motivante per guidare gli studenti all' acquisizione di conoscenze e abilità riconducibili alla progettazione curricolare. Inizialmente l'insegnante di italiano ha sviluppato il tema della comunicazione fra le persone con l'intento di portare l'attenzione sulla comunicazione fra gli oggetti. I ragazzi, divisi in gruppi hanno individuato molteplici modi di comunicare, verbali, non verbali, iconici, sonori. Un gruppo ha mostrato curiosità per l'evoluzione degli alfabeti e consultando un elenco di siti forniti dal docente, ha relazionato ai compagni su alfabeti di culture lontane nel tempo e nello spazio.

Rimaneva da scoprire come l'uomo comunica con gli oggetti, quale alfabeto sceglie per tramettere ad essi le istruzioni. Con l'aiuto dei LittleBits e Lego Wedo è stato semplice giungere alla conclusione che è il passaggio di corrente a determinare il trasferimento delle informazioni. Abbiamo costruito semplici circuiti elettrici e compreso che le macchine possono scambiarsi informazioni attraverso il codice binario. Non potevamo trascurare un breve excursus sul sistema di numerazione a due cifre e imparare trasformare le rappresentazioni decimale e binaria. Gli argomenti trattati in questa fase rientrano nel curricolo tradizionale, ma l'averli inseriti in un contesto concreto e motivante ha prodotto un interesse vivo e una inattesa autonomia nel lavoro. L'approccio metodologico privilegiato ha continuato ad essere il lavoro di gruppo dove la relazione educativa si fonda sulla condivisione di un obiettivo e sulla collaborazione attiva, nella consapevolezza che ognuno è responsabile del percorso proprio e altrui.

L'ultima fase ha visto prevalere l'esplorazione e lo studio di Scratch, un linguaggio di programmazione visuale che permette, attraverso una sequenza di blocchi di istruzioni, di creare storie, giochi, animazioni interattive. La sua interfaccia è intuitiva e appare suddivisa in tre pannelli: un'area per gli script, un riquadro dove sono elencate le categorie delle istruzioni e un pannello dove si svolge l'azione (stage). Quest'ultimo usa un sistema di riferimento cartesiano con l'origine nel centro dello stage per posizionare e muovere gli oggetti che si animano. I blocchi delle istruzioni sono suddivisi in categorie, alcune intuitive, come quelle da usare per definire il movimento, l'aspetto, il suono, altre più complesse come gli operatori che includono istruzioni sia per eseguire operazioni aritmetiche e logiche, sia per valutare condizioni. Il codice usato per creare Scratch è open source, quindi chiunque può vederlo, intervenire sulla sua struttura e modificarlo creando un nuovo programma. Il software Scratch è gratuito e lo si può installare sul computer offrendo l'opportunità di lavorare offline sfuggendo ai frequenti problemi di connessione che spesso si presentano nelle scuole. Il suo sito web offre una piattaforma cloud in cui si possono salvare i progetti, condividerli con altri utenti, copiarli per crearne di nuovi partendo da quelli costruiti da altri. Si lavora quindi in un ambiente dove si vive, attraverso l'esperienza diretta, il valore della collaborazione e della condivisione.

Seguendo i suggerimenti di colleghi che avevano già sperimentato l'uso di questo programma, abbiamo scelto una metodologia che prevedesse un procedere dal semplice al complesso, ma siamo stati costretti a modificarla. Abbiamo inizialmente scelto un percorso sulla piattaforma "*programma il futuro*"[12] e i ragazzi in modo autonomo, in classe e a casa, hanno svolto le attività previste acquisendo abilità di base attraverso un metodo molto guidato. Le attività proposte in questo sito hanno il vantaggio di suggerire, in caso di errore, quali aspetti controllare per riuscire a eseguire il compito, pertanto risultano di grande aiuto per i ragazzi in difficoltà o per i più distratti. Ascoltando le valutazioni degli studenti lo svolgimento dei compiti è risultato semplice ma noioso. Abbiamo quindi deciso di modificare l'organizzazione della lezione lasciando più spazio alla creatività dei ragazzi. Si iniziava con la presentazione di un prodotto realizzato dal docente in cui era inserito di volta in volta, un elemento concettuale nuovo (variabile, contatore, ciclo...) e i ragazzi venivano invitati a inventarne uno che avesse la stessa struttura. Il docente, a disposizione di chi chiedeva il suo aiuto, ha cercato di guidare i ragazzi in difficoltà e personalizzare gli interventi in modo da permettere a ciascuno di progredire.

Creare dei personaggi, scrivere le istruzioni e vedere che tutto si concretizza all'istante, gratifica tutti gli studenti. Si osservano i comportamenti tipici delle attività laboratoriali condotte in un clima collaborativo: tutti partecipano attivamente, c'è chi aiuta il compagno, chi sperimenta e approfondisce, qualcuno indietreggia di fronte al un ostacolo e altri che sanno trovare alleanze per superare le difficoltà. Quali processi cognitivi siano stati sviluppati nel corso di questa esperienza è difficile dirlo. Tutti sono stati in grado di comprendere la difficoltà fra il <capire> e il <far capire>, tant'è vero che l'esclamazione più frequente era <ma io gliel'ho scritto, ma lui non lo fa>. La valutazione di queste attività che vedono lo studente protagonista del suo percorso di apprendimento, richiede un riesame degli strumenti di valutazione per adeguarli ai nuovi compiti. Abbiamo elaborato una *rubric* in cui erano esplicitate le abilità richieste e i corrispondenti comportamenti che ne attestavano il livello raggiunto, ma, per le abilità cognitive, lo strumento più adatto rimane secondo noi, l'osservazione e l'interazione sistematica con lo studente per cogliere l'origine degli ostacoli che incontra e adeguare così la modalità di intervento.

[12] https://www.programmailfuturo.it.

6. Conclusioni

Non esistono metodologie e strumenti che garantiscono, per tutti, un successo nell'apprendimento.

Il robot, insieme agli altri dispositivi, attrae l'attenzione di tutti gli allievi, ma uno sguardo attento percepisce differenze sostanziali nel modo di rapportarsi con esso. C'è chi lo tiene fra le mani incuriosito dal movimento, dalle luci e dai suoni, lo usa per giocare o vincere una sfida, c'è chi lo manipola e lo osserva con l'obiettivo di "comandarlo" e verificarne tutte le potenzialità. Anche con le attività di Scratch si è presentata la stessa situazione: c'è chi si è limitato a costruire un gioco usando in modo distratto gli script, continuando a procedere per tentativi ed errori e c'è chi ha costruito un gioco ma non si è accontentato di questo risultato, lo ha arricchito, affinato, ponendosi obiettivi sempre nuovi.

Abbiamo sperimentato l'utilizzo di alcune schede tratte da libri pubblicati di recente finalizzati all'apprendimento di Scratch ma, nel nostro contesto, non sono stati apprezzati; alcuni alunni hanno preferito utilizzare i tutorial che qualche responsabile di "CoderDojo" (laboratori gratuiti di programmazione informatica rivolti a bambini e ragazzi di diversa età) ha pubblicato su Youtube[13]. Abbiamo ritenuto importante soffermarci su questo aspetto e rendere consapevoli i ragazzi che Internet può essere di grande aiuto quando si desidera imparare cose nuove e non si ha l'aiuto di nessuno. Riconosciamo a questo progetto diversi meriti fra i quali quello di aver fatto emergere le potenzialità di alcuni studenti che nelle attività proposte, accattivanti anche perché prive di ostacoli iniziali, hanno trovato una opportunità di successo. A noi docenti è stata offerta una formazione di qualità, in un clima coinvolgente e collaborativo. La professionalità degli esperti del Servizio Marconi, il sostegno dei genitori e la grande partecipazione degli alunni, sono stati fondamentali per vincere il disagio causato dalla necessaria riduzione dei contenuti svolti a favore delle attività laboratoriali.

Cosa hanno imparato gli studenti durante queste attività? Difficile dirlo con certezza, il nostro compito in questa esperienza consisteva principalmente nell'osservare, descrivere e raccogliere informazioni relative ai processi cognitivi e sociali che venivano a manifestarsi. Abbiamo verificato che i robot rappresentano per la maggior parte dei ragazzi una fonte di notevole curiosità e suscitano in loro un forte bisogno di esplorazione. Opportunamente guidati dai docenti, gli alunni hanno avuto modo di costruire sequenze di istruzioni, individuare in esse errori, formulare ipotesi, manipolare costanti e variabili, utilizzare un linguaggio specifico privo di ambiguità. Possiamo ipotizzare abbiano sviluppato abilità logiche ed espressive grazie alle attività proposte, mentre siamo in grado di confermare il miglioramento delle competenze relazionali e metacognitive. Abbiamo visto la maggior parte degli allievi, contrariamente a quanto accade nelle attività curricolari, concentrati nel lavoro, impegnati a costruire e applicare procedure, disponibili all'ascolto di suggerimenti e aperti alla condivisione dei risultati. Alla luce di quanto osservato sarà possibile avviare una ricerca orientata ad esplorare specifici obiettivi di apprendimento che in questa esperienza abbiamo solo percepito essere coinvolti nella realizzazione delle attività proposte.

[13] https://www.youtube.com/watch?v=Ym7QkWBgfsA.

La sperimentazione di percorsi didattici orientati allo sviluppo del pensiero computazionale è appena iniziata. La società del futuro sarà sempre più digitalizzata e automatizzata e la scuola dovrà rivedere la sua offerta formativa per rispondere alla necessità di formare cittadini attivi e consapevoli, preparati a gestire la complessità e l'incertezza. Nella scuola del primo ciclo i docenti sono chiamati a dedicare maggiore tempo e attenzione alle discipline STEM (Science, Technology, Engineering, Maths) ritenute indispensabili per chi si affaccerà fra alcuni anni al mondo del lavoro. Le attività laboratoriali hanno lasciato intravedere un grande interesse di tutti gli alunni per questi nuovi strumenti, ma le problematiche con cui, noi docenti ci confrontiamo quotidianamente sono rimaste sostanzialmente immutate: in quali orari svolgere queste attività? con quali tagli alla programmazione disciplinare? Come gestire la diversità degli stili e dei tempi di apprendimento? Come conciliare una didattica collaborativa e costruttivista con l'aumento dei contenuti da sviluppare? Occorre secondo noi, prendere le distanze da un'ottica additiva che assegna alla scuola compiti sempre nuovi e muoversi verso una revisione dei curricoli per arrivare a tracciare una nuova mappa delle conoscenze e delle abilità utili allo sviluppo delle competenze del ventunesimo secolo.

Il docente sarà chiamato a un impegno che penetra diversi aspetti della sua professione: la conoscenza di nuovi contenuti, la riflessione didattica e pedagogica su di essi, la documentazione e la condivisione di esperienze, la sperimentazione di nuovi percorsi.

Affinché la sfida dell'innovazione risulti vincente, sarà determinante agire sul contesto in cui il cambiamento andrà a realizzarsi, in particolare sulla formazione docente e sull'organizzazione di una professione che in virtù delle nuove tecnologie e delle nuove modalità di insegnamento in gran parte ancora da sperimentare, vede dilatarsi a dismisura il tempo di lavoro.

7. Bibliografia

Bocchi, G., Ceruti, M. (a cura di) 2007). *La sfida della complessità*. Milano: Bruno Mondadori.

Bonaiuti, G. (2006). *E-Learning 2.0. Il futuro dell'apprendimento in rete, tra formale e informale*. Trento: Erickson.

Calvani, A. (2001). *Educazione, comunicazione e nuovi media. Sfide pedagogiche e cyberspazio.* Torino: Utet..

Calvani, A. (2006). *Rete, comunità e conoscenza. Costruire e gestire dinamiche collaborative.* Trento: Erickson.

Dominici, P. (2016). *Il grande equivoco. Ripensare l'educazione (#digitale) per la Società Ipercomplessa.* In: https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebookcomputational-thinking-what-and-why.

Dominici, P. (2016). L'anello debole e le reti "fuori" dalla Rete: ripensare la cittadinanza nella Società Interconnessa. In AA.VV., *La Rete e il fattore C. Cultura, complessità, collaborazione*, Stati Generali dell'Innovazione, Roma.

Dreiver, R., Asoko, K., Leach, J., Mortimer, E., Scott, P. (1994). Construtting Scientific Knowledge in the Classroom. *Educational Researcher*, 23, 7, 5-12.

Gardner, H., Davis, K. (2014). *Generazione App. La testa dei giovani e il nuovo mondo digitale*. Milano: Feltrinelli.

Gramigna, A., Righetti, M. (2001). *Multimedialità e società complessa.* Milano: Franco Angeli.

Intervista alla BBC – Ottobre 2016, Stephen Hawking – will AI kill or save humankind?. In: http://www.bbc.com/news/technology-37713629.

Jonassen, D.H. (1996). *Computers in the classroom: Mindtools for critical thinking.* Columbus, OH: Merrill/Prentice-Hall.

Jones, E. (2011) *The Trouble with Computational Thinking.* In: https://cacm.acm.org/magazines/2017/6/217742-remaining-trouble-spots-with-computational-thinking/fulltext

Lodi, M., Martini, S., Nardelli, E.(2017). *Abbiamo davvero bisogno del pensiero computazionale*?. In: http://mondodigitale.aicanet.net/20175/articoli/MD72_02_abbiamo_davvero_bisogno_del_pensiero_computazionale.pdf.

Marchignoli, R., Lodi, M. (2016). *EAS e pensiero computazionale. Fare coding nella scuola primaria.* Brescia: La Scuola.

McCormack, A. (2017), *The e-Skills Manifesto. A Call to Arms.* In: http://gesi.org/uploads/2017/06/the-e-skills-manifesto.pdf.

Morin, E. (2001). *I sette saperi necessari all'educazione del futuro.* Milano: Raffaello Cortina.

Nardelli, E. (2014) *Un primo passo alla scoperta dell'informatica come scienza*. In: http://www.raiscuola.rai.it/articoli/alla-scoperta-dellinformatica/37846/default.aspx.

Pagnotta, F. (a cura di) (2013). *L'Età di Internet. Umanità, cultura, educazione*. *Con un'intervista a Maurizio Bettini*, Milano-Firenze: Collana Studi, Mondadori Education-Le Monnier Università.

Papert, P. (1980). *Mindstorms. Bambini computer e creatività*. Milano: Emme.

Parisi, D. (2000). *Scuol@.it. Come il computer cambierà il modo di studiare dei nostri figli.* Milano: Mondatori.

Pensiero Computazionale – Una guida per insegnanti – CNR (versione italiana di Computational thinking – A guide for teachers -- Computing At School) (2016).

Risultati indagine dell'Organizzazione per la Cooperazione e lo sviluppo economico. Maggio 2017. In: http://www.lavoce.info/archives/40406/il-lavoro-senza-qualita.

Rivoltella, P.C. (2001). *Media education. Modelli, esperienze, profilo disciplinare*. Roma: Carocci.

Rivoltella, P.C. (2006). *Screen generation. Gli adolescenti e le prospettive dell'educazione nell'età dei media digitali*. Milano: Vita e Pensiero.

Roncaglia, G. (2010). *La quarta rivoluzione. Sei lezioni sul futuro del libro.* Roma-Bari: Laterza.

Schon, D. A. (2006). *Formare il professionista riflessivo. Per una nuova prospettiva della formazione e dell'apprendimento nelle professioni.* Milano: FrancoAngeli.

Severino, E. (1998). *Il destino della tecnica*. Milano: Rizzoli.

Vygotskij, L. S. (1988). *Il processo cognitivo.* Torino: Boringhieri.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35.

Wing, J. M. (2008). Five deep questions in computing. *Communications of the ACM*, 51, 58-60.

Wing, J. M. (2016). *Computational thinking, 10 years later*. In: https://www.microsoft.com/en-us/research/blog/computational-thinking-10-years-later.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Zecchi, E. (2014). *Le rubric. Per una valutazione autentica in classe.* In: https://enzozecchi.files.wordpress.com/2014/02/2004_zecchi_rubric1.pdf.

8. Sitografia

http://animatoredigitale.online/
http://codemooc.org/mooc/
https://code.org/
http://serviziomarconi.w.istruzioneer.it/
http://www.istruzione.it/scuola_digitale/index.shtml
http://www.raiscuola.rai.it/programma-coding/#Programma
https://www.agendadigitale.eu/
https://www.robotiko.it/

Received October 11, 2017
Revision received November 11, 2017/December 9, 2017/December 27, 2017
Accepted January 12, 2018

"Annali online della Didattica e della Formazione Docente"
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 332-354 – ISSN 2038-1034

Esperienze di didattica della Fisica in diversi livelli del sistema educativo

Susanna Bertelli
Mirco Andreotti
Paolo Lenisa
Federico Spizzo

Abstract – *The growing interest of people in science events, the projects supported by the Italian Ministry of Education, University and Research to foster STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) teaching in different levels of the education system and the introduction of modern Physics into some Italian High Schools, has contributed in many cases to strengthen the bond between schools, universities and research centers. This bond has been carried out in specific activities which required innovative and effective communication and education methodologies. This paper presents the activities devoted to the dissemination and teaching of Physics organized in the last three years, starting from the academic year 2015/2016, by the University of Ferrara and the National Institute for Nuclear Physics. Some study cases differentiated by contents, recipients and teaching strategies will be analyzed. Particular attention will be given to the activities dedicated to the teaching of modern and contemporary Physics that involved High School students (http://www.fe.infn.it/orientamento_fisica/courses/laboratori-di-fisica-moderna/), the science hands-on laboratories performed with pupils attending the Primary Schools and a museum-based education experience included in a History of Physics exhibition devoted to art and science (www.fe.infn.it/fisicaemetafisica). The former is a case of out-of-school learning in which High School students work together with researchers to conduct a modern Physics experiment, and once back in school they make a report for their peers about what they have done and learnt in the laboratory. In the latter case, the Primary School pupils carry out guided experiments to become familiar with the scientific method investigating phenomena of Physics in everyday life. In the last case, some modern discoveries of Physics are introduced by the relation between artworks and scientific instruments connected to the History of Ferrara.*

Riassunto – *La crescente partecipazione delle persone a eventi di divulgazione scientifica, i progetti sostenuti dal MIUR (http://www.progettolaureescientifiche.eu; http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/ricerca/diffusione) per promuovere l'insegnamento delle materie STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) nei diversi livelli del sistema educativo e l'introduzione di argomenti di fisica moderna e contemporanea nelle programmazioni di alcuni Licei (http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_Liceo%20-scientifico%20opzione%20Scienze%20Applicate.pdf) hanno contribuito, in molti casi, a rafforzare il legame tra scuola, Università e centri di ricerca. Questo legame si è concretizzato nell'istituzione di attività dedicate in cui è stato necessario impiegare metodologie comunicative e didattiche sempre più efficaci. L'articolo presenta lo spettro delle attività realizzate negli ultimi tre anni, a partire dall'anno accademico 2015/2016, dall'Università di Ferrara e dall'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare per la comunicazione e la didattica della fisica. Verranno analizzati alcuni casi studio che si differenziano per contenuti, destinatari, contesti e strategie didattiche. In particolare verranno prese in esame le attività dedicate all'insegnamento della fisica moderna e contemporanea condotte con gli allievi delle scuole secondarie di II grado (http://www.fe.infn.it/orientamento_fisica/courses/laboratori-di-fisica-moderna/), i laboratori scientifici hands-on realizzati con gli allievi delle scuole primarie e un'esperienza di didattica museale inserita in una mostra di storia della fisica dedicata al binomio arte-scienza (www.fe.infn.it/fisicaemetafisica). Il primo è un caso di out-of-school learning in cui gli allievi delle scuole secondarie di II grado lavorano in gruppo a fianco dei ricercatori, per realizzare un esperimento di fisica moderna, e una volta tornati in classe devono relazionare ai pari quanto svolto e appreso durante l'attività laboratoriale. Nel secondo caso, gli allievi* *delle scuole primarie sono chiamati a condurre esperimenti guidati per acquisire familiarità con il metodo scientifico, investigando alcuni fenomeni fisici presenti nel quotidiano. Nell'ultimo caso, alcune scoperte della fisica moderna vengono introdotte dalla corrispondenza tra opere d'arte e strumenti scientifici e collegate alla storia di Ferrara.*

Keywords – out-of-school learning, cooperative learning, learning-by-doing, learning-by-teaching, museum education

Parole chiave – apprendimento extrascolastico, apprendimento cooperativo, learning-by-doing, learning-by-teaching, didattica museale

Susanna Bertelli, Dottore di Ricerca in Fisica, ha conseguito un Master in "Comunicazione delle Scienze", è Assegnista di ricerca in Fisica presso l'Università degli Studi di Ferrara e i Laboratori Nazionali di Frascati dell'INFN e docente del corso di *Didattica della Fisica*. Si occupa di progetti di educazione scientifica e di orientamento per divulgare e insegnare la fisica nelle scuole e in programmi di educazione continua. È ideatrice e responsabile del progetto Fisici Senza Frontiere, cura la Collezione Instrumentaria delle Scienze Fisiche del Sistema Museale d'Ateneo di Ferrara, fa parte della redazione del sito di divulgazione scientifica ScienzaPerTutti INFN, progetta e organizza mostre ed eventi scientifici. Ha vinto il bando Giovani Ricercatori dell'Università di Ferrara grazie al quale ha trascorso un periodo al CERN per studiarne le attività di outreach. È autrice di pubblicazioni di fisica delle particelle e storia della Fisica.

Mirco Andreotti è Tecnologo di Ricerca presso la Sezione di Ferrara dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare e collabora con le attività di ricerca e didattiche del Dipartimento di Fisica e Scienze della Terra dell'Università degli Studi di Ferrara. Ha tenuto corsi di Fisica, Matematica, Informatica, Laboratori di Fisica ed Elettronica per diversi corsi di Laurea, attualmente è docente del Laboratorio di Elettronica Digitale per il corso di laurea in Fisica. La sua attività principale riguarda la progettazione, personalizzazione e applicazione della moderna tecnologica elettronica e informatica applicata ai laboratori di ricerca e ai laboratori didattici. In particolare collabora ad attività di ricerca dei gruppi di Fisica delle Particelle e di Fisica Medica. Ha inoltre collaborato ad attività di ricerca nei campi dell'architettura, della medicina e dell'ambiente per lo studio di tecniche di misura e analisi dati. E' autore di numerose pubblicazioni su riviste internazionali ed è stato relatore di numerose tesi di laurea in Informatica, Scienze Naturali e Fisica.

Paolo Lenisa ha conseguito il Dottorato in Fisica presso l'Università degli Studi di Ferrara dove è Professore Ordinario in Fisica Nucleare e Subnucleare e docente di *Fisica Generale* e *Storia della Fisica*. Si occupa di fisica delle particelle elementari con particolare riguardo allo studio dello spin del protone ed alle simmetrie fondamentali della Natura. In tale ambito, è stato proponente e responsabile di vari esperimenti in diversi laboratori internazionali. Attualmente è Co-spokesperson della collaborazione JEDI (Juelich Electric Dipole moment Investigations) che si occupa del momento di dipolo elettrico del protone, una ricerca legata al mistero della dominanza della materia sull'antimateria nell'Universo. È autore di oltre 200 pubblicazioni su rivista scientifica e relatore di dieci tesi di dottorato in Fisica.

Federico Spizzo è Ricercatore di Fisica Sperimentale presso il Dipartimento di Fisica e Scienze della Terra dell'Università degli Studi di Ferrara, ove tiene i corsi di *Fisica dello Stato Solido* per il Corso di Laurea Magistrale in Fisica e di *Fisica*, per il Corso di Laurea in Scienze Biologiche. I sui principali interessi di ricerca riguardano lo studio dei materiali magnetici di tipo nanostrutturato. In quest'ambito, si occupa sia delle proprietà di sistemi magnetici biocompatibili che dello studio di materiali magnetici per memorizzazione dati e sensoristica. È autore di numerose pubblicazioni su riviste internazionali, ed è stato relatore di oltre trenta tesi di laurea. Attualmente cura i "Venerdì dell'Universo", rassegna di incontri dedicati alla divulgazione scientifica organizzata dal suo Dipartimento e dalla locale sezione dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

1. La diffusione della cultura scientifica

Nell'ultimo decennio in Italia sono aumentate le attività per la promozione della cultura scientifica che si sono concretizzate in proposte e modelli innovativi sia nell'ambito dell'insegnamento che della divulgazione. Grazie a queste risorse, anche la didattica e la comunicazione della Fisica stanno vivendo uno sviluppo molto intenso. Basti pensare ai bandi attivati dal MIUR per la diffusione della cultura scientifica [Bando MIUR diffusione], al bando proposto dal Dipartimento per le pari opportunità per il finanziamento di percorsi di approfondimento in materie scientifiche con l'intento di superare stereotipi e pregiudizi che alimentano il gap di conoscenze tra le studentesse e gli studenti rispetto alle materie STEM [Bando Pari opportunità] e al Progetto Lauree Scientifiche [PLS]. Tra gli obiettivi principali di quest'ultimo progetto si ha quello di migliorare la conoscenza e la percezione delle discipline scientifiche nella Scuola secondaria di secondo grado, offrendo agli studenti degli ultimi tre anni di partecipare ad attività di laboratorio, curriculari ed extra curriculari stimolanti e coinvolgenti.

In ultimo, l'introduzione della Fisica moderna nelle programmazioni dei Licei Scientifici, in base alle Indicazioni Nazionali del MIUR, ha aperto un dialogo stimolante e costruttivo tra Scuole e Università che si interrogano in merito alle strategie, ai supporti e ai materiali didattici da adottare (Michelini, 2010).

In questo contributo verranno presentate le numerose iniziative messe a punto e realizzate a partire dall'anno accademico 2015/2016 dal Dipartimento di Fisica e Scienze della Terra dell'Università degli Studi di Ferrara in collaborazione con l'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), in merito alla disseminazione delle scienze fisiche con particolare attenzione alle ricadute didattiche. Tutte queste attività di trasferimento di conoscenze fanno parte della Terza Missione dell'Università e degli enti di ricerca [Anvur].

2. Out-of-school learning: laboratori di Fisica moderna all'Università

Il primo caso studio presentato è incluso nel programma delle attività di orientamento rivolte alle Scuole secondarie di II grado organizzate dal Corso di Laurea in Fisica a Ferrara. In questi primi anni in cui è stato attivato questo percorso sono state definite e messe a punto le attività sperimentali da inserire nell'offerta didattica e adattate nei contenuti ai destinatari. Nelle prossime edizioni verrà condotta una ricerca didattica su alcune delle attività proposte con valutazione delle stesse.

Con Fisica moderna si indica quella parte del sapere scientifico nata in seguito alle teorie rivoluzionarie della meccanica quantistica e della relatività aprendo la strada allo sviluppo della fisica nucleare e subnucleare, della fisica della materia, l'astrofisica e la cosmologia.

Riguardo la programmazione di Fisica per l'ultimo anno dei Licei Scientifici, le Indicazioni Nazionali [Indicazioni Nazionali Licei Scientifici] riportano:

Il percorso didattico comprenderà le conoscenze sviluppate nel XX secolo relative al microcosmo e al macrocosmo, accostando le problematiche che storicamente hanno portato ai nuovi concetti di spazio e tempo, massa ed energia. L'insegnante dovrà prestare attenzione a *utilizzare un formalismo matematico accessibile agli studenti, ponendo sempre in evidenza i concetti fondanti.*

Lo studio della teoria della relatività ristretta di Einstein porterà lo studente a confrontarsi con la simultaneità degli eventi, la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze; l'aver affrontato l'equivalenza massa-energia gli permetterà di sviluppare un'interpretazione energetica dei fenomeni nucleari (radioattività, fissione, fusione).

L'affermarsi del modello del quanto di luce potrà essere introdotto attraverso lo studio della radiazione termica e dell'ipotesi di Planck (affrontati anche solo in modo qualitativo), e sarà sviluppato da un lato con lo studio dell'effetto fotoelettrico e della sua interpretazione da parte di Einstein, e dall'altro lato con la discussione delle teorie e dei risultati sperimentali che evidenziano la presenza di livelli energetici discreti nell'atomo. L'evidenza sperimentale della natura ondulatoria della materia, postulata da De Broglie, ed il principio di indeterminazione potrebbero concludere il percorso in modo significativo.

La dimensione sperimentale potrà essere ulteriormente approfondita con attività da svolgersi non solo nel laboratorio didattico della scuola, ma anche presso laboratori di Università ed enti di ricerca, aderendo anche a progetti di orientamento.

In quest'ambito, lo studente potrà approfondire tematiche di suo interesse, accostandosi alle scoperte più recenti della fisica (per esempio nel campo dell'astrofisica e della cosmologia, o nel campo della fisica delle particelle) o approfondendo i rapporti tra scienza e tecnologia (per esempio la tematica dell'energia nucleare, per acquisire i termini scientifici utili ad accostarsi criticamente il dibattito attuale, o dei semiconduttori, per comprendere le tecnologie più attuali anche in relazione a ricadute sul problema delle risorse energetiche, o delle micro- e nanotecnologie per lo sviluppo di nuovi materiali).

Come si evince dalle Indicazioni ci sono due aspetti fondamentali da tener presente nell'insegnamento della Fisica moderna: il formalismo matematico e la parte sperimentale. Gli allievi del quinto anno non possiedono tutti gli strumenti matematici per poter studiare e descrivere le leggi della fisica moderna e questo aspetto deve essere curato dal docente che deve adattare le spiegazioni al livello delle conoscenze degli allievi; l'aspetto matematico può essere integrato con un approccio storico-epistemologico. In questo approccio si mette in evidenza lo sviluppo del pensiero scientifico e dei concetti seguendo le tappe e le scoperte che fungono da pietra miliare per queste teorie. Per ciò che riguarda la parte sperimentale, non tutti i Licei hanno a disposizione attrezzature ed esperimenti dedicati alla parte di Fisica moderna.

In forza di quanto riportato dal MIUR, il Dipartimento di Fisica e Scienze della Terra dell'Università di Ferrara e l'INFN hanno istituito un'attività presso la propria sede "I laboratori di fisica moderna" dove poter approfondire l'aspetto sperimentale dei concetti di fisica moderna affrontati dagli allievi in classe.

Uno degli scopi di questa attività è avvicinare gli allievi al mondo della ricerca e in questa esperienza rivestono il ruolo di un ricercatore che lavora con i colleghi, esegue esperimenti, analizza e discute i risultati.

Vengono proposte dodici attività, ognuna delle quali è dedicata a uno dei temi presenti nelle Indicazioni. Alcune di queste attività sono state messe a punto ad hoc, altre sono state ottenute progettando delle trasposizioni didattiche delle attività di ricerca che sono realizzate in Dipartimento, adattando contenuti ed esperimenti per renderli fruibili a studenti del quinto anno. Gli allievi vengono suddivisi in gruppi e, una volta fornite loro le istruzioni, conducono in prima persona l'esperimento. L'approccio utilizzato è il *learning-by-doing* in quanto lo studente è parte attiva nell'esecuzione dell'esperienza e deve confrontarsi con gli altri componenti del gruppo sviluppando competenze nel *team working*. Spesso i gruppi di lavoro sono costituiti da studenti provenienti da diversi Istituti e quindi si cerca di privilegiare la strategia didattica del *cooperative learning* (Montalbano, 2013) in cui si trovano a confrontare e condividere le loro conoscenze e le loro abilità con il comune obiettivo di completare l'esperimento. Gli allievi sono chiamati a osservare fenomeni e interpretarli, ad analizzare i dati raccolti, discutere i risultati ottenuti e dove possibile confrontarli con i modelli teorici. In questa attività vengono introdotti all'ambiente di ricerca dell'Università, imparano ad utilizzare attrezzature da laboratorio ad alto contenuto tecnologico, software e programmi di analisi dati e lavorano a fianco dei ricercatori. Una volta tornati in classe, viene adottata la strategia del *learning-by-teaching* in quanto gli studenti devono relazionare ai pari l'esperimento condotto in tutte le fasi: teoria, descrizione dell'apparato sperimentale, esecuzione e discussione dei risultati ottenuti. In questa attività gli allievi sono chiamati a ripensare e rielaborare quanto appreso e produrre una sintesi per i colleghi.

Verranno di seguito introdotte le esperienze proposte agli allievi per presentare le diverse aree coinvolte e mettere in evidenza le conoscenze e le competenze che vengono sviluppate dai partecipanti [Laboratori Fisica Moderna]. Gli allievi scelgono di partecipare ad una di queste attività. Il laboratorio è strutturato in una parte di teoria e una parte pratica e si svolge nell'arco di un pomeriggio, tipicamente nel mese di febbraio. I gruppi di lavoro sono costituiti da 3 studenti.

Le prime quattro attività sperimentali sono dedicate allo studio della teoria di Planck, all'effetto fotoelettrico e al principio di indeterminazione di Heisenberg. Le restanti attività riguardano argomenti di fisica contemporanea citati nelle Indicazioni come astrofisica, cosmologia, radioattività e nanotecnologie. Per alcune di queste attività vengono fornite delle schede per la raccolta dei dati ma non è prevista una valutazione. Nell'articolo verranno presentate in dettaglio le esperienze dedicate al principio di indeterminazione di Heisenberg, la misura della costante di Planck usando i led e magnetismo e nanostrutture; nei primi due casi le esperienze possono essere replicate nelle scuole (presupponendo che il materiale sia facilmente reperibile).

Verifica del Principio di Indeterminazione di Heisenberg

L'esperienza è finalizzata alla verifica del principio di indeterminazione di Heisenberg, uno dei concetti cardine della meccanica quantistica nominato nelle Indicazioni.

Nel laboratorio di ottica, tramite l'utilizzo di un laser e di una fenditura regolabile, gli allievi sono chiamati a interpretare le figure di diffrazione in termini del dualismo onda-corpuscolo della radiazione elettromagnetica. Per la verifica del principio di indeterminazione l'esperienza si propone di misurare le incertezze sulla posizione e sulla velocità trasversali del fascio laser.

Gli studenti sono guidati dai ricercatori nelle operazioni di calibrazione degli strumenti, nell'esecuzione delle misure e nell'elaborazione dati.

Introduzione fenomenologica

Agli studenti viene presentata una introduzione fenomenologica del mondo microscopico. Viene trattato il dualismo onda-corpuscolo sottolineando che il termine particelle non si riferisce a "palline" macroscopiche rimpicciolite e soprattutto evidenziando come la diffusa affermazione divulgativa "le particelle si comportano a volte come onde a volte come particelle" è sbagliata. In particolare si parla di radiazione elettromagnetica (luce), ben nota per poter essere studiata con un formalismo ondulatorio, per la quale si mostrano evidenze sperimentali della natura corpuscolare analizzando ingrandimenti di radiografie ed esperimenti di singoli fotoni. In parallelo vengono presentati esperimenti di diffrazione di elettroni per trattare la natura ondulatoria delle particelle. Si introduce quindi il concetto di funzione d'onda associata allo stato di una particella e alla corrispondente probabilità per collegarsi alla figura di diffrazione interpretata come distribuzione di probabilità. Ne segue una introduzione alle misure statistiche in meccanica quantistica effettuate su grandi campioni di particelle. Dopo queste premesse si introduce "il principio di indeterminazione" nella sua formulazione generale e ci si concentra sulla nota relazione di indeterminazione posizione-impulso, che per semplicità viene cambiata in posizione-velocità. Viene infine descritto l'apparato sperimentale e la fenomenologia dell'esperienza che gli studenti conducono in laboratorio per verificare la relazione di indeterminazione $\Delta x \, \Delta v_x$ = costante, come descritto di seguito.

Apparato sperimentale

L'esperienza viene eseguita utilizzando un laser, una fenditura regolabile e un semplice schermo sul quale viene visualizzata l'immagine di diffrazione del laser che attraversa la fenditura.

Fenomenologia dell'esperienza

Il laser viene interpretato come un fascio di dimensioni trasversali finite (1-2 mm di diametro) di fotoni che viaggiano tutti paralleli alla velocità della luce nella direzione y secondo il sistema di riferimento indicato in figura (Figura 1).

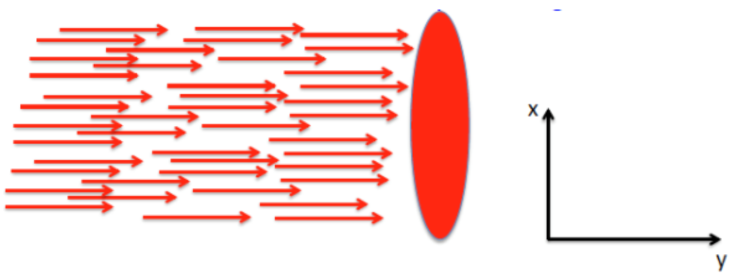


Figura 1 – Fascio di fotoni e il sistema di riferimento

Si considera il sistema solo nelle due dimensioni x-y.

L'interposizione tra il fascio e lo schermo di una fenditura di larghezza d con il centro nella posizione x_0 (vedi Figura 2) viene interpretata come una misura selettiva della posizione x dei fotoni del fascio laser che consente di affermare che una certa frazione di fotoni ha posizione $x = x_0 \pm d/2$, quindi la larghezza d può essere interpretata come l'intervallo di incertezza e per semplicità lo associamo a Δx.

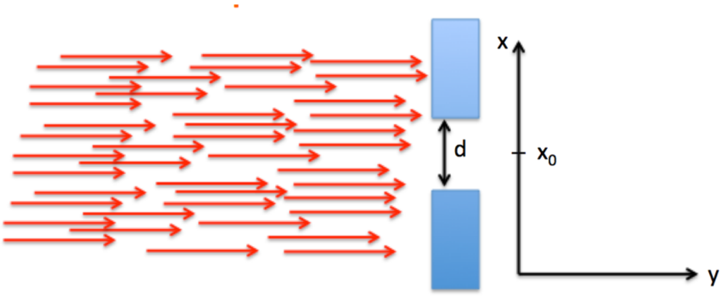


Figura 2 – Il fascio laser e la fenditura di apertura d

Sullo schermo appare evidente che il fascio dopo aver attraversato la fenditura si propaga nella direzione x in modo simmetrico attorno a x_0. Ci si concentra solo sul picco centrale della figura di diffrazione (Figura 3) e si interpreta questo in termini di componenti della velocità dei fotoni. Prima della fenditura tutti i fotoni avevano componente della velocità lungo x nulla, mentre dopo la fenditura compare una componente non nulla lungo x. Analizzando in dettaglio la simmetria dell'immagine di diffrazione si può concludere che in egual misura i fotoni acquistano una componente $+\Delta v_x$ e $-\Delta v_x$, (si sottolinea che il valore assoluto rimane comunque sempre la velocità della luce).

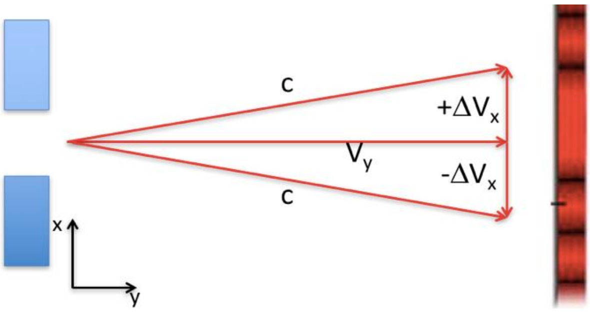


Figura 3 – La fenditura e a destra la figura di diffrazione

Questo può essere interpretato come una misura statistica della componente x della velocità e la misura può essere espressa con l'intervallo di incertezza $v_x = 0 \pm \Delta v_x$. In sintesi la larghezza della fenditura è interpretata come l'incertezza sulla misura della posizione dei fotoni nella direzione x e la larghezza (a meno di fattori moltiplicativi) del picco centrale della figura di diffrazione è interpretato come l'incertezza sulla misura della componente x della velocità dei fotoni dopo la fenditura. Ripetendo le misure per diverse larghezze della fenditura è possibile verificare in seguito se la relazione $\Delta x \, \Delta v_x$ è costante.

Attività degli studenti in laboratorio

Gli studenti, suddivisi in gruppi di 4-5 persone, eseguono l'esperienza variando l'apertura della fenditura e annotando sullo schermo di carta la larghezza del picco centrale di diffrazione, prestando attenzione alla corrispondenza con l'apertura della fenditura. Terminata la raccolta dei dati procedono a misurare (senza essere disturbati dal laser) le larghezze dei picchi di diffrazione precedentemente segnati sullo schermo.

Gli studenti procedono all'elaborazione dei dati calcolando per ogni misura il prodotto $\Delta x \, \Delta v_x$ e il corrispondente errore con le regole di propagazione dell'errore, infine ripotano tutte le misure su un grafico per poterle confrontare fra di loro e valutare semi-quantitativamente se il prodotto si può ritenere costante entro gli errori strumentali.

Valutazione dell'attività svolta

Al fine di valutare la partecipazione e la comprensione degli studenti all'attiva proposta si sottopone loro una scheda da compilare, la quale si compone delle seguenti sezioni: breve descrizione dello scopo dell'esperienza, materiale utilizzato, tabella di raccolta e analisi dati, rappresentazione grafica dei risultati su carta millimetrata e conclusioni/commenti.

Misura della costante di Planck usando Diodi Emettitori di Luce (LED)

La costante di Planck costituisce una costante fondamentale che interviene nello studio dei fenomeni quantistici.

Dopo una introduzione alla fisica moderna e alla tecnologia relativa ai diodi emettitori di luce LED, gli allievi assemblano l'apparato sperimentale (Figura 4). I led vengono posizionati sulla basetta assieme alle resistenze. Utilizzando un generatore di tensione e due multimetri (uno funge da amperometro, l'altro da voltmetro) gli allievi variano la tensione e misurano la corrente; i dati raccolti vengono utilizzati per rappresentare graficamente per ogni led (blu, rosso, arancio, giallo) la curva caratteristica, corrente in funzione della tensione. Per ognuna di queste curve gli allievi eseguono un fit lineare per ricavare il valore della tensione di soglia, V_{th} (quando la corrente si annulla). Il valore della tensione di soglia viene inserito nell'equazione $eV_{th}=hc/\lambda$ dove e è la carica dell'elettrone, h è la costante di Planck e λ è il valore della lunghezza d'onda del led. Da questa equazione si ricava h per i diversi LED (Planinšič, Etkina, 2014). Durante l’analisi si confronteranno i dati raccolti con le curve caratteristiche fornite dai produttori, prestando attenzione alla trattazione consistente degli errori sperimentali.

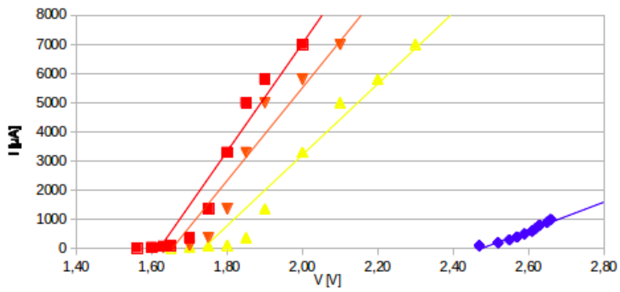


Figura 4 – Apparato sperimentale per misura della costante di Planck con i LED, a destra la curva caratteristica dei LED, corrente (µA) e tensione (V).

Effetto fotoelettrico e misura della costante di Planck

In questa esperienza viene presentato l’effetto fotoelettrico e i problemi che lo studio di questo fenomeno mette in evidenza in ambito classico. Gli studenti, utilizzando un apparato didattico dedicato a questa esperienza, eseguono la misura della corrente emessa da un metallo quando, sotto vuoto, viene colpito da radiazione elettromagnetica e misurano l’energia degli elettroni emessi. Tale misura si effettua utilizzando sorgenti di diversa frequenza, utilizzando diversi filtri, e per ognuno di questi gli allievi creano la curva corrente in funzione del potenziale e si determina il potenziale di frenamento con un fit dei dati. Lo studio della dipendenza dell’energia degli elettroni emessi dalla frequenza consente agli studenti di stimare il valore della costante di Planck.

L’effetto fotovoltaico nei semiconduttori

Questo laboratorio è dedicato allo studio della fisica dei materiali e del funzionamento dei sistemi fotovoltaici.

La parte di teoria è dedicata alla presentazione dei livelli energetici degli elettroni all’interno dei solidi cristallini e in particolare dei semiconduttori; viene descritta l’interazione tra la luce e il materiale di tipo semiconduttore, che è alla base del principio di funzionamento delle celle fotovoltaiche. Gli studenti svolgono un'esperienza finalizzata all'osservazione dell'effetto fotovoltaico in diversi materiali semiconduttori per osservare come la differente struttura microscopica dei livelli elettronici di ciascun semiconduttore influenzi la risposta macroscopica della cella. Nella prima parte dell'esperienza si utilizzano diverse celle fotovoltaiche (Figura 5) prodotte con vari tipi di semiconduttore (Si, GaAs, InGaP, tripla giunzione), una lampada alogena alimentata in corrente continua e un'unità di alimentazione e misura per costruire la curva caratteristica (corrente in funzione della tensione) di ogni cella al buio e a diverse intensità luminose.

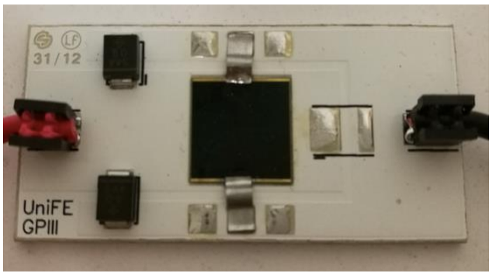


Figura 5 – Le celle fotovoltaiche utilizzate per l'attività sperimentale

Nella seconda parte, utilizzando le celle, un monocromatore e un radiometro, gli studenti effettuano una misura della risposta spettrale di una cella, ovvero quanta corrente viene prodotta dalla cella in funzione della potenza incidente ad ogni lunghezza d'onda, ricavando l'efficienza quantica esterna (numero di elettroni estratti dalla cella per ogni fotone incidente).

In questo laboratorio gli allievi imparano a caratterizzare una cella fotovoltaica e a confrontare le prestazioni di questi dispositivi.

La determinazione della curva caratteristica di una cella è un'esperienza che si può svolgere nel contesto classe utilizzando una cella, due multimetri, una lampada alogena o a incandescenza alimentata in corrente continua e un generatore di tensione regolabile con la precisione dell'ordine di 10 mV.

Focalizzazione dei raggi X, una lente per lo spazio

In questa attività gli allievi imparano a caratterizzare uno strumento per osservazione astronomiche. L'attività proposta fa parte del programma di ricerca del laboratorio LARIX (LARge Italian X-ray facility) per la realizzazione di uno strumento focalizzante, una lente, per concentrare la radiazione X proveniente da alcune stelle (per esempio stelle di neutroni) e investigare le loro caratteristiche. Questa lente è costituita da tessere di materiale cristallino di elementi come Silicio, Germanio, Gallio. Questi elementi vengono investiti da radiazione X producendo il fenomeno della diffrazione e, quando opportunamente orientati, danno luogo ad un effetto cumulativo che risulta in una grande quantità di raggi X concentrati nel cosiddetto fuoco della lente.

In questa attività gli allievi studiano l'applicazione della diffrazione nel caso dei raggi X.

Nella parte di teoria vengono introdotti i principali temi di ricerca dell'astrofisica e vengono ripresi i concetti di ottica geometrica, ottica fisica e le caratteristiche delle onde elettromagnetiche. L'esperienza viene condotta nel laboratorio LARIX e l'apparato sperimentale (Figura 6) è costituito da un tubo a raggi X (che simula una stella), un collimatore, la lente costituita dalle tessere e due rivelatori, uno per determinare la posizione e uno per determinare l'energia.

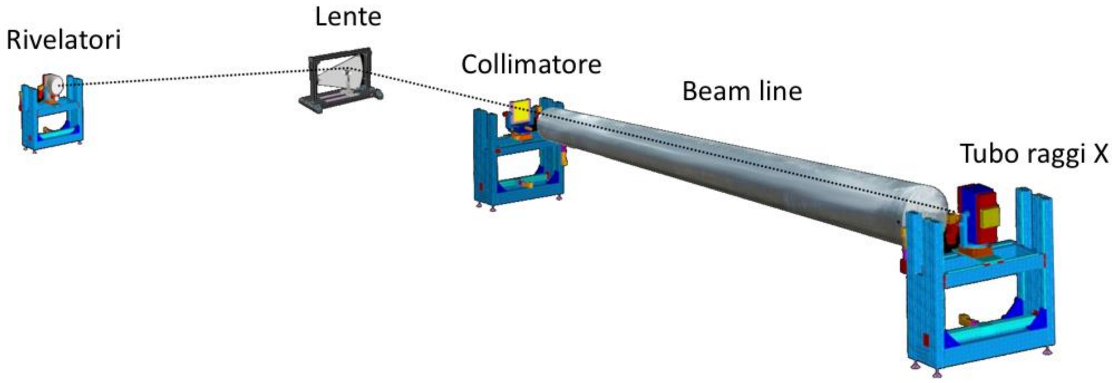


Figura 6 – Schema dell'apparato sperimentale (Immagine E. Virgilli)

Nella prima parte gli studenti valutano il potere penetrante dei raggi X attraverso radiografie di oggetti comuni. Nella seconda parte gli allievi misurano l'energia dei raggi X diffratti dalle tessere cristalline sopra descritte e osservano l'immagine con i rivelatori in dotazione al laboratorio per ottimizzare la posizione della lente. Vengono poi calcolate alcune proprietà di ciascuno dei cristalli in uso da confrontare con le proprietà teoriche richieste dal progetto di costruzione della lente spaziale. Le tessere che rispondo a certi criteri vengono selezionate per il prototipo da testare.

Applicazioni della fluorescenza allo studio di opere d'arte

In questo percorso gli allievi studiano le tecnologie nucleari applicate alla conservazione dei beni culturali, mettendo in evidenza la natura trasversale della fisica.

Il fenomeno della fluorescenza, ben compreso e interpretato nel quadro della fisica quantistica, è alla base di diverse tecniche per lo studio di materiali. La caratteristica comune di queste tecniche è il fatto di non essere invasive, aspetto che le rende particolarmente apprezzate quando gli oggetti di studio sono opere d'arte.

Nella prima parte vengono presentati esempi di fluorescenza da luce ultravioletta, suggestivi perché osservabili direttamente a occhio nudo. In questa parte gli allievi utilizzano un illuminatore di Wood e una macchina fotografica digitale con filtri ottici per fare fotografie ad un dipinto antico ed eseguire un'analisi qualitativa del dipinto, distinguendo eventuali interventi di restauro. Nella seconda parte gli allievi osservano gli spettri di raggi X prodotti per fluorescenza da pigmenti e da altri materiali artistici e identificano gli elementi dagli spettri. Nell'ultima fase, facendo un'analisi comparativa tra campioni di dati, identificano i pigmenti partendo dagli elementi trovati. In questa fase, gli allievi si misurano con la natura multidisciplinare di questo campo di ricerca in quanto devono sfruttare argomenti di storia delle tecniche artistiche per distinguere quale pigmento è stato utilizzato in base al periodo storico (Impallaria, 2017).

Nanostrutture di semiconduttori

Lo scopo di questo laboratorio è caratterizzare i sensori che vengono utilizzati in campo biomedicale, ambientale e agroalimentare. Partendo dalle conoscenze di base di fisica moderna vengono introdotti i concetti fondamentali della teoria dei livelli elettronici nei solidi cristallini. Questa è un'attività che coinvolge elementi di fisica e chimica. Vengono descritte le proprietà delle nano strutture (grani) di semiconduttori ed eseguite esperienze di misure elettriche sui sensori con vari gas ed una misura della barriera di potenziale tra grano e grano. Gli allievi partecipano alla fase di misura. I sensori sono già stati preparati e l'apparato sperimentale è costituito da una camera test con controllo di temperatura e umidità
relativa in cui sono posizionati i sensori; all'interno di questa camera vengono introdotti, attraverso una linea collegata e bombole certificate, dei gas le cui concentrazioni sono determinate attraverso flussimetri di massa. La camera test è collegata ad una scheda elettronica per la lettura della tensione.

Gli allievi effettuano misure di tensione in aria e in presenza di gas per stimare differenza di resistenza dei film di nanograni e ricavare la conduttanza. Nota la conduttanza in aria G_{air} e in gas G_{gas}, gli allievi costruiscono la curva di calibrazione dei sensori ovvero la risposta $(G_{air} - G_{gas})/ G_{air}$ in funzione della concentrazione di gas.

Per comprendere le applicazioni al quotidiano viene illustrato il funzionamento di alcuni dispositivi realizzati presso il laboratorio di sensori del Dipartimento per le misure di inquinanti atmosferici e per l'analisi del respiro di soggetti sani e malati.

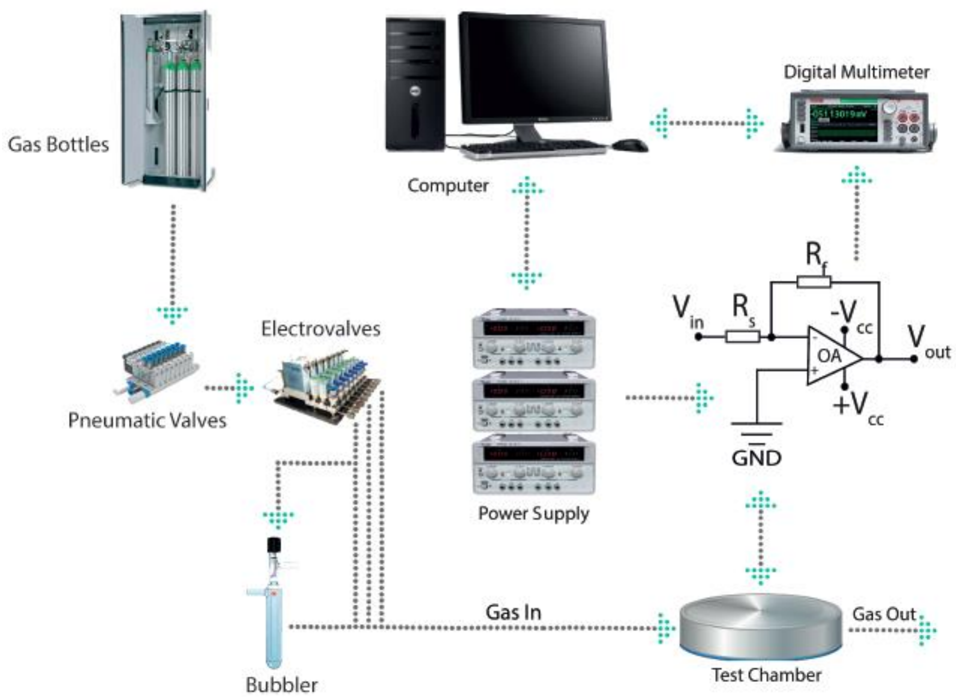


Figura 7 – Schema dell'apparato sperimentale del gas mixing e sistema di acquisizione dati per sensori (Immagine M. Valt)

Radioattività naturale

Nell'opinione pubblica la parola radioattività assume spesso un'accezione negativa: ci si dimentica che essa è un fenomeno fisico naturale, le cui applicazioni tecnologiche hanno portato a straordinari miglioramenti della qualità della vita dell'umanità. Dopo aver introdotto la radioattività e le tecniche di rivelazione, gli allievi conducono in prima persona una misura di radioattività naturale impiegando uno spettrometro gamma a scintillazione connesso ad un tablet. Questa misura viene effettuata utilizzando rocce e campioni di calibrazione dell'IAEA (International Atomic Energy Agency) che contengono un'abbondanza di radionuclidi (potassio, uranio, torio) nota. Le rocce sono posizionate dentro a delle scatole e gli allievi effettuano una serie di misure variando la distanza tra scatola e rivelatore. Sapendo le energie caratteristiche dei materiali, dall'analisi degli spettri gli allievi devono riconoscere le rocce e i campioni contenuti nelle scatole [ITALRAD].

Magnetismo e nanostrutture

Lo scopo dell'esperienza è quello di presentare agli studenti quali siano le peculiarità delle nanostrutture magnetiche e come sia possibile studiarne le proprietà magnetiche. Il percorso si articola nei seguenti punti: (1) descrizione, generale, del comportamento magnetico della materia; (2) proprietà dei livelli nei solidi e condizioni per cui si riesce ad instaurare il fenomeno del ferromagnetismo; (3) proprietà dei materiali ferromagnetici e loro dipendenza dalla dimensione dei materiali stessi nel momento in cui si studiano sistemi in forma di nanostrutture, ovvero sistemi in cui la taglia, lungo una o più direzioni, scenda a valori che variano tra pochi nanometri e le centinaia di nanometri; (4) studio delle proprietà magnetiche di nanostrutture mediante una metodica di tipo ottico, ed osservazione del fatto che le proprietà stesse dipendono dalla taglia.

Lo sviluppo di questo percorso si basa sia su conoscenze pregresse, che gli allievi hanno acquisito durante il loro percorso di studi di chimica e fisica, che su nuove conoscenze, che vengono presentate agli allievi durante l'attività. Le conoscenze pregresse sono: la classificazione dei livelli elettronici in un atomo ed il fatto che l'elettrone abbia uno stato di spin; la descrizione di tipo ondulatorio di un'onda elettromagnetica ed il fatto che l'onda elettromagnetica possa essere polarizzata linearmente o circolarmente; la definizione di indice di rifrazione; la definizione di vettore induzione magnetica e di vettore campo magnetico; il concetto di polo magnetico e quello di dipolo magnetico. Le nuove conoscenze che si vogliono trasmettere agli studenti sono: la classificazione dei materiali in diamagnetici, paramagnetici, ferromagnetici; il fatto che un elettrone possieda un momento magnetico, che dipende dal suo stato di spin; come sia definita la magnetizzazione di un materiale; quale sia la struttura dei livelli elettronici nei solidi; quale sia il meccanismo fisico per cui alcuni materiali siano ferromagnetici; come cambiano le caratteristiche di un sistema ferromagnetico in funzione della sua forma/dimensione; come cambiano le proprietà ottiche di un materiale ferromagnetico al variare della sua magnetizzazione.

Facendo riferimento ai punti indicati sopra, la trattazione si svolge seguendo questi passaggi:

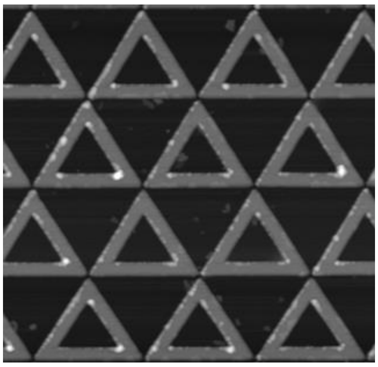
(1) si inizia richiamando brevemente come sia possibile produrre un campo magnetico, e poi si prosegue classificando i materiali in diamagnetici, paramagnetici e ferromagnetici in ragione di come essi reagiscano nel momento in cui sono immersi in un campo magnetico. Per mostrare quali siano le differenze di comportamento tra queste tre tipologie di sistemi, la spiegazione viene accompagnata da filmati/animazioni che aiutano gli alunni a visualizzare gli effetti di cui si parla. Si fa poi cenno al fatto che diversamente dai sistemi diamagnetici, in quelli paramagnetici e ferromagnetici è necessario che gli atomi/molecole che costituiscano i materiali possiedano un momento magnetico, ovvero che si comportino come dei dipoli magnetici. Si indica poi che gli elettroni possiedono un momento magnetico, legato al loro stato di spin:

così come lo stato di spin è quantizzato, ovvero può avere solo due possibili valori, *up* o *down*, allo stesso modo anche il momento magnetico è quantizzato;

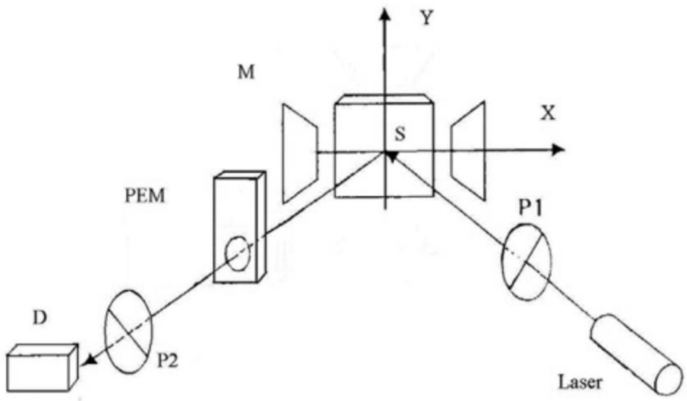
(2) sfruttando le conoscenze pregresse relative alla struttura degli orbitali elettronici negli atomi, si passa a descrivere cosa succede nel caso in cui si ha la formazione di un solido. Nel dettaglio, prendendo spunto dalla confronto tra i livelli elettronici di due atomi identici e quelli dei medesimi atomi quando essi formano una molecola, si fa intuire agli allievi che la creazione del solido può portare ad avere un numero molto elevato di livelli elettronici la cui differenza di energia è molto piccola, e grazie a questa caratteristica tali livelli sono generalmente raggruppati in una cosiddetta *banda*. Contribuiscono a tale banda gli elettroni che, nella configurazione atomica, appartenevano agli orbitali più esterni; viceversa, gli elettroni che appartenevano agli orbitali più interni possiedono un carattere più simile a quello della configurazione atomica di partenza. In riferimento a questi ultimi, se il numero di quelli con spin *up* ed il numero di quelli con spin *down* sono diversi, allora il singolo atomo può possedere un momento magnetico diverso da zero. A questo punto si può definire la magnetizzazione del materiale, ed iniziare a giustificare il comportamento di tipo paramagnetico dei materiali, che corrisponde al caso in cui i singoli momenti magnetici siano tra loro indipendenti. Nel caso in cui questi ultimi non siano indipendenti, grazie all'interazione di scambio, e tendano a restare paralleli gli uni agli altri, allora si osserva l'instaurarsi di un ordine nel sistema, che esibisce così un comportamento di tipo ferromagnetico;

(3) il comportamento dei materiali ferromagnetici viene presentato definendo cosa sia un ciclo di isteresi, che riesce a rappresentare quale sia lo stato di magnetizzazione del materiale in funzione del campo magnetico applicato. A partire dalla conoscenza delle caratteristiche del ciclo di isteresi, si può stabilire una classificazione dei materiali di tipo ferromagnetico. Utilizzando un programma di simulazione che permette di calcolare il ciclo di isteresi di vari sistemi ferromagnetici (Donahue, 1999) si mostra agli alunni quale corrispondenza vi sia tra i parametri microscopici di un materiale (ad es., intensità del singolo momento magnetico, intensità dell'interazione, etc.) ed il suo comportamento macroscopico. Mediante lo stesso software, si mostra agli alunni come la forma e le dimensioni del materiale influenzino le caratteristiche del ciclo di isteresi;

(4) gli alunni vengono poi portati in laboratorio per la misura del ciclo di isteresi di un dato materiale e per la misura del ciclo di isteresi di nanostrutture prodotte utilizzando il medesimo materiale, così da mettere in evidenza l'effetto della taglia/forma della nanostruttura. Nel caso considerato, si sono utilizzate le nanostrutture di cui si vede qui di seguito un'immagine raccolta con il microscopio elettronico a scansione (il lato di ciascun triangolo è pari a 2 micron, il lato del triangolo è largo 250 nm ed è spesso 25 nm).



La misura del ciclo di isteresi viene fatta sfruttando il fatto che i materiali magnetici sono birifrangenti, ovvero il loro indice di rifrazione cambia in dipendenza dello stato di polarizzazione della luce; inoltre, l'indice di rifrazione dipende anche dallo stato di magnetizzazione del materiale. Facendo incidere sul materiale un fascio di luce avente un fissato stato di polarizzazione, si riesce quindi a determinare la forma del ciclo di isteresi di un materiale osservando come cambia lo stato di polarizzazione del fascio riflesso al variare del campo magnetico applicato (Vavassori, 2000). L'apparato utilizzato per la misura è quello rappresentato nello schema riportato qui di seguito. Nella figura, P1 e P2 sono due filtri polarizzatori, S rappresenta il campione (sample), M il magnete che produce il campo applicato al campione, PEM un modulatore di polarizzazione e D il rivelatore (detector).



Man mano che il meccanismo fisico di funzionamento dell'apparato viene descritto agli alunni, l'effetto di ciascuno dei componenti ottici viene mostrato loro, così che riescano a visualizzare quale sia il contributo di ciascuno dei componenti presenti sul banco ottico. Grazie ad un software dedicato che controlla in modo automatico sia l'alimentatore del magnete che il rivelatore è possibile raccogliere il ciclo di isteresi del materiale considerato. Sotto la guida di un ricercatore, gli alunni procedono alla misura del ciclo di isteresi del materiale di cui sono composte le nanostrutture. Tale materiale è una lega di Fe (con una frazione atomica pari al 20%) e Ni (con una frazione atomica pari a 80%). Procedono quindi alla misura del ciclo di isteresi delle nanostrutture magnetiche. In particolare, visto che le nanostrutture hanno una forma che ha una specifica simmetria, ovvero è invariante per rotazioni di 60 gradi, gli alunni procedono con la misura di vari cicli di isteresi, a diversi angoli. Una volta raccolti i cicli di isteresi, gli alunni li visualizzano impiegando un opportuno programma di analisi, così da poter effettuare sia il confronto tra il ciclo di isteresi del materiale di partenza e quello delle nanostrutture che il confronto tra i cicli di isteresi misurati ai vari angoli. Dal primo confronto, gli alunni possono visualizzare quale sia l'effetto della ridotta dimensionalità delle nanostrutture sulle proprietà magnetiche, così da verificare quanto spiegato loro e quanto osservato con il programma di simulazione. Dal secondo confronto gli alunni possono visualizzare quale sia l'effetto della simmetria sul comportamento magnetico del materiale nanostrutturato.

La presentazione degli argomenti, sia quelli di tipo teorico che quelli legati all'attività di laboratorio, viene sempre intervallata da domande, rivolte agli alunni fine di capire sia se essi possiedano o meno le conoscenze pregresse attese sia se essi abbiano compreso le nuove conoscenze loro presentate. Nel caso essi non possiedano le conoscenze pregresse attese, a seconda del caso si procede cercando delle strade alternative per la spiegazione, o introducendo brevemente le conoscenze mancanti. Nel caso essi non abbiano compreso le nuove conoscenze presentate, si procede spiegando nuovamente tali conoscenze o eventualmente cercando delle strade alternative per poter procedere con la spiegazione.

Laboratorio di eco-fluidodinamica e applicazioni in medicina

L'attività sperimentale inizia con una parte introduttiva sulla fisica degli ultrasuoni e sul loro utilizzo in campo diagnostico e prosegue con alcune prove pratiche svolte dagli studenti tra le quali: misura dell'attenuazione di un'onda ultrasonora al variare delle caratteristiche del mezzo in cui si propaga l'onda e della frequenza nominale dell'onda stessa; studio del flusso di un liquido tramite ecoDoppler: utilizzando un apparato che permette di riprodurre la circolazione sanguigna in carotide e giugulare verranno effettuate misure di flusso tramite acquisizione di profili Doppler ed immagini Brightness-Mode (Sisini, 2015).

Laboratorio di Cosmologia

Il percorso mira a fornire agli studenti delle nozioni base di Cosmologia, con enfasi sulla radiazione cosmica di fondo, che è la radiazione elettromagnetica prodotta nell'Universo primordiale il cui residuo "fossile" permea

l'universo. Scoperta nel 1964, è la maggiore evidenza sperimentale del modello del Big Bang.

Alle lezioni teoriche seguono lezioni pratiche dove gli studenti analizzano i dati del satellite Planck dell'ESA con lo scopo di vincolare alcune proprietà del modello cosmologico standard. Come proposto nelle indicazioni, lo studente avrà l'opportunità di accostarsi alle scoperte più recenti nell'ambito della Cosmologia confrontandosi direttamente con i ricercatori specializzati in questo campo.

Laboratorio di Fisica Teorica

Le leggi della fisica, dalla meccanica classica all'elettromagnetismo fino alla meccanica quantistica sono espresse come "equazioni differenziali". Dopo una breve e semplice introduzione teorica a questo tipo di strumento matematico, usando un software dedicato verranno risolte al computer alcune equazioni differenziali già note agli studenti (come la legge di gravitazione universale di Newton) ed alcune semplici equazioni della fisica moderna (esempi tratti dalla relatività di Einstein). Gli studenti lavorano direttamente col software e sono guidati nella risoluzione dei problemi e nella visualizzazione e analisi dei risultati.

Gli allievi in questa attività hanno l'opportunità di apprendere alcuni concetti di fisica moderna fuori dall'ambiente scolastico, all'interno di un ambiente di ricerca, con attività *hands-on* non mediate da altre persone ma svolte direttamente da loro. Agli studenti viene richiesto di costruire il sapere attraverso l'esperimento avendo la possibilità di confrontarsi con i ricercatori. Questa per loro è un'occasione anche per visitare i laboratori dove si svolge ricerca di fisica fondamentale e applicata. Oltre all'aspetto didattico prettamente legato al programma di fisica del quinto anno, gli studenti possono vivere un'esperienza di orientamento universitario e quindi interrogarsi sulle proprie vocazioni. Al termine delle attività viene sottoposto agli allievi un questionario di gradimento e riportiamo di seguito le risposte alla domanda: *Le attività svolte ti saranno utili nella scelta dei tuoi studi futuri*?

(anno 2017)

– Decisamente no: 3
– Più no che sì: 16
– Più sì che no: 16
– Decisamente sì: 21

Dal punto di vista dei ricercatori questa è un'esperienza unica per disseminare la loro ricerca entrando in contatto con i docenti, gli allievi e loro famiglie.

3. Out-of-school learning: eventi di divulgazione scientifica

In questa sezione vengono descritte le diverse iniziative inserite nel contesto dell'apprendimento informale con particolare riguardo a quelle che avvengono al di fuori dell'ambiente scolastico in Università e centri di ricerca, che fungono da catalizzatore per l'insegnamento/apprendimento della Fisica. Questi eventi costituiscono un ponte tra il mondo della ricerca e la società portando in molti casi alla realizzazione di progetti di educazione scientifica che coinvolgono docenti e allievi delle scuole primarie e secondarie.

La prima iniziativa presa in esame è "Porte Aperte a Fisica" nata nel 2000 nella sede dell'ex Dipartimento di Fisica di Via Paradiso. L'evento, strutturato in sette giorni, aveva lo scopo di creare uno spazio dove far conoscere al grande pubblico le attività di ricerca portate avanti nell'ambito della Fisica a Ferrara. Questa manifestazione costituisce uno degli esempi di *best practice* della disseminazione della scienza sviluppati nell'Ateneo ferrarese in quanto il suo pattern dal 2011 è stato esteso alle attività dell'area scientifico-tecnologica divenendo "Porte Aperte al Polo Scientifico Tecnologico". L'evento è oggi caratterizzato da due percorsi di visita, senior e junior, differenziati in base all'età dei partecipanti. Nel percorso senior le persone assistono alla presentazione delle attività di ricerca nei laboratori da parte dei ricercatori. Particolare attenzione è rivolta agli allievi e ai docenti delle scuole che hanno la possibilità di vedere ambienti e laboratori e conoscere i protagonisti della ricerca. Dal punto di vista didattico questa esperienza costituisce un'opportunità per gli studenti di vivere l'attualità scientifica e per i docenti di rimanere aggiornati sui principali temi della ricerca, proponendo dove possibile approfondimenti in classe. Per quello che riguarda l'area Fisica vengono illustrate le attività di fisica della materia, sensori, applicazioni mediche, energie rinnovabili, fisica applicata alla medicina, astrofisica, tecnologie nucleari applicate all'ambiente e alla conservazione dei beni culturali, le ricerche di frontiera attraverso le attrezzature sviluppate per investigare la fisica delle particelle elementari e la fisica dello spazio. Tutti questi argomenti sono inseriti nelle Indicazioni Nazionali del MIUR.

Nel percorso junior, i bambini dai 5 a 11 anni assistono a interventi ludico-didattici dedicati alla scienza. Dal percorso junior fisica è nato come *by-product* nel 2014 un progetto di educazione scientifica per insegnare la fisica nelle scuole primarie e secondarie di I grado "Fisici Senza Frontiere", che verrà descritto nelle prossime sezioni.

All'interno di Porte Aperte 2016 è stato realizzato un progetto di Alternanza Scuola Lavoro [Alternanza Scuola Lavoro] che ha coinvolto alcuni studenti del Liceo Scientifico A. Roiti di Ferrara in un percorso di comunicazione della scienza, fornendo supporto al personale e ai ricercatori coinvolti nell'organizzazione dell'evento.

Altre attività di divulgazione che sono da supporto e incentivo per la didattica sono La Notte dei Ricercatori e i Venerdì dell'Universo [Venerdì dell'Universo]. La Notte dei Ricercatori propone la presentazione delle attività di ricerca fuori dagli ambienti universitari per stabilire una forte connessione con il territorio abbattendo il pregiudizio che gli scienziati vedano i laboratori come torri d'avorio onorando un patto sociale per arricchire la società e rendere consapevoli i cittadini dei progressi della scienza e di come utilizzarli nelle scelte di tutti i giorni. I Venerdì dell'Universo, nati nel 2000, propongono seminari divulgativi dedicati alla scienza, alla sua applicazione in diverse discipline mettendo in rilievo i benefici per i cittadini.

Viene ora preso in esame un caso studio di didattica museale legato alla mostra di strumenti storici *"Fisica e Metafisica? La Scienza ai tempi di de Chirico e Carrà"* che si è tenuta a Palazzo Turchi di Bagno a Ferrara, dal novembre 2015 a gennaio 2016, organizzata dal Dipartimento di Fisica e Scienze della Terra, dall'INFN e dal Sistema Museale d'Ateneo dell'Università di Ferrara. L'evento è stato realizzato allo scopo di valorizzare il patrimonio storico scientifico dell'Ateneo coniugando arte, scienza e storia di Ferrara.

La mostra scientifica ha ripercorso le tappe principali dello sviluppo della Fisica negli anni tra fine Ottocento e inizio Novecento mettendo in luce gli sviluppi e le ricerche nel territorio ferrarese, attraverso l'esposizione di strumenti appartenuti in quegli anni al Gabinetto di Fisica e all'Osservatorio meteorologico (Zini, 2004; Caracciolo, 2009), quando la loro direzione era affidata a Giuseppe Bongiovanni e oggi conservati nella Collezione Instrumentaria delle Scienze Fisiche, sezione del Sistema Museale d'Ateneo.

Giuseppe Bongiovanni, professore di Fisica sperimentale, frequentava il gruppo di intellettuali composto da Giorgio de Chirico, Alberto Savinio, Carlo Carrà e Filippo de Pisis che si creò a Ferrara durante gli anni della Prima Guerra Mondiale. Il legame di amicizia si evince dalla presenza di Bongiovanni, nominato affettuosamente l'astronomo, nella prosa e nelle poesie di de Chirico, Savinio e de Pisis. Questo legame ha ispirato la mostra di strumenti storici che è stata inserita tra gli eventi collaterali della mostra d'arte dedicata a de Chirico e alle avanguardie metafisiche di Palazzo Diamanti, creando un legame molto forte tra Università e territorio.

Bongiovanni fu personaggio molto noto nell'ambiente scientifico italiano e internazionale dell'epoca. Si occupò di ricerca in diversi campi della Fisica e si dedicò con passione all'insegnamento. Membro di diverse Accademie scientifiche nazionali e internazionali, nel 1897 fu tra i firmatari della circolare che portò alla costituzione della Società Italiana di Fisica (Graziani Bottoni, 2000). Realizzò uno studio dettagliato sul clima di Ferrara basato su molti anni di osservazioni che pubblicò nel 1900 (Bongiovanni, 1900).

Il filo conduttore della mostra è il *divertissment* di stabilire una connessione tra la fisica e l'arte metafisica attraverso la lettura soggettiva che uno scienziato fornisce di queste opere. L'esposizione è stata strutturata in cinque sezioni: misure e campioni di misure, meteorologia, elettromagnetismo, astronomia e apparati medicali. Ogni sezione è abbinata a opere metafisiche e documenti dell'epoca. Dall'osservazione di alcuni particolari presenti nei quadri, con un gioco di corrispondenze, vengono introdotti gli strumenti scientifici e illustrate le principali scoperte che questi hanno determinato. Alle scuole in visita è stato proposto un approfondimento tecnologico riguardo le attrezzature scientifiche per capire come state realizzate le scoperte che hanno gettato le basi alla fisica moderna, presentando anche i personaggi e gli scienziati che hanno animato queste scoperte curando al contempo l'aspetto umano della scienza nel racconto delle vicende della vita di queste persone.

Nelle aree relative a meteorologia, elettromagnetismo e apparati medicali sono stati esposti gli strumenti utilizzati da Giuseppe Bongiovanni e presentati in alcuni suoi lavori a stampa (Bongiovanni, 1898; Bongiovanni 1900). In particolare, sono stati esposti lo psicrometro a ventilatore per la misura dell'umidità dell'aria e alcuni termometri descritti da Bongiovanni nel rapporto sul clima. È stato esposto il radiotelegrafo marconiano che veniva usato per inviare giornalmente i dati meteorologici da lui registrati e che rappresenta una delle prime applicazioni delle onde elettromagnetiche (scoperte da Hertz nel 1888) per la comunicazione.

Uno spazio della mostra è stato dedicato al principio di funzionamento dei tubi a scarica e dei tubi di Crookes con i quali sono state studiate le proprietà degli elettroni e dei raggi X. Grazie alla presenza di questi strumenti è stata introdotta la scoperta dei raggi X ad opera di Willhelm Conrad Roentgen (1895) che ha cambiato radicalmente la nostra visione della natura facendoci accedere al mondo invisibile. Questa scoperta costituisce un esempio molto importante della fisica applicata al vivere quotidiano, perché già nel 1896 vennero impiegati per la radiodiagnostica in medicina e durante la Prima Guerra Mondiale gli ospedali da campo erano attrezzati con un reparto di radiologia.

Sono state organizzate visite guidate per le scuole e per la cittadinanza e per i più piccoli dei laboratori didattici interattivi di fisica.

L'evento ha consentito di presentare alle persone il patrimonio scientifico storico della Collezione di Fisica, avvicinando le persone alla scienza tramite l'arte e raccontando gli sviluppi tramite gli strumenti e le persone presentando le ricadute nel quotidiano e come queste scoperte furono vissute e studiate nella realtà ferrarese.

4. Progetto di educazione scientifica nelle scuole di Ferrara

Come anticipato nei precedenti paragrafi, il percorso Porte Aperte Junior Fisica, all'interno della manifestazione di apertura al pubblico del Polo Scientifico Tecnologico, ha instaurato un contatto diretto tra Università e Scuole primarie e secondarie di I grado di Ferrara, evidenziando come i docenti spesso non si sentano sicuri nell'insegnare le materie scientifiche perché non proprie della loro formazione. Da un dialogo aperto con i docenti della scuola primaria è nato nel 2014 un progetto di educazione scientifica "Fisici Senza Frontiere" con lo scopo di proporre degli interventi didattici laboratoriali nelle scuole con temi inerenti alla fisica generale. Ogni lezione è dedicata ad un argomento come ottica, calore e temperatura, elettricità, meteorologia, pressione e vuoto, astronomia. L'intervento didattico alterna discussioni guidate ad attività pratiche svolte dagli allievi individualmente o in gruppo. La classe viene solitamente divisa in gruppi e viene chiesto agli allievi di collaborare e di confrontare le idee. Si cerca di privilegiare l'apprendimento per immagini e l'apprendimento cinestetico. Seguendo il metodo scientifico, gli allievi realizzano esperimenti e discutono i risultati ottenuti.

Vengono studiati esempi e controesempi tenendo uno sguardo rivolto all'esperienza quotidiana per far capire agli allievi che quanto appreso è per loro uno strumento per interpretare i fenomeni che li circondano. Le esperienze dimostrative realizzate dai tutor sono condotte utilizzando sia materiale low tech facilmente reperibile che attrezzature scientifiche da laboratorio, portate appositamente nelle scuole per poter far osservare alcuni fenomeni in prima persona dagli allievi. Ne è un esempio il percorso "pressione e vuoto" in cui si porta un sistema da vuoto per creare in maniera efficace il vuoto dentro un recipiente e osservare cosa succede ad alcuni fenomeni quando viene tolta l'aria (caduta di oggetti nel tubo di Newton, palloncino gonfio, acqua che bolle a temperatura ambiente, marshmallow che viene deformato) o il percorso di ottica in cui si utilizza un kit didattico di ottica geometrica per studiare e verificare le sue leggi.

Come esempio viene presentato il percorso "Calore e temperatura", incentrato sui concetti chiave della termologia per introdurre agli allievi la differenza tra calore e temperatura, i conduttori e gli isolanti termici e i metodi di propagazione del calore. In questa unità gli allievi imparano che cos'è il calore in fisica e viene spiegato che cos'è il linguaggio scientifico. Attraverso un'esperienza sensoriale gli allievi imparano la differenza tra conduttore e isolante termico. In particolare gli allievi devono classificare degli oggetti come freddo, caldo o neutro al tatto e devono dire se questi oggetti sono alla stessa temperatura. Viene poi fatta una misura son il termometro per verificare l'ipotesi. Dopo aver spiegato la conduzione termica e la differenza tra isolanti e conduttori termici vengono introdotti materiali ed esempi e con l'inquiry based learning attraverso domande stimolo, gli allievi devono interpretare il fenomeno della conduzione utilizzando schemi e disegni. Vengono utilizzati tre dischi uguali nella forma ma di materiale diverso (metallo, sughero, plexiglas), gli allievi attraverso il tatto li classificano come freddo o neutro e viene chiesto loro di identificarli come conduttore o isolanti. Si chiede agli allievi cosa succede se viene posto del ghiaccio su questi tre dischi e generalmente gli allievi rispondono che il ghiaccio si scioglie prima sul sughero. Viene fatta la verifica e viene chiesto agli allievi di interpretare quanto osservato. Viene introdotta la grandezza temperatura, viene spiegato il principio di funzionamento del termometro e la sua lettura. Come attività sperimentale gli allievi sono chiamati a costruire un termoscopio e spiegare come funzionano alcuni giochi scientifici. Vengono presi in esame i fenomeni riguardanti i passaggi di stato e la dilatazione termica nei solidi, liquidi e gas. Infine vengono introdotti i metodi di propagazione del calore attraverso l'osservazione di alcune esperienze realizzate con materiale facilmente reperibile. Gli allievi sono parte attiva nella costruzione del percorso e sono previsti dei momenti di ricapitolazione in cui loro stessi raccontano cosa hanno appreso. Al termine della lezione viene proposto un gioco sotto forma di mappa concettuale o cruciverba per ordinare i concetti e creare una sintesi della lezione. In questo gioco gli allievi ripercorrono gli argomenti trattati e sono chiamati a rispondere a domande a risposta chiusa o aperta. Nelle risposte vengono guidati al fine di utilizzare correttamente il linguaggio scientifico.

Durante l'anno scolastico 2016/2017 sono stati fatti interventi didattici in sedici scuole della provincia di Ferrara, Milano e Frascati. Grazie a questa attività si è creato un forte legame tra scuole e Università per promuovere la *scientific literacy* dal primo ciclo d'istruzione.

Nel contributo sono state presentate alcune delle attività realizzate dal Dipartimento di Fisica e Scienze della Terra dell'Università di Ferrara e dall'INFN per la disseminazione scientifica mirate a creare una connessione tra scienza e società per aumentare la consapevolezza nelle persone rendendole partecipi delle scoperte scientifiche e delle loro ricadute nel quotidiano e per orientare gli allievi verso le carriere scientifiche.

Si ringraziano i professori Paolo Natoli, Cesare Malagù, Ferruccio Petrucci, Fabio Mantovani, Angelo Taibi, Giuseppe Pagliara, Giuseppe Ciullo, Donato Vincenzi, Piero Rosati, Federico Spizzo, dr. Paolo Bernardoni, dr. Barbara Fabbri, dr. Enrico Virgilli e tutti i loro collaboratori per le attività dei laboratori di fisica moderna.

5. Bibliografia

Bongiovanni, G. (1898). Sui condensatori sferici in cascata. *Atti della Accademia delle Scienze Mediche e Naturali in Ferrara*, Ferrara 1898-99, pp. 273-296.

Bongiovanni, G. (1900). *Risultati decadici, mensili e annui delle osservazioni fatte nel dodecennio 1884–95, con note sul clima di Ferrara e confronti con quello di altre Città (Osservatorio meteorico della Libera Università di Ferrara).* Ferrara: Tip. Sociale del Dott. Giovanni Zuffi.

Caracciolo, C., Zini, G. (2009). *La Meteorologia a Ferrara dal XVIII al XX secolo*. Museologia Scientifica e Naturalistica, vol. 5, http://annuali.unife.it/museologia/caracciolozini.pdf.

Donahue, M. J., Porter, D. G. (1999). *OOMMF User's Guide*, Version 1.0 Interagency Report NISTIR 6376; Gaithersburg, MD, USA: National Institute of Standards and Technology.

Graziani Bottoni, M. (a cura di) (2000). *Perché lei deve essere così letterato? Profilo di Giuseppe Bongiovanni – Professore di Fisica del Liceo Ginnasio Ariosto dal 1877 al 1917* (Quaderni del Liceo Classico L. Ariosto Ferrara, n. 7).

Impallaria. A. *et al.* (2017). The palette of a 16th century Venetian artist: materials and methods of Giovanni da Mel. *Ge-conservación*, 11, 230-236.

Michelini, M. (2010). *Proposte didattiche sulla fisica moderna,* Udine: MIUR-PLS-UniUD.

Montalbano, V., & Mariotti, E. (2013). *A multipurpose action for learning/teaching process: the Pigelleto's Summer School of Physics*. ESERA 2013. Nicosia, Cyprus, 2-7 September 2013.

Planinšič, G., Etkina, E. (2014). Light Emitting Diodes: A hidden treasure. *The Physics Teacher*, 52 (2), 94-99.

Sisini, F. *et al.* (2015). An ultrasonographic technique to assess the jugular venous pulse: a proof of concept. *Ultrasound Med Biol.*, 41(5), 1334-41. doi: 10.1016/j.ultrasmedbio.2014.12.666.

Vavassori, P. (2000). Polarization modulation technique for magneto-optical quantitative vector magnetometry. *Applied Physics Letters*, 77, 1605.

Zini, G. (2004). La Fisica Sperimentale e il Gabinetto di Fisica dell'Ateneo Ferrarese tra la fine del secolo XVIII e l'inizio del XX. *Annali di Storia delle Università Italiane*, 8, 159-187.

6. Sitografia

[Bando MIUR diffusione] Bando MIUR per la diffusione della cultura scientifica URL: http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/ricerca/diffusione

[Bando Pari opportunità] Bando Pari Opportunità per campi estivi STEM URL: http://www.pariopportunita.gov.it/bandi-e-avvisi/in-estate-si-imparano-le-stem-prorogato-al-28-febbraio-2017-il-bando-per-le-scuole-relativo-ai-campi-estivi-di-scienze-matematica-informatica-e-coding/

[PLS] Progetto Lauree Scientitiche URL: http://www.progettolaureescientifiche.eu/

[Terza Missione] Anvur Terza Missione URL: http://www.anvur.org/index.php?option=com_content&view=article&id=875&Itemid=628&lang=it#

[Indicazioni Nazionali Licei Scientifici] Indicazioni Nazionali Licei Scientifici URL: http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_Liceo%20scientifico%20opzione%20Scienze%20Applicate.pdf

[Laboratori Fisica Moderna] Laboratori di Fisica Moderna organizzati dal Corso di Laurea in Fisica, Università di Ferrara URL: http://www.fe.infn.it/orientamento_fisica/courses/laboratori-di-fisica-moderna/

[ITALRAD] Italian Radioactivity Project URL: http://www.fe.infn.it/italrad/index.html

[Alternanza Scuola Lavoro] Alternanza Scuola Lavoro URL: http://www.istruzione.it/alternanza/index.shtml

[Venerdì dell'Universo] I Venerdì dell'Universo URL: http://www.fe.infn.it/venerdi/

Received October 10, 2017
Revision received November 28, 2017/December 3, 2017
Accepted December 30, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 355-371 – ISSN 2038-1034

Un’esperienza didattica half-flipped in un ambiente di apprendimento SCALE-UP

Laura Branchetti
Roberto Capone
Francesco Saverio Tortoriello

Abstract – *In this paper we describe a teaching experiment with a “blended” approach based on the integration of frontal lessons, flipped learning, Peer Discussion, Just in Time teaching and e-learning, also carried out using the social platform Edmodo and a Facebook group. The development of the students’ skills was monitored by means of three tests administered within the experiment; in parallel, we monitored the motivation level and the attitude towards the discipline through an affect test and a satisfaction survey. Some students had two additional hours per week based on cooperative learning in a SCALE UP learning environment. The research methodology falls within the Educational Reconstruction framework, that allowed us to investigate didactical phenomena, designing and creating learning environment, artefacts, teaching and learning sequences in authentic educational contexts. The results of the affect test showed a better attitude towards the discipline; from the satisfaction survey it emerged that most of the students liked the use of alternative methodologies. The results of our experimentation were analysed also from the point of view of disciplinary learning, comparing the students’ performances with the results of a test of a previous cohort of students who attended the same course.*

Riassunto – *In questo articolo, viene riportata la sperimentazione di un approccio didattico di tipo “blended” integrando lezioni tradizionali, flipped learning, Peer Discussion, Just in Time Teaching e e-learning, con l’ausilio della piattaforma sociale Edmodo e un gruppo Facebook. Lo sviluppo di competenze degli studenti è stato monitorato attraverso tre prove intercorso; parallelamente, è stato monitorato il loro livello di motivazione allo studio della disciplina attraverso un test affect e un test di gradimento. Alcuni studenti hanno integrato lo studio con due ore settimanali aggiuntive di lezioni gestite utilizzando il coperative learning in un ambiente di apprendimento SCALE-UP. La metodologia di ricerca attuata rientra nel quadro della Educational Reconstruction, che ha permesso di studiare i fenomeni didattici progettando e realizzando ambienti di apprendimento, artefatti, sequenze di insegnamento/apprendimento che il ricercatore ha sperimentato in contesti educativi autentici. Dai risultati del test affect, sembra emergere una migliore predisposizione allo studio della disciplina; dal test di gradimento emerge, per la maggior parte degli studenti, l’apprezzamento dell’utilizzo di metodologie didattiche alternative. I risultati della sperimentazione sono stati analizzati anche dal punto di vista dell’apprendimento confrontando i risultati ottenuti dagli studenti con quelli degli studenti della coorte precedente che hanno frequentato lo stesso corso*.

Keywords – flipped learning, peer discussion, Just in Time teaching, SCALE-UP

Parole chiave – Insegnamento capovolto, discussione tra pari, insegnamento Just in Time, SCALE-UP

Laura Branchetti (Cesena, 1985), laureata in Matematica e Ph.D. in Didattica della Matematica, è Assegnista di Ricerca presso il Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e informatiche dell'Università di Parma e docente a contratto di *Didattica della matematica* e *Matematiche complementari* presso lo stesso Dipartimento. Tiene corsi di formazione per docenti in formazione e in servizio. Collabora con il Gruppo di ricerca in Fisica Generale e Didattica dell'Università di Bologna.

Roberto Capone è Assegnista di Ricerca del settore MAT-04 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno. Copre gli insegnamenti di *Didattica della Matematica* e di *Analisi Matematica*. I suoi maggiori interessi di ricerca riguardano la didattica per competenze, l'interdisciplinarità e le metodologie didattiche innovative per l'insegnamento della matematica e della fisica. Si occupa di formazione docenti collaborando con l'USR Campania e con l'Invalsi.

Francesco Saverio Tortoriello è Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno. I suoi interessi di ricerca riguardano la didattica della matematica, i fondamenti della matematica, in particolare lo studio del rapporto tra le due culture. È tra i responsabili scientifici del Progetto Liceo Matematico.

1. Introduzione

Non tutti gli studenti che si iscrivono ad una facoltà scientifica hanno solide competenze matematiche e non sempre hanno un "buon rapporto" con la disciplina; alcuni hanno difficoltà di approccio allo studio legate sia alle difficoltà intrinseche della matematica quali ostacoli epistemologici (Brousseu, 1976), misconcezioni consolidate da pratiche didattiche inadeguate nel primo ciclo (Sbaragli e Santi, 2011) e nella scuola secondaria superiore (funzioni, Tall e Vinner, 1981; infinito, Arrigo e D'Amore, 1999; limiti, Bagni, 1999; disequazioni, Bazzini e Tsamir, 2001) sia alle difficoltà in matematica (Zan, 2007). Oltre alle difficoltà legate ad ostacoli epistemologici e didattici in matematica, molte ricerche hanno mostrato difficoltà legate ai diversi usi del linguaggio come, ad esempio, il rapporto tra linguaggio verbale e formale (Ferrari, 2003). Altre difficoltà sono dovute a specificità linguistiche del testo matematico (D'Amore, 2000; Branchetti e Viale, 2015), all'uso di diversi sistemi di rappresentazione semiotica (Duval, 1993) e di gesti (Arzarello, 2006), alla formulazione dei testi dei problemi e alla relazione tra contesti presentati e domande proposte (Zan, 2012).

Queste difficoltà sembrano amplificarsi in corsi di studio in cui gli esami di Matematica vengono visti dallo studente come un necessario passaggio o come "un sacrificio da espiare" per poter procedere negli studi. La ricerca relativa alla didattica universitaria si sta diffondendo nell'ultimo decennio in Europa (è nata una rete di ricercatori INDRUM che si occupa solo di questo tipo di ricerche); in Italia è però poco articolata e si può affermare che solo un esiguo numero di ricerche sia stato condotto in questa direzione. In classi eterogenee per etnia, abitudini linguistiche, appartenenza a classi sociali diverse, competenze di base differenti, le difficoltà evidenziate acquistano una certa rilevanza, di cui è necessario tener conto nella progettazione didattica. Inoltre, la forma di pensiero prevalente degli studenti è quella algoritmica (Fandino Pinilla, 2008) e l'approccio alla risoluzione di un problema sembra essere più basata sull'analogia con problemi simili, e lo studio della matematica viene associato alla memorizzazione di tecniche da usare di fronte a problemi prestabiliti. Delegandola all'algoritmo, lo studente rinuncia alla “responsabilità” di impostare un processo risolutivo basato su un approccio concettuale alla disciplina e associa spesso l’utilizzo di procedure formalizzate alla natura stessa della matematica. Questi fenomeni sono ben noti e ampiamente studiati dai ricercatori in didattica della matematica, soprattutto dalla parte della scuola francese che si è maggiormente occupata di studiare clausole ed effetti del contratto didattico, e prendono il nome di *delega formale* e *esigenza della giustificazione formale* (Brosseau, 1998).

Da queste considerazioni nasce il tentativo di cercare nuove strade da percorrere per un processo di insegnamento/apprendimento efficace. A questo scopo è stata condotta una sperimentazione con studenti del primo anno di corso di studi in Ingegneria Chimica dell’Università di Salerno durante il corso di Matematica. Questo corso è stato sempre condotto secondo un’impostazione didattica tradizionale: venivano alternate lezioni frontali ed esercitazioni con verifica scritta e orale alla fine del primo semestre, volte a valutare soprattutto conoscenze. Si è tentato un approccio didattico di tipo “blended” che ha previsto, accanto a lezioni tradizionali, lezioni con metodologia “flipped”, integrata, laddove è stato possibile, con Peer Discussion e Just-in-Time Teaching e orientata al rafforzamento e sviluppo delle competenze matematiche. È stato, inoltre, sperimentato un approccio e-learning attraverso la piattaforma sociale “Edmodo” e un gruppo Facebook di cui facevano parte tutti gli iscritti al corso. L’approccio e-learning ha consentito agli studenti di rapportarsi continuamente con il docente e i tutor ed ha permesso di attivare anche dinamiche di peer-education, grazie ad un confronto costante tra tutti i membri del gruppo classe. L’ipotesi della ricerca è che un cambio di metodologia nella didattica della matematica universitaria, soprattutto in Corsi di Laurea in cui la disciplina ha ruolo “di servizio” rispetto ad altre discipline di indirizzo, possa influenzare in modo decisivo l’apprendimento. Questa dovrebbe consentire di agire sulla motivazione e di arginare parzialmente le difficoltà dovute a un contratto didattico che vede lo studente in atteggiamento imitativo e orientato alla riproduzione di procedure. Si ipotizza, infatti, che attraverso la collaborazione coi pari e tramite un coinvolgimento diretto degli studenti, anche mediato dalle tecnologie, si possano riattivare dei processi di apprendimento più significativi e duraturi.

Tra le tante metodologie, dopo un’analisi della letteratura di ricerca sul tema, ci è parso opportuno sceglierne alcune la cui attenzione è centrata sullo studente, sui suoi bisogni e sulle sue necessità epistemologiche. Si è pensato così di integrare la “Didattica capovolta” più conosciuta come Flipped Learning o Flipped Classroom (FC)[1] con altre metodologie di insegnamento attive quali il Just-in-Time Teaching, il Cooperative Learning, l’E-learning, la Peer-Education. Tuttavia, per non sconvolgere completamente il percorso di insegnamento così come si è andato consolidando negli anni, alcune lezioni sono state erogate con il metodo tradizionale. Ne è venuta fuori una didattica ibrida (Blended Learning) in cui si intersecano diverse metodologie didattiche (Figura 1).

[1] Testi più specialistici evidenziano la differenza tra le due espressioni.

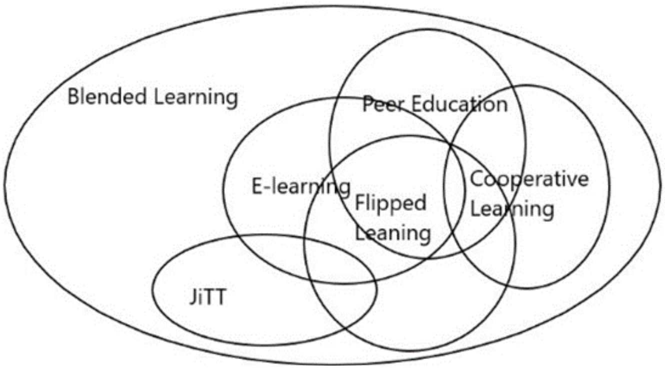


Figura 1

2. Contesto della ricerca

Gli studenti iscritti al primo anno di Ingegneria Chimica dell'Università di Salerno, con i quali è stata fatta questa sperimentazione didattica, hanno una provenienza scolastica piuttosto eterogenea: su 128 studenti intervistati, 90 (pari al 70,3%) studenti hanno frequentato il Liceo Scientifico, 14 studenti (pari al 10,9%) il Liceo Classico, 12 studenti (pari al 9,4%) altri tipi di Liceo, 6 studenti (pari al 4,7%) hanno frequentato un Istituto Tecnico, 4 studenti (pari al 3,1%) un Istituto Tecnico a indirizzo Chimico, 2 studenti (pari al 1,6%) ha, infine, frequentato un Istituto Professionale.

Ad un questionario somministrato all'inizio del corso, solo una parte degli studenti ha dichiarato di aver già affrontato gli argomenti previsti dal piano di studi (21,9%), la maggior parte (73,4%) ha dichiarato di aver affrontato solo in parte gli argomenti oggetto del corso, mentre una parte, seppure esigua (4,7%) ha dichiarato di non aver mai affrontato gli argomenti oggetto del corso.

Di fronte ad una pluralità sia di percorsi di studio seguiti, sia di stili cognitivi, si è riscontrata l'esigenza didattica di prevedere percorsi individualizzati.

3. La metodologia Flipped nella letteratura di ricerca pedagogica e didattica

La comunità educativa fin dal 2007 ha posto una sempre crescente attenzione per il concetto di "classe capovolta" (Bergman and Sams, 2012) come tentativo di dare svolta al modello tradizionale di didattica trasmissiva di tipo upside-down (Mazur, 2009).

La FC, nella sua idea originaria, consiste nel capovolgere i tradizionali momenti didattici ovvero la lezione e le attività di studio individuale: ciò che tradizionalmente aveva luogo in classe (la lezione frontale) viene svolto a casa e ciò che si svolgeva a casa (i compiti) è affrontato in classe (Slomanson, 2014; Bishop & Verleger, 2013). In altri termini, al modello tradizionale basato su tre momenti ovvero la lezione frontale in classe, lo svolgimento di compiti a casa e la verifica, viene sostituito un modello distinto in tre fasi principali: nella fase di attivazione, che generalmente avviene a casa, lo studente fruisce autonomamente dei contenuti che il docente consiglia e mette a disposizione; a questa fase segue in classe una fase di approfondimento e una fase di esercitazione, anche in piccoli gruppi, sotto la guida del docente regista.

Gli studenti arrivano in classe possedendo già una preconoscenza generale degli argomenti da trattare in modo tale che può essere dedicato maggior tempo a lavorare sulle attività chiave dell'apprendimento (Bergmann, Overmyer & Wilie, 2011). Queste idee sembrano ben adattarsi alla cornice teorica dell'Enattivismo, che ha offerto una serie di suggestioni molto significative per permettere di ipotizzare una nuova concezione del processo conoscitivo e del ruolo del soggetto in esso. In relazione alla sperimentazione, molti elementi della teoria enattiva sono stati presi in considerazione: la centralità del soggetto discente, la funzione del docente da trasmissiva a propositiva; l'abbandono di una struttura rigida e gerarchica degli argomenti trattati e l'adozione di una struttura più flessibile; si è data elevata importanza alla metacognizione e ai diversi stili di apprendimento degli studenti. Con l'Enattivismo lo studente è visto immerso nella realtà, nel contesto educativo, nell'ambiente di apprendimento (Varela *et al.*, 1991). La conoscenza diviene enazione del mondo, ovvero produzione ed elaborazione di significati a partire da esperienze e azioni nel mondo e sul mondo, rese possibili dal possesso di un corpo che lo studente pone in contatto con l'esterno e con l'altro da sé. Pertanto, si è cercato di scegliere sempre problemi che premettessero allo studente un apprendimento situato (Lave e Wenger,1991) facendo in modo che la conoscenza non fosse un insieme di operazioni formali e non fosse fatta di manipolazioni su simboli astratti. Il soggetto, inoltre, non riceve passivamente informazioni dall'ambiente per poi tradurle in rappresentazioni mentali ma partecipa attivamente a creare i significati per lui rilevanti ai fini del mantenimento della propria identità ed integrità. L'Enattivismo sostiene l'idea che la conoscenza non è un processo soltanto razionale-cognitivo e prettamente individuale, ma è un flusso circolare e continuo di interazioni senso-motorie tra cervello-corpo-ambiente.

4. Didattica per competenze: le metodologie didattiche usate

Questo articolo esamina il tentativo di integrare i benefici didattici provenienti dall'utilizzo della Flipped Classroom con la metodologia Just-in-Time Teaching (JiTT) utilizzando un approccio didattico di tipo *blended on line* e in-class format (Novak et al. 1999) in un ambiente di apprendimento centrato sull'allievo: Student-Centered Active Learning Environment with Upside-down Pedagogies (SCALE-UP). Questa metodologia ibrida è stata chiamata Half-Flipped Classroom (HFC). Nella pratica, invece di "capovolgere la classe", si è tentato di "capovolgerla a metà": sono stati assunti i benefici addotti dalla Flipped Classroom, scelta dettata sia da motivazioni sociali che didattiche ma soprattutto dall'intenzione di creare un ambiente di apprendimento centrato sullo studente e non sul programma, sul testo o sul docente abituato a rivestire una funzione prevalentemente trasmissiva (Capone et al., 2017). Tuttavia, non sempre è stato possibile attivare una didattica attiva in classe per la numerosità degli studenti e così si è riscontrata la necessità di integrare altre metodologie didattiche, come meglio specificato nel paragrafo successivo. Lo scopo è stato quello di creare sia un ambiente di apprendimento che una comunità di ricerca, un laboratorio vivo, che stimoli idee ma soprattutto motivi lo studente cercando di garantirgli il successo formativo. Inoltre, si è cercato di rinunciare alle espressioni "acquisizione di conoscenza" e "transfer di apprendimento" e pensare all'apprendimento, in termini di partecipazione periferica legittima (Lave e Wenger, 1991), ad attività socialmente organizzate intendendo il processo educativo come ricostruzione sociale partendo dalle forme biologiche del comportamento (Vygotskij, 1987).

Inoltre, si è lavorato per competenze con l'obiettivo di sviluppare il Decision Making (DM) adattivo (Payne et al,1988), ovvero la capacità dello studente di operare risolvendo problemi in situazioni complesse. Questo tipo di DM si contrappone al DM veridittivo, che chiede di individuare la risposta giusta e chiede al soggetto di trovare una soluzione efficace tra diverse possibili. Sembra che lavorare per competenze sviluppi l'agire strategico, e abitui lo studente a fare previsioni; sembra sviluppare, inoltre, la riflessività e il pensiero critico. La consapevolezza e la quota metacognitiva sono due degli elementi più significativi che il lavoro per competenze consente di mettere a fuoco. A fronte di questi vantaggi, il lavorare per competenze ha richiesto al docente di modificare il suo modo di progettare e di valutare. Il percorso didattico è stato suddiviso così in unità di apprendimento e sono stati evidenziati, per ciascuna unità, i traguardi di competenza e i traguardi formativi, esplicitati attraverso indicatori di competenza. Nella tabella di seguito è riportato un esempio relativo all'unità di apprendimento sul calcolo dei limiti.

Unità di apprendimento	**Competenze**		
	Obiettivi di apprendimento	**Traguardi formativi**	**Indicatori**
Il calcolo dei limiti	Utilizzare le tecniche dell'analisi, rappresentandole anche sotto forma grafica. – Individuare strategie appropriate per risolvere problemi. – Utilizzare gli strumenti del calcolo differenziale nella descrizione e modellizzazione di fenomeni di varia natura.	Calcolare i limiti di funzioni e successioni	- Calcolare il limite di somme, prodotti, quozienti e potenze di funzioni - Calcolare limiti che si presentano sotto forma indeterminata - Calcolare limiti ricorrendo ai limiti notevoli - Confrontare infinitesimi e infiniti - Calcolare il limite di successioni - Studiare la continuità o discontinuità di una funzione in un punto - Calcolare gli asintoti di una funzione - Disegnare il grafico probabile di una funzione

5. L'apprendimento sociale e la piattaforma Edmodo

In accordo con il fatto che "ogni funzione dello sviluppo culturale compare prima sul piano sociale e poi su quello psicologico, prima compare tra le persone come categoria interpsicologica, poi all’interno dello studente come categoria intrapsicologica” (Vygotskij, 1987, p.11), si è cercato di favorire il confronto tra pari. Sono stati utilizzati per questo scopo la piattaforma sociale “Edmodo” e un gruppo Facebook con tutti gli iscritti al corso.

Edmodo è una piattaforma digitale pensata per operare con gruppi di studenti in ambiente protetto. Visivamente si presenta con uno spazio centrale dove appaiono i messaggi, racchiuso fra due riquadri di servizio, a destra e a sinistra, come in Figura 2.

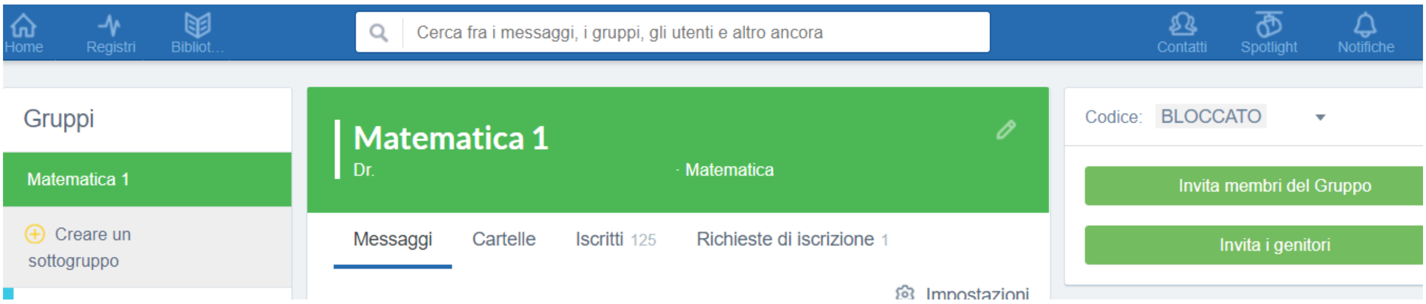


Figura 2 – Homepage del gruppo Edmodo di Matematica 1

All’interno del gruppo, la comunicazione può essere uno-a-molti (il docente a tutti, uno studente a tutti) oppure discreta, fra insegnante e studente. Oltre a dialogare con il docente, gli studenti possono inviare allegati sotto forma di documenti che l’insegnante annota online e rispedisce al mittente (anche nella modalità uno-a-uno). Altri utili strumenti che offre la piattaforma sono una biblioteca condivisa dove si possono conservare documenti, immagini, un calendario dove segnare le scadenze del lavoro domestico e le date delle verifiche, la possibilità di creare quiz, la possibilità di gestire valutazioni proteggendo la privacy. L’approccio e-learning ha consentito agli studenti di rapportarsi continuamente con il docente e i tutor ed ha permesso di attivare e promuovere processi di *peer education* tramite un confronto costante tra tutti i membri del gruppo classe.

Rispetto all’idea originaria, il nostro approccio didattico è stato un tentativo di capovolgere la classe a metà. Agli studenti veniva fornito il materiale didattico attraverso la piattaforma Edmodo e venivano proposti semplici esercizi di cui discutere in classe. Il materiale didattico fornito preventivamente agli studenti e i relativi esercizi hanno avuto lo scopo di innescare una discussione sul web tra gli studenti stessi in modo tale che il docente riuscisse a capire il punto di vista dell’allievo in merito agli argomenti da trattare. La lezione in presenza prendeva spunto dalle conoscenze degli studenti e veniva orientata anche in base agli errori più comuni commessi o a eventuali misconcezioni documentate e analizzate in precedenti ricerche di cui ci si accorgeva durante il dibattito. Altro motivo della scelta di capovolgere la classe solo a metà è stato dettato da esigenze logistiche; infatti, il corso è stato seguito in media da 100 studenti e così spesso diventava difficile per il docente rispondere alle esigenze formative di tutti gli studenti utilizzando esclusivamente pratiche didattiche “in-class format”. Dell’idea originaria di FC è stato preso comunque il quadro teorico di riferimento e le finalità educative. Infatti, si è cercato di creare un ambiente di apprendimento centrato sull’allievo (student-centered learning) che sfruttasse le tecnologie informatiche e favorisse la collaborazione tra pari. Si è cercato, inoltre di favorire l’apprendimento autoregolato (Self Regulated Learning, SRL) definito come un “insieme di processi attraverso i quali gli studenti attivano e sostengono personalmente le cognizioni, gli aspetti emotivi ed emozionali e i comportamenti che sono sistematicamente orientati verso i propri obiettivi” (Zimmermann e Schunk, 2011, p.1). Non è stato mai sottovalutato, inoltre, l’aspetto emotivo-emozionale per il successo formativo dello studente affinché imparasse a gestire in modo autonomo, attivo e consapevole il proprio processo di apprendimento. L’interazione in una comunità virtuale è stata utile anche perché ha permesso in modo più naturale il passaggio da un registro linguistico colloquiale ad un registro linguistico formale.

Come si può vedere dalla Figura 3, il dialogo tra studenti, anche quando avveniva con un linguaggio colloquiale, ha consentito al docente di enucleare alcune difficoltà di approccio allo svolgimento degli esercizi.

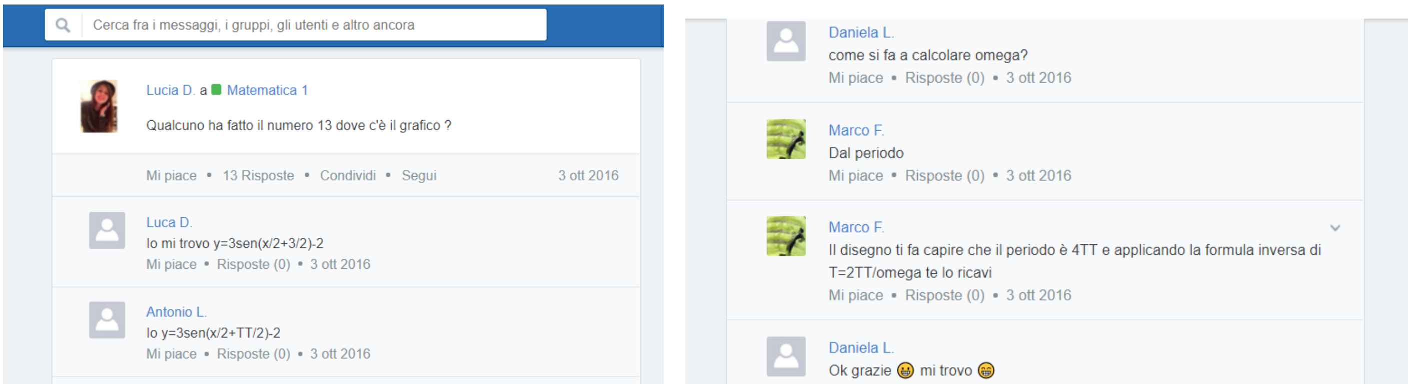


Figura 3 – Stralci di finestre di dialogo tra studenti

È stato possibile, così, grazie ai post condivisi e ai commenti lasciati dagli studenti, individuare “Just in time” nuclei tematici da approfondire in aula e intervenire anche su alcune misconcezioni.

6. L’ambiente di apprendimento SCALE-UP

SCALE-UP è un ambiente di apprendimento creato in modo specifico per facilitare l'apprendimento attivo e collaborativo tra studenti. Gli spazi sono attentamente progettati per facilitare le interazioni tra gruppi di studenti che lavorano su compiti generalmente di breve durata. Un decennio di ricerca indica miglioramenti significativi nell'apprendimento (Y. Dori e J. Belcher, 2004). Si è pensato di adottare questo modello riprendendo le sperimentazioni fatte al Massachusetts Institute of Technology di Boston e adattandolo alle specifiche esigenze del corso.

Figura 4 – A sinistra un ambiente di apprendimento SCALE-UP al MIT di Boston, a destra un'aula disposta in modo tradizionale

Figura 5 – A sinistra un laboratorio SCALE-UP dell'Università di Salerno; a destra un'aula con disposizione tradizionale degli studenti presso la facoltà di Ingegneria

7. Risultati intermedi e valutazione sommativa finale

L'attività didattica è stata costantemente monitorata, oltre che attraverso i sistemi informatici, anche attraverso tre prove intercorso che hanno avuto una funzione sia di valutazione formativa che di valutazione sommativa. Ciò ha permesso di individuare precocemente le difficoltà di alcuni studenti, soprattutto in termini di competenza matematica. Per gli studenti che hanno manifestato diffuse lacune di base dopo la prima prova intercorso, è stata suggerita una integrazione dello studio con due ore aggiuntive di lezioni gestite utilizzando la metodologia *cooperative learning*, seguendo la logica del Mastery Learning, secondo cui in un tempo sufficiente e con opportune modifiche metodologiche, tutti gli studenti possono raggiungere traguardi di base in ogni disciplina. Tali ore integrative si sono svolte in un ambiente di apprendimento SCALE-UP. Gli studenti sono stati suddivisi in piccoli gruppi ed hanno lavorato con la presenza di un tutor che ha supportato gli studenti in tutta la fase di recupero delle competenze di base. Lo spazio di apprendimento è stato progettato per facilitare l'interazione degli studenti, nonché l'interazione tra i gruppi. A seguito dei primi interventi didattici basati sulla nuova metodologia descritta, sono stati rilevati i risultati degli studenti in termini di sviluppo di competenze matematiche di base.

Di seguito è riportato un esempio di quesito proposto agli studenti nella prima prova intercorso:

Ti è data la funzione

$$f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$$

1. Trova *a*,*b*,*c* in modo che il suo grafico sia simmetrico rispetto all'asse *y*, passi per il punto $\left(1; \frac{7}{2}\right)$ e f(0)=4;
2. Calcola per quali valori di *x* si ha $f(x) \geq \frac{9}{2}$
3. Esprimi analiticamente la funzione $g(x)$ il cui grafico è simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto alla retta di equazione $y = 6$. Argomenta il procedimento eseguito.

Di seguito è riportato un esempio di quesito proposto agli studenti nella seconda prova intercorso:

Ti è data la funzione

$$f(x) = arctg\left(\frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

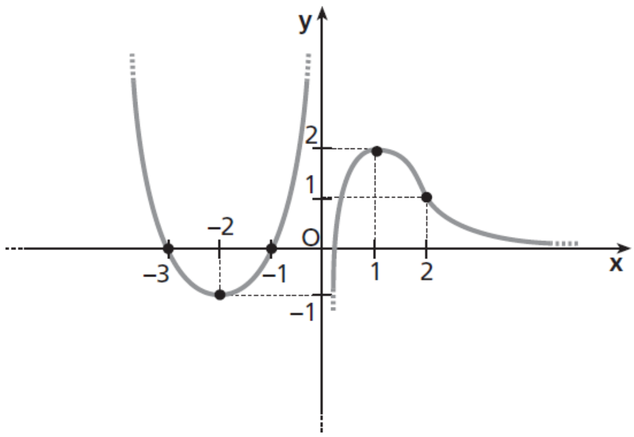
1. Traccia il grafico della funzione $y = f(x)$
2. Traccia il grafico della funzione $y = |f(x)|$ a partire dal grafico della funzione rappresentata al punto precedente.
3. Spiega come hai ricavato il grafico $y = |f(x)|$ a partire da quello di $y = f(x)$
4. Per quale valore di *a* la retta di equazione $y = ax + 3$ è tangente alla funzione? Motiva la risposta

Di seguito è riportato un esempio di quesito proposto ad una prova d’esame:

In figura è rappresentato il grafico della funzione $y = f(x)$.

a. Immagina di essere al telefono con un tuo amico; descrivigli la funzione

b. A partire dal grafico illustrato, traccia l’andamento del grafico della derivata prima della funzione.



In letteratura ci sono molti studi che raccomandano cautela con quest’ultimo tipo di esercizi, perché grafici di questo tipo sono caratterizzati da numerosi impliciti, non potendosi prevedere che cosa succede ai grafici al di fuori della zona di visibilità (Ferrari, 2004).

Il quesito proposto agli studenti, tuttavia, non ha lo scopo di fare un’analisi approfondita del ruolo della componente figurale nei processi di apprendimento della matematica ma di verificare se lo studente è in grado di analizzare il grafico anche evidenziandone le ambiguità e i limiti che inevitabilmente caratterizzano ogni rappresentazione di un concetto matematico astratto; l’individuazione di ambiguità e impliciti nella rappresentazione è infatti un indicatore di competenza matematica.

Come si può desumere da questi esempi di quesiti forniti agli studenti durante le prove intercorso e alla prova d’esame, si è cercato di verificare le competenze acquisite dallo studente ovvero “la comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali e metodologiche per risolvere situazioni problematiche non note” (EQF, 2006). Le competenze dello studente sono state valutate tenendo conto delle seguenti dimensioni: risorse, ovvero conoscenze e abilità di base dell’allievo; strutture di interpretazione, ovvero come lo studente legge e interpreta situazioni problematiche; strutture in azione, ovvero come lo studente reagisce di fronte ad un problema; strutture di autoregolazione, ovvero come lo studente apprende dall'esperienza e adatta le proprie strategie alle sollecitazioni provenienti dal contesto (Trinchero, 2012). Nel caso particolare dell'ultimo quesito, le dimensioni di competenza valutate sono le seguenti:

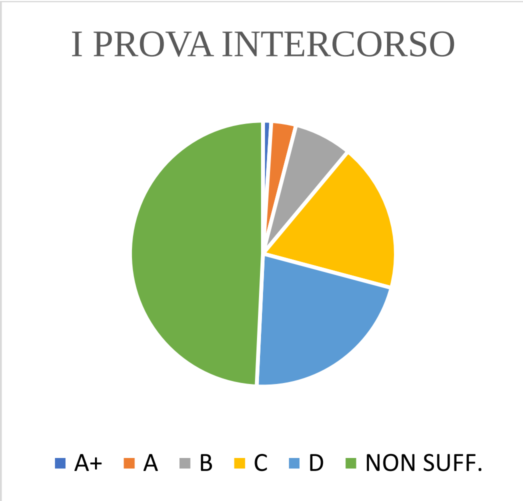
Risorse	Conoscere il concetto di campo di esistenza di una funzione, di intersezione con gli assi coordinati, di massimo e minimo relativi, di concavità e convessità, di flesso.
Strutture di interpretazione	Saper cogliere il fatto che la soluzione del problema non sta nell'applicazione di un algoritmo, ma in un ripensamento del grafico della funzione
Strutture di azione	Saper ricondurre il grafico di una funzione di cui non si conosce l'espressione analitica ad una funzione di cui se ne riescono a desumere verisimilmente le caratteristiche.
Strutture di autoregolazione	Saper valutare le proprie strategie confrontandole con gli obiettivi e con i dati a disposizione.

La valutazione delle competenze è stata condotta sulla base della seguente rubrica di valutazione (in tabella sono descritti i quattro livelli di competenza e la corrispondenza tassonomica tra fascia, livello di competenza e voto):

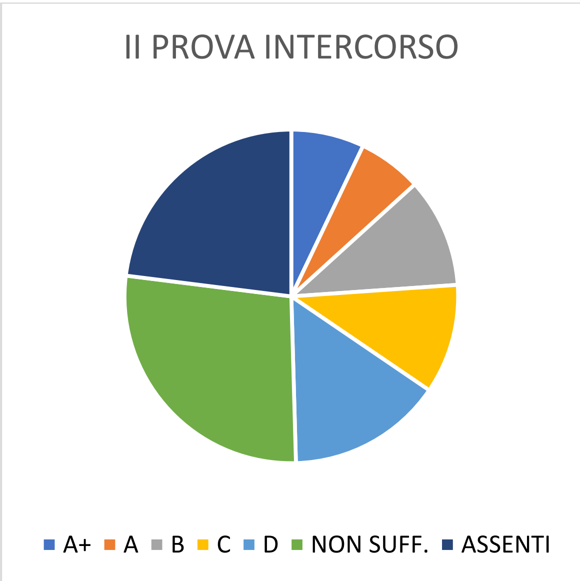
A+/A Livello avanzato	**B** Livello alto	**C** Livello medio	**D** Livello iniziale
Lo studente: Pianifica la sequenza delle procedure del calcolo autonomamente. Descrive con precisione e correttezza tutte le sequenze prese in esame e individua il loro possibile utilizzo. Padroneggia gli strumenti del calcolo infinitesimale. Utilizza in modo appropriato il linguaggio specifico della disciplina	**Lo studente:** Utilizza le tecniche dell'analisi, rappresentandole anche sotto forma grafica. Individua le strategie più appropriate per risolvere problemi. Utilizza in maniera appropriata gli strumenti del calcolo differenziale nella descrizione e modellizzazione di fenomeni di varia natura.	**Lo studente** Utilizza le tecniche dell'analisi, rappresentandole anche sotto forma grafica pur con qualche incertezza; individua le strategie per risolvere problemi; utilizza gli strumenti del calcolo differenziale nella descrizione e modellizzazione di fenomeni di varia natura.	**Lo studente** Utilizza le tecniche dell'analisi, non sempre rappresentandole in forma grafica, pur con qualche incertezza; individua le strategie per risolvere problemi commettendo ancora qualche lieve errore procedurale; utilizza gli strumenti del calcolo differenziale non sempre riuscendo a descrivere il modello presente in natura

FASCIA	**CORRISPONDENZA TASSONOMICA tra livello di competenza e voto**	**LIVELLO DI COMPETENZA**
A (A+)	27-30 (con lode)	AVANZATO
B	23-26	ALTO
C	20-22	MEDIO
D	18 – 19	INIZIALE

La prima prova intercorso evidenzia un numero piuttosto elevato di studenti che non hanno raggiunto sufficienti livelli di competenza relativamente agli argomenti oggetto di studio e solo pochi studenti hanno acquisito un livello avanzato, come evidenziato in tabella:

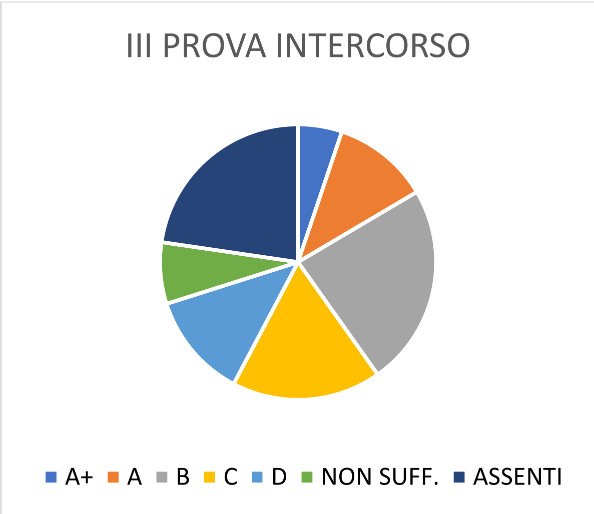


FASCIA	PERCENTUALE STUDENTI
A e A+	3%
B	6%
C	15%
D	18%
NON SUFF.	42%
Assenti	16%



FASCIA	PERCENTUALE STUDENTI
A e A+	14%
B	10%
C	10%
D	16%
NON SUFF.	27%
ASSENTI	23%

La seconda prova intercorso evidenzia un netto aumento sia degli studenti che hanno riportato una valutazione positiva sia degli studenti che hanno superato brillantemente la prova, evidenziando competenze avanzate.



FASCIA	PERCENTUALE STUDENTI
A e A+	14%
B	20%
C	15%
D	10%
NON SUFF.	6%
ASSENTI	19%

Ancora più soddisfacenti sono i risultati riportati dagli studenti nella terza prova, dopo aver attivato interventi educativi personalizzati e in piccoli gruppi.

8. Analisi dei risultati del test *affect*

Sia all'inizio del corso che alla fine del corso è stato somministrato agli studenti un questionario in cui sono state poste loro delle domande che evidenziassero il loro atteggiamento nei confronti della matematica. (Di Martino & Zan, 2011). Il questionario è stato denominato *test affect*, terminologia ripresa dalla ricerca in psicologia (Goldin, 2002) e già usato in altri contesti specifici della ricerca in didattica della matematica (Capone *et al.*, 2017).

Dal test somministrato all'inizio del corso emerge che non per tutti il rapporto con la matematica era positivo, anzi il 44% del campione dichiara di non aver avuto un buon rapporto con la matematica e per il 37% di questi l'atteggiamento dei confronti della disciplina è diventato negativo a partire dai primi due anni della Scuola Secondaria di II grado. È stato chiesto di "descrivere la matematica con tre aggettivi". Gli aggettivi più ricorrenti sono stati: monotona, difficile, impegnativa, complessa. È stato poi chiesto: "Scrivi tre emozioni che associ alla parola matematica". Le risposte più ricorrenti sono state: ansia, sconforto, noia, paura, soddisfazione, inadeguatezza, rigore, formalismo. Questi risultati sembrano in linea con altre ricerche di questo tipo (Di Martino & Zan, 2011). Alla fine del corso è stato somministrato lo stesso test affect (Capone *et al.*, 2017). Da questo si evince che, nel 22% del campione, le parole: ansia, paura, difficoltà vengono sostituite dalle parole: sfida, successo, gratificazione. Diminuisce inoltre del 24%, la presenza dell’aggettivo ‘monotona’, mentre rimane stabile la presenza delle parole ‘impegnativa’ e ‘complessa’. Alla fine del corso, sembra emergere, pertanto, una migliore predisposizione allo studio della disciplina; dal test di gradimento, infine, emerge l’apprezzamento dell’utilizzo di metodologie didattiche alternative dalla maggior parte degli studenti (il 79% apprezza moltissimo le innovazioni didattiche del corso, il 10% apprezza molto, per il 7% non ha influito in maniera determinante per il successo formativo, il 4% preferisce una didattica più tradizionale).

I risultati sono stati confrontati anche con i risultati dei 117 studenti della coorte precedente che hanno frequentato lo stesso corso, attraverso una stessa tipologia di prova di valutazione. Si rileva che l’81% degli studenti ha superato l’esame nella sessione invernale contro il 60% della coorte precedente. Inoltre, il 58% ha raggiunto risultati buoni rispetto al 32% dell’anno precedente. I dati riportati sembrano confermare i dati di un decennio di ricerca che evidenzia miglioramenti significativi nell’apprendimento in seguito alla attivazione di percorsi didattici centrati sullo studente (Beichner *et al.*, 2006, Dori & Belcher, 2004).

In particolare, la metodologia SCALE-UP sembra fornire risultati di apprendimento coerenti con le tesi sostenute dagli esponenti del costruttivismo sociale e delle idee di Vygotskij, in quanto gli studenti mostrano di migliorare le loro competenze sotto la guida di un peer più capace agendo nella zona di sviluppo prossimale. È da notare, dai risultati riportati in tabella, relativi alla seconda prova intercorso, che si riscontra un miglioramento delle *performance* degli studenti rispetto alla risoluzione dei problemi; si può notare anche come sia aumentato l’apprendimento di tipo concettuale (Fandino Pinilla, 2009).

9. Conclusioni

Recenti studi confermano che la FC attiva un apprendimento che rispetta le esigenze degli studenti, rispetta i tempi e incrementa la motivazione allo studio (Hamdan *et al.*, 2013). La nostra esperienza sembra confermare ulteriormente gli studi citati. Questa prima sperimentazione ha avuto esito positivo e stimola la curiosità per nuove e più approfondite indagini. Nonostante l’esiguità del campione non ci permetta di trarre conclusioni statisticamente significative, è stato osservato un netto miglioramento nella performance della classe sperimentale e un aumento considerevole dell'interesse e della motivazione degli studenti. Il successo dell’intervento didattico è messo in evidenza anche dal numero esiguo di abbandoni (4%) inferiore rispetto alla percentuale dell’anno precedente (10%). Altri aspetti qualificanti dell’esperienza, da sottoporre ad ulteriore verifica, sono stati una facilitazione del recupero da parte di chi è stato assente alle lezioni grazie alla modalità di erogazione e-learning di alcuni contenuti.

10. Riferimenti bibliografici

Arrigo, G., D'Amore, B. (1999). Lo vedo ma non ci credo. Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di George Cantor che coinvolge l'infinito attuale. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 22B, 5, 465-494.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 267-299.

Bagni, G. T. (1999). Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 22B, 4, 333-372.

Bazzini, L., Tsamir, P. (2001). Research based instruction: widening students' perspective when dealing with inequalities. In *Proceedings of the 12th ICMI Study "The future of teaching and learning of algebra",* Melbourne, AU, December 2001, 1, 61–68.

Beichner, R., Dori, Y., and Belcher, J. (2006). New Physics Teaching and Assessment: Laboratory and Technology-Enhanced Active Learning. In Mintzes, J., and Leonard, W. (Eds.). *Handbook of College Science Teaching*, Washington DC: National Science Teachers Association.

Bergmann, J., Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. International Society for Technology in Education.

Bishop, J., & Verleger, M. (2013, June). *The flipped classroom: A survey of the research*. Paper presented at the 120th ASEE Annual Conference, Atlanta, GA.

Branchetti, L., Viale, M. (2015). Tra italiano e matematica: il ruolo della formulazione sintattica nella comprensione del testo matematico. In Ostinelli M. (2015). *La didattica dell'italiano. Problemi e prospettive.* Locarno: Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques Grenoble*, *4*(2).

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Capone, R., Coppola C., Dello Iacono U., Tortoriello, F. S. (2017). *Competenze matematiche in una dimensione europea – Il progetto Numero Ergo Sum*. Milano: FrancoAngeli.

Capone, R., Del Sorbo, M. R., Fiore, O. A. (2017). Flipped Experience in Physics Education Using CLIL Methodology. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 10, 13.

D'Amore, B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(4), 471–482.

Dori, Y., and Belcher, J. (2004). How does technology-enabled active learning affect undergraduate students' understanding of electromagnetism concepts. *Journal of the Learning Sciences*, *14*(2).

Duval, R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

European Commission (2005). *Towards a European Qualifications Framework for Lifelong Learning*. Commission Staff Working Document. Brussels.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

Ferrari, P. L. (2003). Tecnologia informatica e sistemi di rappresentazione nell'insegnamento universitario della matematica. *Convegno UMI*.

Ferrari, P. L. (2004). Matematica ed educazione: il ruolo fondamentale dei linguaggi. *XXI Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica*.

Goldin, G. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structures'. In G. Leder, E. Pehkonen and G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 59-72.

Hamdan, N., McKnight, P., McKnight, K., Artfstrom, K. (2013). The flipped learning model: A white paper based on the literature review, in *Flipped Learning Network.*

Lave, J., Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Mazur, E. (2009). Farewell, lecture. *Science*, 323, 5910, 50-51.

Novak, G. M., Patterson, E. T., Gavrin, A. D., Christian, W., & Forinash, K. (1999). Just in time teaching. *American Journal of Physics*, *67*(10), 937-938.

Payne, J. W., Bettman, J. R., & Johnson, E. J. (1988). Adaptive strategy selection in decision making. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 14*(3), 534-552.

Sbaragli S., Santi G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education.*

Slomanson, W. (2014). *Blended Learning: A flipped classroom experiment.* Journal of Legal Education, 64(1), 93-102.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Trinchero, R. (2012). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola.* Milano: FrancoAngeli.

Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience*. Cambridge MA: Massachusetts Institute of Technology Press.

Vygotskij, L. (1987). *Il processo cognitivo*. Raccolta di scritti a cura di Michael Cole, Sylvia Scribner, Vera John-Steiner, Ellen Souberman. Torino: Bollati Boringhieri.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Springer Science & Business Media.

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 35 A.

Zimmerman, B., Schunk, D. H., (2011). *Handbook of Self-Regulation of Learning and Performance*. London: Taylor & Francis.

Received October 28, 2017
Revision received November 25, 2017 / December 17, 2017
Accepted December 30, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 372-393 – ISSN 2038-1034

I sistemi di numerazione: un’esperienza di apprendimento capovolto

Elena Lazzari

Abstract – *The contribution describes a flipped learning experience on number systems implemented in a first class of upper secondary school. The aim is to highlight the benefits and problems encountered by students, accustomed to a traditional education. To this purpose, we shall provide a detailed study of the educational design by analyzing the situations that came to be created, in order to arrive at more general reflections.*
.

Riassunto – *Questo contributo descrive un’esperienza di apprendimento capovolto, attuata in una classe prima di scuola secondaria di secondo grado, sul tema dei sistemi di numerazione. L’obiettivo è quello di evidenziare i benefici ottenuti e i problemi riscontrati dagli studenti, abituati ad un modello educativo tradizionale. Per farlo entreremo nel dettaglio del design didattico analizzando le situazioni che sono venute a crearsi, per giungere a riflessioni di carattere più generale.*

Keywords – flipped learning, active learning, skills, instructional design, number systems

Parole chiave – apprendimento capovolto, apprendimento attivo, competenze, design didattico, sistemi di numerazioni

Elena Lazzari, iscritta al XXXI ciclo di Dottorato di Ricerca presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell’Università degli Studi di Ferrara, ha svolto numerose collaborazioni con l’università, ricoprendo ruoli di Supporto alla Didattica e Tutor Piano Lauree Scientifiche. Il suo ambito di ricerca riguarda le metodologie didattiche innovative, come l’apprendimento capovolto, applicato all’insegnamento-apprendimento della matematica, con particolare interesse all’ambito dei fattori affettivi. La sua ultima pubblicazione si trova negli Atti del XX Convegno Nazionale GRIMeD, *Un’esperienza didattica di flipped teaching nell’insegnamento-apprendimento della matematica* (in “Quaderni GRIMeD”, n. 3. *Una feconda contraddizione – Didattica individualizzata vs didattica cooperativa? Il problema della valutazione all’incrocio tra le “due didattiche”*, 2017).

1. Introduzione

Leggendo i più recenti atti normativi, sia nazionali che internazionali, è possibile osservare come il concetto di competenza stia guadagnando una posizione centrate nel dibattito educativo, stimolando un ripensamento riguardo al ruolo e all’identità della scuola. Ci si riferisce in particolare alla sua capacità di aggiornarsi per aderire al cambiamento sociale in atto, all’apporto che può dare alla formazione di cittadini attivi e consapevoli, al suo raccordo con le necessità individuali e sociali: in una parola alla connessione tra scuola e realtà (Castoldi, 2009). “Nell’esperienza quotidiana si apprende per interesse, in modo contestuale, provando attivamente e collaborando con i propri pari. Nella scuola tradizionale si studia per dovere, in modo astratto, spesso ascoltando passivamente e lavorando individualmente” (Cecchinato, 2014, p. 22). Questo divario influenza inevitabilmente la visione dell'ambiente scolastico come estraneo al modo di apprendere dei più giovani.

Vista la situazione appena descritta, l'apprendimento capovolto è nato, si è diffuso e sviluppato in pochissimi anni, diventando una delle metodologie più famose e innovative di questi ultimi tempi (Hwang, Lai, Wang, 2015). Il percorso inizia ufficialmente nel 2007 con Jonathan Bergmann e Aaron Sams, all'epoca insegnanti di chimica al Woodland Park High School in Colorado, considerati i due fondatori della *flipped classroom*, o classe capovolta[1]. In breve tempo la metodologia si è propagata in Canada, negli Stati Uniti e in Europa, riscuotendo grande successo sia tra gli insegnanti che tra gli studenti (Bergmann e Sams, 2012).

È con un'evoluzione di questa metodologia[2], descritta nel paragrafo successivo, che l'esperienza didattica si è svolta, in occasione di un laboratorio di approfondimento sui sistemi di numerazione. Il laboratorio è stato creato per entrare a far parte della proposta didattica del Piano Lauree Scientifiche, organizzato dall'Università degli Studi di Ferrara, per le scuole secondarie di secondo grado. La classe che ha partecipato al progetto, nella seconda metà del primo semestre, era una classe prima di un liceo scientifico della città, composta da 27 alunni alle prime armi con un metodo educativo diverso da quello tradizionale.

Il laboratorio, della durata complessiva di 12 ore, era composto di tre parti: i sistemi di numerazione nella storia, il sistema di numerazione decimale e il sistema di numerazione binario.

La struttura, i contenuti e le modalità operative verranno presentate nel dettaglio e intrecciate con la descrizione delle situazioni nate dall'applicazione in classe del percorso. Prima però verranno illustrate le caratteristiche principali della metodologia e come questa si inserisce nel quadro teorico di riferimento. Concluderemo infine con alcune osservazioni di carattere generale.

2. Apprendimento capovolto e inquadramento teorico

Il *flipped learning* è una metodologia didattica di stampo costruttivista (Bishop e Verleger, 2013), che come tale ha il suo *focus* nell'apprendimento, e non nell'insegnamento. Ciò significa portare in primo piano non solo i contenuti, ma anche e soprattutto i processi con i quali avviene l'apprendimento, come ad esempio la riflessione, la capacità di analizzare, valutare e applicare in contesto le conoscenze (Franchini, 2014; Cecchinato e Papa, 2016). Per rendere questo possibile non è sufficiente invertire i due momenti fondanti nell'educazione tradiziona-

[1] Già nel 2000 M. J. Plat e M. Treglia utilizzarono un termine simile, *classe rovesciata,* in una loro pubblicazione sul "Journal of Economic Education". Qui mettevano in evidenza il bisogno dei docenti di adeguare il proprio metodo di insegnamento alle differenti necessità di tutti gli studenti, ognuno avente un personale stile di apprendimento.

[2] Il vocabolo *flipped learning* (apprendimento capovolto) non è sinonimo di *flipped classroom* (classe capovolta), termine con cui inizialmente si è diffusa la metodologia. La distinzione è stata evidenziata dal Flipped Learning Network (2014), in *Flipping a class can, but does not necessarily, lead to Flipped Learning* (http://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning).

le, l'esposizione dei contenuti in classe e lo studio individuale a casa, come la *flipped classroom* prevede, ma è necessario capovolgere il processo stesso di apprendimento (Bergmann e Sams, 2014). I nuovi concetti dovranno essere costruiti attivamente dagli studenti – non ascoltati passivamente – interagendo con l'ambiente e rielaborando in modo autonomo (D'Amore, 1999).

La ricerca pedagogica fornisce alcune linee guida a sostegno di questa inversione mediante strategie di *active learning*, sempre tenendo in considerazione gli statuti epistemologici e le pratiche didattiche proprie di ogni disciplina. Da diverse esperienze sembra che l'*inquiry based learning*[3] e *peer education*[4] siano le strategie più proficue, specialmente se integrate fra loro (Cecchinato, 2014).

Guy Brousseau (1986) sostiene però che uno studente può costruire conoscenza solo se realmente interessato ad approcciarsi a ciò che gli è stato proposto. Per questo motivo la costruzione di concetti deve essere motivata e stimolata, inserendola in contesti legati alla quotidianità dei ragazzi. In effetti la didattica capovolta riprende molti punti della *Teoria delle situazioni* (Brousseau, 1997), in particolare della situazione *a-didattica*. Si potrebbe dire che il *flipped learning* "rappresenti una specifica messa in campo concreta di una particolare instanziazione della teoria delle situazioni" (Vastarella, 2016, p. 124).

Risulta evidente quindi come l'apprendimento capovolto si poggi su teorie didattiche e sfrutti strategie educative conosciute e sostenute dalla ricerca in questo campo da diversi anni, la cui efficacia è stata ampiamente dimostrata (Bergmann e Sams, 2013). Il merito che va riconosciuto al metodo *flipped* è di averle strutturate in un modello dinamico e integrate con le nuove tecnologie, permettendone una diffusione e un attecchimento nella scuola come mai era accaduto in precedenza.

In un contesto di questo tipo la figura dell'insegnante non può restare invariata. Il docente non dovrà più essere un semplice divulgatore, ma un consigliere; come ben riassume King (1993), deve avvenire una trasformazione da *sage on the stage* a *guide on the side*. In questo modo si ha la possibilità di attuare un apprendimento individualizzato, assistendo ogni studente e favorendo personali inclinazioni, talenti e interessi.

La struttura del nuovo ciclo di apprendimento è scansionato da tre fasi: lanciare, condurre e chiudere la *sfida*.

Il *lancio della sfida* è un momento delicato, il cui obiettivo è attivare l'interesse negli studenti attraverso la presentazione di problemi reali, dibattiti provocatori, analisi di casi e ricerche personali. Se fosse necessario in questa occasione è possibile anche definire il contesto o richiamare prerequisiti fornendo informazioni non del tutto esaustive. Gli approcci sono vari –

[3] Con il termine *inquiry based learnin*, o apprendimento per ricerca, si racchiudono numerose metodologie e tecniche didattiche che stimolano gli studenti a risolvere compiti e problemi attraverso processi esplorativi o analisi critiche di dati fornitegli o ricavati (Haq, 2017). Una delle metodologie le più utilizzate è il *problem based learning*, sviluppato nei primi anni '70 nell'ambito delle *Medical Schools* delle Università americane (Barrows, 1986).

[4] Con il termine *peer education*, o apprendimento tra pari, si considerano una serie di metodologie e tecniche didattiche in cui l'apprendimento non è individualistico ma collaborativo, grazie alla suddivisione della classe in piccoli gruppi (Comoglio, 1996). I tre approcci maggiormente utilizzati sono: *peer collaboration*, *peer tutoring* e *cooperative learning* (Damon e Phelps, 1989).

video, testo, immagini, file multimediali – e possono essere attuati a casa prima della lezione o in aula.

Gli studenti dovrebbero sentirsi incoraggiati a operare come “piccoli ricercatori” per risolvere le questioni lasciate aperte; ciò dovrebbe accadere durante la seconda fase, la *conduzione della sfida*. Lo scopo è di favorire una mentalità scientifica promuovendo la capacità di mettere in discussione le conoscenze invece che assimilarle acriticamente. Gli studenti dovrebbero attivarsi in questo senso applicando strategie cognitive e procedure di indagine specifiche della matematica, producendo anche materiale che sarà utile nell’ultima fase. Per favorire questo processo si sfruttano le strategie di apprendimento attivo già nominate.

Il ciclo si conclude con la rielaborazione e valutazione dello stesso. La *chiusura della sfida* consiste in un processo collettivo guidato dall’insegnante che coinvolge l’intera classe non solo con l’obiettivo di chiarire, rendere espliciti e consolidare i contenuti, ma anche di costruire e sviluppare competenze, riflettendo sui processi e sulle strategie attuate. Si tratta dunque di un vero e proprio *debriefing*, che può essere prolungato al di fuori dell’aula prevedendo attività di consolidamento, ulteriori ricerche e pratiche applicative.

È questa inoltre la fase in cui la valutazione interviene maggiormente, anche se il processo valutativo è in realtà integrato con l’intero percorso didattico, seppur in forme e con obiettivi differenti. La volontà è quella di non analizzare solo i prodotti, ma anche e soprattutto i processi, fornendo frequenti *feedback* in forma di consiglio, piuttosto che di giudizio, per rendere gli studenti in grado di modificare le proprie azioni migliorando le capacità di apprendimento (Rivoltella, 2013; Cecchinato e Papa, 2016). La valutazione sta quindi mutando, non limitandosi più a un mero accertamento di conoscenze, ma dando attenzione anche a “quanto il soggetto sa utilizzare il proprio sapere per agire nel contesto di realtà in cui si trova a vivere” (Castoldi, 2009, p.27), per questo motivo viene chiamata valutazione autentica (Maglioni e Biscaro, 2014).

3. I sistemi di numerazione nella storia

La prima parte del percorso si è svolta in un unico incontro di quattro ore nel laboratorio di informatica del liceo, per avere a disposizione computer e connessione internet. Le altre parti sono state spezzate in più incontri da due ore ciascuno e hanno avuto luogo in classe.

Lo stimolo, che è stato presentato in aula, consisteva in un’immagine trovata in rete, in uno dei social network di maggior diffusione, *Facebook*. Il soggetto era un uomo di origine araba con abbigliamento tradizionale, affiancato da una frase: “*Questo è Ako Sharmootah e vuole imporre in Italia l’uso dei numeri arabi. Condividi se sei indignato*”. La speranza, usando tale immagine con origine e tema estremamente attuale e provocatorio, era di rendere maggiormente accattivante l’introduzione dell’argomento attivando una discussione collettiva. Dopo aver mostrato la foto è stato chiesto agli studenti di esprimere la propria opinione a riguardo. In seguito ad un primo momento di disappunto e confusione generale, uno studente ha domandato: *“ma i numeri arabi non sono quelli che utilizziamo?”*, calmando immediatamente la situazione, e attirando l’attenzione di tutti.

La classe è stata esortata a fare domande; essendo queste formulate da loro in prima persona avrebbero dovuto provocare un naturale bisogno di soddisfarle. Gli interrogativi emersi sono stati: *"Perché usiamo i numeri arabi?"*, *"I numeri arabi che usiamo sono sempre stati di questa forma?"*. È stata concessa una decina di minuti per una rapida indagine sul web con lo scopo di rispondere ai quesiti emersi per poi esporre i risultati in modo informale durante la successiva discussione, svelando così i due temi principali dell'unità di apprendimento: i differenti sistemi di numerazione usati dalle popolazioni nel corso della storia - popolazioni primitive, egiziane, mesopotamiche, greche, romane, cinesi e indiane - e la diffusione del sistema di numerazione indo-arabo in Europa.

Sul primo argomento si è basata l'attività di conduzione della sfida in aula, sviluppata mediante la *peer education*. La classe è stata divisa in 7 gruppi, uno per popolazione, composti da tre, quattro o cinque studenti in base alla quantità di materiale a disposizione. La ripartizione dei gruppi è avvenuta secondo i canoni della *peer collaboration*, quindi affiancando studenti con lo stesso livello disciplinare (Damon e Phelps, 1989). Grazie a questa scelta è stato possibile assegnare le popolazioni con sistemi di numerazione più complessi ai gruppi con competenze matematiche di livello più alto.

Prima di dare inizio all'attività si è svolta una breve lezione dialogata, per presentare il sistema di numerazione posizionale decimale, richiamando alcuni prerequisiti e riorganizzandoli in una struttura più adatta al nostro percorso. Questo momento, in cui è stato creato un collegamento con le loro conoscenze pregresse, ha un duplice effetto: far emergere eventuali *misconcetti* (D'Amore, 1999) e produrre un apprendimento stabile e significativo. "Le nuove conoscenze si innestano in quelle già possedute, favorendo il cambiamento concettuale" (Cecchinato e Papa, 2016, p. 52)

L'attività prevedeva che ogni gruppo svolgesse una ricerca approfondita sul tema dei sistemi di numerazione usati dalla popolazione a loro affidata. Questa è stata guidata dall'insegnante mediante una lista di siti web/testi cartacei da cui poter attingere, e da un elenco di punti nodali su cui concentrarsi. L'insieme di questi due strumenti è stato chiamato *scheda di supporto* (riportiamo a titolo di esempio quella relativa alla popolazione egiziana in appendice nella Scheda 1).

Una volta raccolte le informazioni gli studenti hanno dovuto rielaborarle e riorganizzarle per la produzione di materiale, testuale e multimediale, che è stato condiviso in un secondo momento con l'intera classe. Era inoltre previsto che ogni gruppo proponesse una breve presentazione del proprio argomento e che i compagni, a cui era rivolta, prendessero appunti. Questi ultimi sarebbero stati utili, insieme al materiale preparato e condiviso dal gruppo stesso, per la compilazione di una scheda di verifica sull'argomento, a conclusione dell'incontro.

L'obiettivo non era solo far conoscere l'origine dei numeri e la loro evoluzione, ma era soprattutto sviluppare alcune competenze trasversali a tutte le materie, a cui non sempre viene data la giusta attenzione. Ci stiamo riferendo ad alcune delle competenze generali riportate dalle *Indicazioni Nazionali per Licei* del 2010 come progettare, comunicare, collaborare e partecipare, agire in modo autonomo e responsabile, individuare collegamenti e relazioni, acquisire e interpretare l'informazione.

Gli studenti hanno dimostrato impegno ed interesse, ma essendo il primo approccio ad attività di questo tipo si sono manifestate alcune carenze (Carletti e Varani, 2005). I membri della maggior parte dei gruppi invece di collaborare si sono suddivisi i punti nodali da ricercare individualmente, proponendo in molti casi un prodotto disomogeneo, mal strutturato e a volte ripetitivo. Il lavoro svolto si può assimilabile a consecutivi "copia e incolla" piuttosto che un'interpretazione delle informazioni trovate[5]. Si evidenzia una mancanza di capacità collaborative, progettuali, di rielaborazione e di individuazione delle relazioni.

Durante l'attività è emerso un aspetto particolarmente interessante: la preferenza degli studenti ad usare supporti digitali piuttosto che cartacei nella ricerca di informazioni. Questa ipotesi è stata confermata dagli stessi, che durante la compilazione del questionario finale di gradimento, di cui parleremo nel seguito, hanno affermato all'unanimità di aver scelto i siti web come fonti piuttosto che i formati cartacei. I motivi espressi sono principalmente due: da un lato la rapidità e l'intuitività, dall'altra l'abitudine ad utilizzare tali modalità. Questo episodio costituisce un esempio tangibile del fatto che "tutti noi, in particolare le giovani generazioni, siamo continuamente coinvolti in pratiche info-comunicative di natura digitale che stanno profondamente innovando le modalità di produzione e diffusione culturale" (Cecchinato e Papa, 2016, p. 8).

Al termine delle presentazioni di tutti i gruppi, durante il quale il docente ha potuto dare consigli agli allievi per migliorare gli elaborati, si è aperto uno spazio per le riflessioni, ricordando un quesito a cui non era ancora stata data risposta: *"Perché si chiamano numeri arabi?"*. È stata ampliata questa fase oltre l'aula, invitando gli alunni a svolgere individualmente una ricerca sull'argomento - dal titolo *Diffusione della matematica araba in Europa* - guidata dall'insegnante mediante schede di supporto. Gli studenti hanno ricevuto *feedback* praticamente immediati sul loro lavoro, che hanno potuto applicare modificando le trattazioni e migliorando i risultati ottenuti.

Per mancanza di tempo la verifica conclusiva (in appendice nella Scheda 2) è stata compilata a casa; gli studenti hanno dimostrato di saper comunicare le conoscenze acquisite e anche di saper individuare collegamenti e relazioni fra essi.

L'uso della storia nell'insegnamento-apprendimento della matematica, sfruttata in particolar modo per introdurre nuovi concetti, è molto apprezzato da ricercatori, insegnanti e studenti (Bagni, 2004). Le ragioni di questo gradimento sono da riferirsi al suo carattere formativo e d'interesse. La storia della matematica offre la possibilità di suscitare riflessioni metacognitive e di sviluppare una conoscenza socio-culturale profonda di un particolare periodo storico (Furinghetti e Somaglia, 1997).

4. Il sistema di numerazione decimale

Dopo la ricerca degli studenti sulla matematica araba e la sua diffusione in Europa, si è

[5] Questo episodio è un esempio di come l'impiego del web possa essere poco utile o addirittura dannoso se adoperato acriticamente. Per tale motivo è importante nella scuola di oggi formare gli studenti a un uso consapevole della rete.

scelto di dedicare attenzione agli algoritmi delle quattro operazioni fondamentali usate oggi per numeri a più cifre, che nascono e si sviluppano proprio nel periodo storico appena trattato. Si è pensato potesse essere interessante per gli studenti capire perché tali algoritmi, che tutti sfruttano quotidianamente, funzionano (Zan, 2000a).

È stata organizzata una gara di velocità nel "far di conto". Questo è stato semplicemente un pretesto - lo stimolo - per attirare l'attenzione degli studenti facendo loro applicare gli algoritmi delle quattro operazioni e, in un secondo memento, fargli notare quanto sia stato meccanico eseguirli. Al termine della gara, sono state poste alcune domande al vincitore: "*Come hai fatto a essere così veloce?", "Quale algoritmo hai usato? Mostracelo!", "Come fai a essere sicuro che il risultato sia giusto?"*. La domanda che ha creato più difficoltà, non solo al vincitore ma a tutta la classe, è stata: *"Perché l'algoritmo funziona?".* Le risposte inizialmente aggiravano il problema – *"servono perché rendono i calcoli più veloci"* – poi, una volta compresa la finalità della richiesta, sono emerse giustificazioni che potrebbero essere considerate un indicatore dell'apprendimento acritico a cui l'insegnamento tradizionale li ha portati (Gibbs, 1981): *"ce le hanno insegnate così", "degli studiosi le hanno inventate".* Era dunque il momento giusto per passare alla conduzione della sfida.

L'attività consisteva nell'argomentazione di alcune delle operazioni svolte durante la gara sfruttando la rappresentazione decimale dei numeri e le proprietà delle operazioni[6].

Sono state usate nuovamente strategie di *peer education*, questa volta suddividendo gli studenti in gruppi di due o tre elementi secondo i canoni della *peer tutoring*. In ogni gruppo era quindi presente un alunno con livello disciplinare alto, chiamato *tutor*, e uno/due studenti con un livello più basso, chiamato *tutorando* (Damon e Phelps, 1989).

Gli obiettivi, oltre quelli di carattere generale già elencati in precedenza, erano: saper riconoscere la prova matematica come aspetto fondamentale della materia, fare congetture matematiche e sviluppare per essa un'argomentazione (D'Amore e Godino, 2003). Non solo, l'essere parte di un gruppo potrebbe spingere ogni membro a sviluppare competenze comunicative specifiche per creare una conoscenza condivisa.

L'applicazione in classe è stata complicata, i gruppi in principio non capivano esattamente la richiesta poiché, come già anticipato, non avvertivano la necessità di dover dimostrare o argomentare nulla. Le prime risposte scritte sembrano essere una descrizione dell'algoritmo piuttosto che un'argomentazione delle ragioni sottostanti al suo funzionamento.

Per citarne alcune: *"La somma in colonna funziona perché si separano le unità dalle decine e dalle migliaia"; "L'addizione si fa in colonna perché questo metodo ci permette di sommare singolarmente le unità, le decine e le centinaia degli addendi. Se queste somme superano il 10 si scrive la cifra delle decine nella colonna a sinistra e si somma alle altre cifre che hanno la stessa potenza di 10 quando le scrivo sotto forma decimale"*.

Dopo l'intervento dell'insegnante, mirato di gruppo in gruppo, gli studenti sono riusciti ad impostare il lavoro correttamente, e nel tempo dato a disposizione sono stati in grado di argomentare gli algoritmi di una somma, una differenza e un prodotto. Molte delle spiegazioni

[6] A titolo di esempio consultare il sito dell'Università di Bologna http://progettomatematica.dm.unibo.it/Basi/node4.html.

sono state confuse, alcuni gruppi hanno applicato l'algoritmo della somma in colonna ai numeri scritti in notazione decimale. Ciò nonostante, essendo la classe una prima di scuola secondaria di secondo grado che muove i suoi primi passi verso lo sviluppo delle capacità argomentative matematiche, si potrebbe considerare il lavoro svolto soddisfacente. Alcuni esempi di tali risposte sono:

"$57 + 34 = 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 8 \cdot 10^1 + 11 \cdot 10^0 = 8 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 91.$ *Uso il riporto perché ho superato il 10, quindi lo scompongo ancora e trovo 91, risultato effettivo".*

"La somma in colonna funziona perché le cifre moltiplicate per la stessa potenza di dieci (es. $7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^0$*) si sommano tra loro fino a raggiungere 9 al massimo, dove si [passa] poi alla potenza di 10 successiva. Il riporto viene quindi utilizzato per non confondere fra di loro le cifre, che appartengono a diverse potenze di 10".*

Durante il *debriefing* finale, che ha concluso l'incontro, l'insegnante ha riordinato e formalizzato i contenuti sfruttando i contributi degli alunni.

Nella lezione successiva l'attenzione era ancora indirizzata verso il sistema di numerazione decimale, ma il lancio della sfida ha avuto luogo usando stimoli di natura differente: giochi di prestigio.

Il primo gioco proposto è *Il magico 9*. Dopo aver scritto il numero 9 su un foglio, senza mostrarlo alla classe, questo deve essere ripiegato e inserito in una busta. Gli alunni vengono invitati, ognuno in modo indipendente dagli altri, a pensare ad un numero di due cifre. Si richiede poi di sommare le due cifre di cui il numero è formato e di sottrarlo a quello pensato inizialmente. Si specifica che se il risultato è di una sola cifra si ha finito il gioco, altrimenti le due cifre di cui è composto vanno nuovamente sommate (Peres, 2006). È stato chiesto di dire ad alta voce e contemporaneamente il risultato ottenuto dopo il procedimento. Ogni studente è rimasto molto sorpreso nel sentire dire all'intera classe il suo stesso valore, e ancor di più nel vedere che il numero 9 era stato predetto fin dal principio all'interno della busta. La speranza era quella di far nascere il forte desiderio di comprendere il meccanismo che lo rende possibile, come spesso accade quando si è spettatori di giochi di prestigio, generando negli studenti domande derivate dalla pura curiosità, le più proficue per un apprendimento profondo e a lungo termine (De Beni e Moè, 2000). La conduzione della sfida consisteva proprio nel soddisfare tali quesiti spontanei. Per farlo si è adottata la stessa strategia di *peer education* della lezione precedente, mantenendo i gruppi invariati.

Gli obiettivi specifici dell'attività erano: saper risolvere problemi che nascono in contesti matematici e non, fare congetture matematiche, saperle argomentare/dimostrare e comunicare ad altre persone (D'Amore e Godino, 2003).

Per spiegare il trucco è necessario sfruttare la rappresentazione posizionale decimale di un numero generico ed applicare su di esso le richieste del gioco. Un generico numero di due cifre in rappresentazione decimale è della forma $X \cdot 10 + Y$. Sottraendo a quest'ultimo la somma delle cifre di cui è composto si ottiene $X \cdot 10 + Y - (X + Y)$ e svolgendo i calcoli si ha

$X \cdot 10 + Y - X - Y$, ossia $9X$.

Se $X = 1$ il risultato è 9, numero composto di una sola cifra, quindi il gioco è giunto al termine con il risultato atteso. Se $X > 1$ il risultato $9X$ è un numero composto di due cifre e multiplo di 9. Poiché il criterio di divisibilità per 9 asserisce che un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è multiplo di 9, alla richiesta di sommare le cifre di cui è composto si ottiene come risultato il valore previsto.

Il primo problema incontrato dalla classe è stato la comprensione della richiesta, non sentendo la necessità di dimostrare o argomentare, molti studenti hanno voluto sapere se fosse sufficiente scrivere i passaggi del gioco applicati ad alcuni esempi. Altri, che avevano invece avvertito la necessità di generalizzare, hanno rappresentato un numero generico a due cifre come XY e la somma delle sue due cifre come $X + Y$, dimostrando di non saper applicare le conoscenze acquisite a situazione concrete. In seguito all'intervento mirato dell'insegnante – che ha fornito *feedback* individuali, indispensabili quando gli allievi giungono ad un punto oltre il quale non riescono a procedere (Cecchinato e Papa, 2016) – tutti i gruppi sono riusciti a sviluppare la dimostrazione fino ad ottenere $9X$. Via via che gli studenti giungevano a tale risultato veniva consegnata loro una lista contenente i criteri di divisibilità, il secondo argomento centrale di questa parte del percorso.

Tutti gli studenti hanno capito immediatamente che era necessario applicare il criterio di divisibilità del 9, ma nonostante gli input del docente nessuno ha portato a termine la dimostrazione. Per meglio dire, circa la metà dei gruppi dichiara di averla conclusa semplicemente scrivendo in modo sconnesso e non motivato la frase *"Per il criterio di divisibilità del* 9*".* Questo fatto potrebbe essere ricondotto al problema del contratto didattico (Brousseau, 1984); la paura di sbagliare o di non portare a termine il compito assegnato sembra aver spinto i gruppi a scrivere la risposta che credevano l'insegnante avrebbe voluto leggere.

Durante la chiusura della sfida, grazie all'apporto di tutti i gruppi, la dimostrazione è stata formalizzata approfondendo in particolare l'ultimo passaggio in cui era necessaria l'applicazione del criterio di divisibilità. Per consolidare questo tema è stato proposto un quesito tratto dai Campionati Internazionali di Giochi Matematici MATEpristem dell'Università Bocconi di Milano chiamato *Superdivisibilità: "Utilizzando una sola volta le cifre 1,2 e 3 gli unici numeri divisibili per 1, 2 e 3 che possiamo formare sono 132 e 312. Utilizzando una sola volta i numeri da 1 a 6, possiamo formare dei numeri che siano divisibili per 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Se sì, qual è il più piccolo? Motiva la tua risposta"*.

Il problema è stato risolto rapidamente dai gruppi, fornendo risposte esaurienti e corrette. Non tutti però hanno dato la soluzione più semplice, come nel seguente esempio: *"I numeri divisibili per 5 e per 6 sono quelli che terminano con lo zero. Dato che i numeri che possiamo scrivere sono formati da cifre che vanno dall'1 al 6, nessun numero composto da queste cifre può essere diviso sia per 5 che per 6"*. Ciò nonostante è stata dimostrata una comprensione profonda dell'argomento, oltre ad una corretta scelta strategica.

Per concludere la lezione è stato assegnato un ultimo gioco di prestigio chiamato *Il rinoceronte nero* (Peres, 2006), la cui spiegazione si basa sugli stessi elementi portanti già affrontati con *Il magico 9*. Chiedere alla classe di interpretare anche questo gioco di prestigio coincide con la richiesta di applicare e adattare le strategie e le conoscenze appena sviluppate ad un nuovo problema sfidante (Cecchinato e Papa, 2016). Gli studenti hanno provato di possedere questa competenza fornendo argomentazioni chiare e complete in brevissimo tempo.

I prodotti e i processi delle tre attività descritte sono state valutate positivamente. Gli studenti hanno avuto *feedback* immediati in aula grazie alla presenza costante del docente che, passando tra i gruppi, ha potuto monitorare il loro apprendimento.

5. Il sistema di numerazione binario

Per l'introduzione della terza parte lo stimolo scelto è stato nuovamente un gioco di prestigio, chiamato *Le tracce significative*. Come detto in precedenza la speranza era ancora quella di stimolare un forte desiderio di comprendere il meccanismo che ne sta alla base. *Le tracce significative* è un gioco di magia molto semplice, che necessita di un collaboratore scelto nella classe e di un mazzo di carte. Dopo aver tracciato sei linee verticali a distanza di circa 10 cm, il docente deve dare le spalle alla cattedra chiedendo allo studente nominato suo collaboratore di prendere un mazzetto formato da un numero di carte a scelta e posizionarle sulla prima linea a destra. Da questo devono essere prelevate due carte, una va scartata, l'altra posizionata sulla prima linea successiva verso sinistra. Quest'ultimo procedimento deve essere ripetuto finché possibile, ossia fino a quando saranno terminate le carte del mazzetto sulla prima linea da destra o ne sarà rimasta soltanto una. La serie di mosse appena illustrate devono essere svolte ancora sul nuovo mazzetto, presente sulla seconda linea a partire da destra, e poi iterato per la terza, la quarta e così via, fino all'esaurirsi delle carte. Come si può immaginare, al termine di tutto il processo, sulle linee verticali potranno esserci una o nessuna carta. Giunti a questo momento il docente, girandosi verso la cattedra, riuscirà a capire il numero esatto di carte di cui era composto il mazzetto selezionato inizialmente, semplicemente guardando la disposizione ottenuta (Peres, 2006). La soluzione al gioco di prestigio è strettamente legata al codice binario. Infatti ogni operazione di ridistribuzioni dei mazzetti, su cui si basa questo gioco, equivale a dividere per due il numero di carte di cui sono formati. Per dirlo in altri termini, il quoziente della divisione corrisponde al numero di carte che vengono posizionate sulla linea successiva verso sinistra, mentre il resto è dato dal numero di carte che rimangono sulla linea di partenza. È evidente la corrispondenza tra tale procedimento e l'algoritmo di conversione di un numero decimale in codice binario. Dunque per risalire al numero di carte contenute nel mazzetto iniziale è sufficiente riconvertire in decimale il numero binario individuato dalla successione di spazi con la carta – ossia 1 – e spazi vuoti – ossia 0 – presenti sulle linee.

L'attività didattica della prima parte della lezione è stata svolta individualmente, non per giungere alla comprensione del trucco che sottende *Le tracce significative*, come richiesto nella lezione precedente, ma per indagare la relazione che intercorre tra i passaggi del gioco e le procedure matematiche che ne conseguono, inquadrando la situazione e modellizzandola. L'attività, guidata da una scheda di supporto – in Tabella 1 – potrebbe condurre gli inconsapevoli studenti alla scoperta del processo di conversione di un numero decimale in binario.

La compilazione della scheda è avvenuta senza alcuna difficoltà e gli studenti hanno dimostrato di saper modellizzare un problema comprendendo le dinamiche che lo sottendono (un esempio è riportato nella Scheda 3 in appendice).

Compila la seguente tabella annotando il numero di carte presenti nei mazzetti posizionati sulle linee verticali (quando ci sono):

Linee da destra	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Numero carte all'inizio						
Numero carte dopo il primo ciclo						
Numero carte dopo il secondo ciclo						
Numero carte dopo il terzo ciclo						
Numero carte dopo il quarto ciclo						

Dimentichiamoci per un secondo del gioco di prestigio e analizziamo la tabella.
Cosa posso osservare?
Cosa accade passando dalla prima alla seconda riga? E dalla seconda alla terza? E...?

Tabella 1 – Scheda di supporto relativa a Le tracce significative

Restava solo da spiegare come l'insegnante riuscisse a individuare il numero di carte del mazzetto iniziale guardando la loro disposizione, ossia l'ultima riga della tabella. Ciò è avvenuto durante una discussione collettiva, occasione in cui è stato introdotto il sistema di numerazione binario. Sono stati esposti i principi fondamentali della numerazione in base due, fornendo informazioni utili per il seguito dell'attività didattica mediante una breve lezione dialogata.

Terminata questa prima fase introduttiva è stato proposto il secondo stimolo, un gioco di strategia uno contro uno chiamato *Il gioco del Nim*. Vengono disposte su un tavolo quattro colonne di fiammiferi, che ne contengono rispettivamente *1, 3, 5 e 7* (vedi Figura 1). In ogni mossa il giocatore di turno deve scegliere una delle colonne, non già vuote, e rimuovere da esso un certo numero di fiammiferi, da un minimo di uno fino all'intera colonna. Vince il giocatore che rimuove l'ultimo fiammifero.

Il gioco è stato scelto per la relativa strategia vincente che si basa principalmente sulla conversione dei numeri decimali in numeri binari (Peiretti, 2012) (riportata in appendice nella Scheda 4). Grazie anche alla sua complessità gli studenti dovrebbero sentirsi stimolati a mettere in campo le proprie capacità di riflessione e ragionamento.

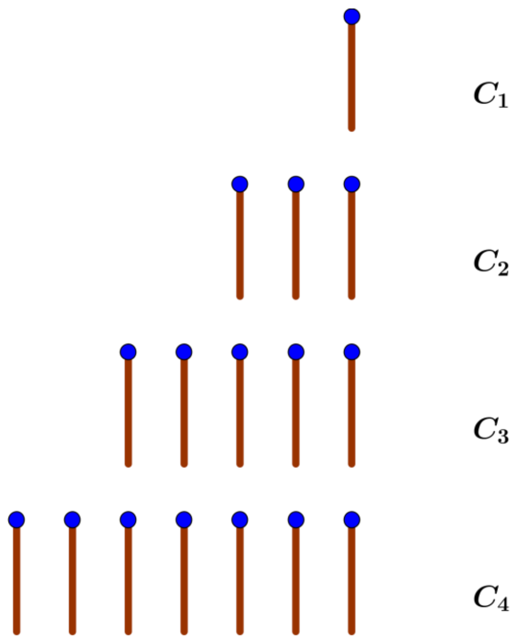


Figura 2 – Rappresentazione posizione iniziale del Gioco del Nim. Quattro colonne C_1, C_2, C_3, C_4 contengono rispettivamente 1, 3, 5 e 7 fiammiferi

La conduzione di questo momento, che ora descriveremo, si ispira alla strategia didattica *Think-Pair-Share* secondo cui, in seguito ad una breve illustrazione dell’argomento, viene lasciata la possibilità agli studenti di sviluppare una discussione di coppia scambiandosi reciprocamente le proprie riflessioni (King, 1993). Infatti, dopo la presentazione delle regole del gioco, portando come esempio alcune partite, gli studenti sono stati invitati a disporsi in coppie e a sfidarsi per alcuni minuti. Lo spirito di competizione avrebbe dovuto far emergere in loro il desiderio di conoscere la strategia vincente.

Una volta svelata quest’ultima è stato concesso altro tempo, fino al termine della lezione, per permettere alle coppie di confrontarsi e applicare la complessa strategia in ulteriori partite.

Nella lezione successiva, l’ultimo incontro del laboratorio, si è messa nuovamente in atto la *peer education* con l’approccio *peer collaboration*, suddividendo la classe in gruppi di 4 elementi con il medesimo livello disciplinare.

L'attività è cominciata con la consegna di alcuni documenti riguardanti una delle tre varianti più famose del gioco del Nim (Eugeni, Mascella e Tondini, 2001) avendo cura di consegnare le versioni più complesse ai gruppi con competenze matematiche più alte (in appendice, nella Scheda 5, è riportato un esempio del materiale fornito agli studenti). La scelta del livello di difficoltà del compito è un aspetto molto importante, bisognerebbe riuscire a collocare quest'ultimo in una fascia di competenze appena superiore a quello che l'alunno possiede, posizionandolo così in quella che Vygotskij (1990) chiama *zona di sviluppo prossimale*. Grazie al diverso grado di complessità delle tre versioni del gioco del Nim è stato possibile scegliere il livello più adeguato per ogni gruppo, puntando ad un apprendimento individualizzato. Si è adoperata questa accortezza anche durante la prima attività sui sistemi di numerazione nella storia.

Ogni gruppo ha dovuto studiare il materiale, che conteneva le regole e la strategia vincente riconducibile al *Gioco del Nim* originale. Questa, oltre a essere messa in pratica, doveva essere esposta alla classe durante la fase finale di chiusura della sfida. Per verificare la piena comprensione è stato anche richiesto di proporre alcuni esempi di posizioni iniziali, differenti da quella data, in modo tale la strategia vincente diventasse a favore del primo giocatore.

Gli obiettivi specifici in questo caso erano innumerevoli, si voleva sviluppare la capacità di applicare e adattare strategie appropriate per risolvere i problemi, riconoscere e sfruttare connessioni tra oggetti matematici e non, progettare strategie matematiche argomentandole e comunicandole ad altre persone, anche mediante rappresentazioni di vario tipo (D'Amore e Godino, 2003).

Il problema principale riscontrato è stato la lettura del testo. Gli studenti si sono lanciati nello svolgimento dell'attività senza leggere con attenzione la richiesta, ponendosi in corso d'opera diverse questioni che gli hanno impedito di proseguirla, nonostante queste fossero ben esplicitate nel compito. Solo dopo l'intervento diretto dell'insegnante, che ha spronato a rileggere con attenzione le regole e le strategie, i gruppi hanno cominciato a lavorare nel modo corretto (un esempio è proposto nella Scheda 6).

La lezione è terminata con l'ultimo *debriefing* in cui gli studenti hanno esposto i contenuti delle loro schede e proposto gli esempi elaborati alla classe, dimostrando di saper modellizzare e risolvere il problema; hanno anche messo in luce il loro lato creativo proponendo varianti del gioco adeguate. Questa è stata un'ulteriore occasione per gli studenti di ricevere valutazioni e consigli da parte dell'insegnante.

6. Conclusioni

L'esperienza svolta in classe è stata un'occasione per sviluppare diverse riflessioni. Il nuovo approccio didattico sembra aver fatto emergere vari aspetti delicati del contesto educativo tradizionale, mettendone in evidenza i limiti.

L'apprendimento acritico e mnemonico che spesso si ottiene somministrando lezioni frontali, ha portato gli studenti a non avvertire la necessità di spiegare, argomentare o dimostrare i risultati matematici. Questo aspetto è estremamente delicato e complesso: è nota la difficoltà che hanno la maggior parte degli allievi nel vedere la dimostrazione matematica come prova, ed è una delle motivazioni che ha influito nell'inserimento dell'argomentazione nella pratica didattica. La speranza era di creare una continuità che conducesse in modo naturale alla dimostrazione, anche se oggi sappiamo che lo sviluppo di un'argomentazione, per quanto elaborata e raffinata sia, non apre le porte verso la dimostrazione. Questo non significa che non debba essere trattata, anzi, è fondamentale per sviluppare competenze da utilizzare di fronte all'argomentazione stessa, ma quest'ultima, come la dimostrazione, deve avere una sua didattica esplicita (Duval, 1996).

Un'altra conseguenza è la frequente comparsa di situazioni legate al contratto didattico (Brousseau, 1984). Gli studenti sono spesso abituati ad avere obblighi e ricompense che sono costanti nel modo di insegnare di un docente; per tale motivo gli allievi percepiscono determinati comportamenti come attesi dall'insegnante (D'Amore, 1999). Ciò li porta a ripeterli o emularli per ottenere la sua approvazione, anche senza averne piena consapevolezza. Gli studenti per apprendere devono invece accettare le incertezze che derivano dall'incompletezza del loro sapere, il docente ha quindi il dovere di "rassicurare gli allievi e incitarli a rischiare mostrando loro che gli errori non sono degli sbagli" (Sarazzy, 1998, p. 146).

Un secondo aspetto critico dell'approccio tradizionale consiste nella tendenza ad "addestrare" gli studenti, richiedendo di svolgere batterie di esercizi standardizzati o problemi stereotipati, che tolgono motivazione e inibiscono la capacità di applicare conoscenze matematiche. Attività di questo tipo non richiedono infatti una riflessione sui testi, a volte non è nemmeno indispensabile leggerli. Lo studente, non essendo abituato a dare attenzione alla richiesta, si lancia nell'applicazione acritica di algoritmi senza un'analisi preventiva e approfondita del testo. Ciò non può che condurlo a una conoscenza superficiale e volatile (Malara, 1993).

Per osservare risultati soddisfacenti e significativi dell'applicazione di metodologie didattiche attive, queste dovrebbero essere praticate con costanza e per lunghi periodi di tempo (Carletti e Varani, 2005). Consapevoli di ciò, sembra comunque che l'esperienza vissuta abbia permesso agli alunni di sviluppare diverse competenze di carattere generale e specifico della disciplina, come mostrato in precedenza.

L'aspetto emerso in modo più preponderante è quello legato ai fattori affettivi, e in particolare alla componente motivazionale, che è uno dei fattori considerati rilevanti nell'insegnamento-apprendimento della matematica (Pellerey 1993; Zan, 2000b). L'idea stessa di competenza sembra essere naturalmente legata alle intenzioni, alle potenzialità e alla volizione del soggetto che apprende. Bruno D'Amore afferma infatti che la competenza è non solo l'uso e la padronanza di conoscenze "ma pure un insieme di atteggiamenti che mostrano la disponibilità "affettivamente positiva" a volerne far uso" (D'Amore e Godino, 2003, p. 8).

L'impegno e l'interesse dimostrato durante le lezioni non sono stati gli unici indicatori della presenza di questa componente (Goldin *et al.*, 2016); gli studenti stessi, mediante la compilazione del questionario finale[7], hanno confermato tali ipotesi. Una percentuale che varia tra il

[7] Il questionario, compilato da 25 studenti, indagava diversi aspetti del *flipped learning*: apprendimento significativo, didattica individualizzata, valutazione autentica. L'obiettivo era di verificare la presenza di eventuali

76% e il 96% ha dichiarato di aver trovato il laboratorio più divertente[8] delle lezioni tradizionali, gli argomenti affrontati con tali modalità più interessanti e le sensazioni provate sempre positive[9]. Tutta la classe vorrebbe infatti ripetere l'esperienza e il 72% desidererebbe studiare matematica sempre in modalità *flipped* (Lazzari, 2017).

Tirando le fila di questa breve serie di riflessioni pare che il risultato di maggior interesse e dalle prospettive più proficue sia probabilmente l'ultimo trattato. Se l'apprendimento capovolto riuscisse realmente a migliorare la motivazione - o più in generale la componente affettiva - come studi teorici (Abeyekera e Dawson, 2015; Kaushal, Cheng-Nan, Chun-Yen, 2015) e questa primissima esperienza sembrano suggerire, potrebbe essere un utile strumento per l'insegnamento-apprendimento della matematica.

Emerge quindi una possibilità di sviluppo sull'argomento, per rendere più chiaro il legame fra i fattori affettivi e l'apprendimento capovolto in matematica.

7. Bibliografia di riferimento

Abeysekera, L., Dawson, P. (2015). Motivation and cognitive load in the flipped classroom: definition, rationale and a call for research. *Higher Education Research & Development*, 34 (1), 1-14. Consultabile al sito http://socialwork.nyu.edu/content/dam/sssw/faculty-staff/pdf/EducationalTechnology/Research/Motivation%20and%20cognitive%20load%20in%20the%20flipped%20classroom%20definition%20rationale%20and%20a%20call%20for%20research.pdf (ultimo accesso 03/08/2017).

Bagni, G. T. (2004). Storia della matematica in classe: Scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*. 3, 51-70.

Barrows, H. S. (11986). A Taxonomy of Problem Based Learning Methods. *Medical Education*. 20, 481-486.

Bergmann, J., Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom: Reach every Student in every Class every Day*. Eugene (OR): ISTE.

Bergmann, J., Sams, A. (2014). *Flipped Learning. Gateway to student Engagement*. Washington (DC): ISTE.

Bishop, J. L., Verleger, M. A. (2013). The flipped classroom: A Survey of Research. 120th ASEE Annual Conference & Research. Consultabile al sito https://www.asee.org/public/conferences/20/papers/6219/view (ultimo accesso 03/08/2017).

Boyer, C. B. (1976). *Storia della matematica.* Milano: Isedi.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract. *Proceedings of the TME*

benefici derivati dall'applicazione della metodologia già dopo breve tempo.

[8] Middleton (1995) afferma che il termine "divertimento" può essere interscambiato con "motivazione intrinseca". Il primo è più colloquiale ed è di più facile comprensione quando si parla con studenti e docenti.

[9] Il 96% degli studenti ha dichiarato di aver trovato le lezioni *flipped* più divertenti rispetto a lezioni tradizionali, il 76% che gli argomenti trattati in questo modo sono stati più interessanti e l'80% di aver provato sempre sensazioni positive.

54, I.D.N. Bielefeld, pp. 110-119.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7 (2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical situations in Mathematics. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990.* (Trad. Cooper, M., Balacheff, N., Sutherland, R., Warfield, V.). Londra: Kluwer.

Carletti, A., Varani, A. (2005). *Didattica costruttivista. Dalla teoria alla pratica in classe.* Trento: Erickson.

Castoldi, M. (2009). *Valutare le competenze. Percorsi e strumenti*. Roma: Carocci.

Cecchinato, G. (2014). Flipped classroom: innovare la scuola con le tecnologie digitali*. Tecnologie Didattiche*, 22 (1), 11-20.

Cecchinato, G., Papa, R. (2016). *Flipped classroom un nuovo modo di insegnare e apprendere*. Novara: UTET.

Comoglio, M. (1996). Verso una definizione del Cooperative Learning. *Animazione Sociale*, 4.

Damon, W., Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International journal of educational research*, 13 (1), 9-19.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B., Godino, J. D., *et al.* (2003). *Competenze in matematica: una sfida per il processo di insegnamento-apprendimento*. Bologna: Pitagora.

De Beni, R., Moè, A. (2000). *Motivazione ad apprendere*. Bologna: il Mulino.

Duval, R. (1996). Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva?. *La matematica e la sua didattica*, 10 (2), 130-152.

Eugeni, F., Mascella, R., Tondini, D. (2001). Un’applicazione del calcolo binario: il gioco del NIM. *Periodico di Matematiche*, VIII, 1 (4).

Flipped Learning Network. (2014). *The Four Pillars of F-L-I-P.* Consultabile al sito http://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning (accesso: 23 luglio 2017).

Franchini, R. (2014). The flipped classroom (Le classi capovolte). *Rassegna CNOS*, 1, 83-97.

Furinghetti, F., Somaglia, A. (1997). Storia della matematica in classe, *L’educazione matematica*, XVIII, V, 2 (1).

Gibbs, G. (1981). Twenty terrible reasons for lecturing*. SCED Occasional Paper No*. 8, Birmingham.

Goldin, G. A., Hannula, M. S., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middleton, J. A., Pantizira, M., Zhang, Q. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions*. ICME-13 Topical Surveys. Springer.

Haq, I. (2017). Inquiry-based Learning. In Cantillon, P., Wood, D., Yardley, S., *ABC of Learning and Teaching*. Hoboken, NJ: Wiley.

Hwang, G. J., Lai, C. L., Wang, S. Y. (2015). Seamless flipped learning: a mobile techology-enhanced flipped classroom with effective learning strategies. *Journal of Computer in Education*, 2 (4), 449-473.

Kaushal, K. B., Cheng-Nan, C., Chun Yen, C. (2015). The Impact of the Flipped Classroom on Mathematics Concept Learning in High School. *Educational Technology & Society*, 19 (3), 134-142.

King, A. (1993). From Sage on the Stage to Guide on the Side. *College Teaching*, 41(1), 30-35.

Lage, M. J., Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *The Journal of Economic Education*, 31, 30-43.

Lazzari, E. (2017). Un'esperienza di flipped theaching nell'insegnamento-apprendimento della matematica. In *Quaderni GRIMeD n°3. Una feconda contraddizione – Didattica indivualizzata vs didattica cooperativa? Il problema della valutazione all'incrocio tra le "due didattiche"*, Atti del XX Convegno Nazionale GRIMeD. A cura di Cateni, C., Fattori, C., Imperiale, R., Piochi, B., Veste, A., Ricci, F. Torino: Il capitello. pp. 58-67. Consultabile al sito http://www.capitello.it/grimed3/Atti_Grimed_3.pdf (accesso: 23 luglio 2017).

Maglioni, M., Biscaro, F. (2014). *La classe capovolta. Innovare la didattica con la flipped classroom*. Trento: Erickson.

Malara, N. A. (1993). Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16 (10), 928-954.

MIUR (2010). *Indicazioni Nazionali 2010 per i licei*. Consultabile al sito http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_Liceo%20scientifico.pdf (accesso: 23 luglio 2017).

Peiretti, F. (2012). *Matematica per gioco*. Milano: TEA.

Pellerey, M. (1993). Volli, sempre volli, fortissimamente volli. La rinascita della pedagogia della volontà. *Orientamenti pedagogici*, 6, 1005-1017.

Peres, E. (2006). *L'elmo della mente. Manuale di magia matematica*. Milano: Salani Editore.

Rivoltella, P. C., *et al*. (2013). *Fare didattica con gli EAS. Episodi di Apprendimento Situato*. Brescia: La Scuola.

Sams, A., Bergmann, J. (2013). Flip Your Students' Learning. *Educational Leadership*. 70 (6), pp.16-20.

Sarrazy, B. (1998). Il contratto didattico. *La Matematica e la sua didattica*. 2, pp. 132-175.

Vastarella, S. (2016). Postfazione. In Bergmann, J., Sams, A. *Flip your classroom. La didattica capovolta.* Trad. Vastarella, S. Firenze: Giunti.

Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza.

Zan, R., (2000a). Convinzioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 23(3), 161-197.

Zan, R., (2000b). Atteggiamenti e difficoltà in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 23(5), 441-466.

APPENDICE

Scheda 1

Numerazione egiziana

Testi e siti web consigliati:
- C. B. Boyer, *Storia della matematica.* pp. 10-26, formato cartaceo
- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/HistoryTopics.html
- dm.unife.it/storia/index.html

Domande guida:
- dove e quando si è sviluppata la civiltà egiziana?
- quali reperti storici ci hanno permesso di conoscere e decifrare la loro scrittura?
- che tipo di numerazioni veniva usata?
- come svolgevano le operazioni aritmetiche?
- che scopi aveva la matematica?

Scheda 2

Rispondi alle seguenti richieste non superando le cinque righe di testo.

1. Racconta una breve storia del numero 0. (5 punti)
2. Quale civiltà utilizzava un sistema di numerazione sessagesimale e posizionale? Scrivi una breve descrizione del sistema di numerazione. (3 punti)
3. Scrivi i numeri 314 e 815 con i simboli egiziani, prova a sommarli e a sottrarli come avrebbero fatto loro. (3 punti)
4. Cosa si intende con notazione a bastoncino? Descrivilo brevemente contestualizzando la tua risposta. (3 punti)
5. Cosa hanno in comune la numerazione greca e quella romana? (2 punti)
6. Secondo te, perché noi oggi utilizziamo una numerazione posizionale decimale? (giustifica entrambi gli aggettivi) (4 punti)

Scheda 3

Compila la seguente tabella annotando il numero di carte presenti nei mazzetti posizionati sulle linee verticali (quando ci sono):

Linee da destra	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Numero carte all'inizio						*20*
Numero carte dopo il primo ciclo					*10*	*0*
Numero carte dopo il secondo ciclo				*5*	*0*	*0*
Numero carte dopo il terzo ciclo			*2*	*1*	*0*	*0*
Numero carte dopo il quarto ciclo		*1*	*0*	*1*	*0*	*0*

Tabella 3 – Tabella presente nella scheda di supporto e compilata da uno studente

Dimentichiamoci per un secondo del gioco di prestigio e analizziamo la tabella.
Cosa posso osservare?
Cosa accade passando dalla prima alla seconda riga? E dalla seconda alla terza?
E...?

"Possiamo osservare che ogni numero viene dimezzato colonna per colonna; se il numero delle carte è pari allora non avremo più carte nella colonna, se il numero è dispari ci avanzerà una carta.
Dalla prima alla seconda riga il numero si dimezza essendo pari non avanza nessuna carta. Nella seconda uguale e nella terza essendo dispari avanza una carta. Nella quarta non ne avanzano e nell'ultima ne avanzava una."

Scheda 4

La situazione presente sul tavolo dopo ogni mossa può essere rappresentata da una quadrupla $(a_{1,}, a_2, a_3, a_4)$, detta *posizione*, contenente in ordine le quantità di fiammiferi delle varie colonne. Ad esempio la posizione iniziale del gioco preso in esame sarà indicata con $(1, 3, 5, 7)$. Dopo ogni mossa la posizione si modificherà in base alla scelta fatta dal giocatore. Appare quindi evidente che esiste una sola posizione terminale, ovvero $(0, 0, 0, 0)$.
In questa versione del gioco esiste una strategia vincente per il secondo giocatore. Questo deve muovere i fiammiferi in modo da lasciare al proprio avversario una posizione tale che:

- trasformati in codice binario $a_{1,}, a_2, a_3, a_4$
- sommati in colonna quest’ultimi con la somma-Nim (in tabella *3*)
- il risultato sia nullo.

Somma Nim:	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabella 3 – Somma Nim

Si può osservare che la posizione iniziale da noi considerata, $(1, 3, 5, 7)$, ha somma-Nim nulla (come mostrato in tabella 4), e da una posizione di questo tipo il primo giocatore può ottenere solo posizioni con somma-Nim non nulla. Per tale motivo il secondo giocatore, se conosce questa strategia, risulterà sempre vincitore.

1	→			1
2	→		1	1
5	→	1	0	1
7	→	1	1	1
	Somma Nim:	**0**	**0**	**0**

Tabella 4 – Conversione in codice binario dei valori contenuti nella posizione iniziale e somma Nim in colonna

Il numero di colonne e di fiammiferi della posizione iniziale può essere modificato, verificando che la somma-Nim sia nulla per assicurare la vittoria al secondo giocatore.

Scheda 5

Regole e Strategia

Sia data una scala composta di 5 gradini con 9 monete poste su alcuni di questi, come mostrato in figura. Ogni mossa consiste nello spostare un certo numero di monete a scelta, da un minimo di uno fino a tutta la pila, da un gradino a quello immediatamente sottostante. Quando le monete giungono a terra vengono eliminate dal gioco. Il gioco termina quando tutte le monete raggiungono il suolo e vince chi sposta l'ultima moneta. All'inizio di ogni turno è possibile rappresentare la posizione delle pedine con un vettore $(a_{1,}, a_2, a_3, a_4, a_5)$, in cui a_i è il numero di monete impilate sul i-esimo gradino, considerando il suolo come il gradino n° 0. Nell'esempio in figura la posizione iniziale è data da $(3, 2, 1, 1, 2)$. La strategia vincente consiste nel considerare la terna $(a_{1,}, a_3, a_5)$ come una posizione del gioco del Nim (dunque prendendo in esame il numero di monete impilate solo sui gradini dispari), e quindi applicare la sua strategia vincente sulla terna ottenuta. Nel nostro esempio verrà considerato (3, 1, 2), ed è semplice osservare che, una volta convertiti i valori in codice binario, la loro somma-Nim in colonna sarà nulla, quindi la strategia sarà vincente per il secondo giocatore.

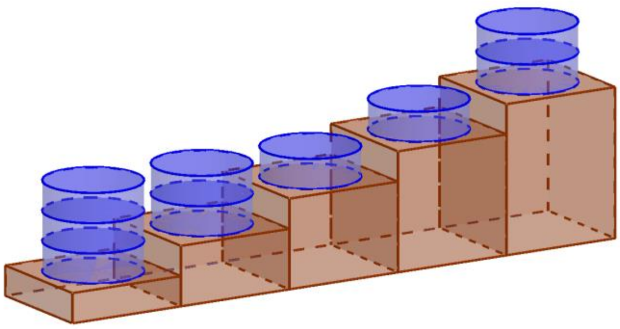


Figura 2 – Rappresentazione posizione iniziale Gioco del Nim a scala

Consegna

Dopo aver letto le regole e la strategia del Nim a scala, verificatene l'effettiva comprensione sfidandovi a coppie in questo gioco. Preparate una presentazione di circa cinque minuti per spiegare ai compagni il gioco del Nim a scala. Provate infine a proporre alcuni esempi di posizioni iniziali in modo tale che la strategia vincente diventi a favore del primo giocatore. Avrete la possibilità di variare il numero di gradini e il numero di monete in gioco.

Scheda 6

Dopo aver rappresentato una scala di 5 gradini con altrettante colonne di monete che ne contengono rispettivamente $4, 1, 1, 1$ e 2, ossia una posizione iniziale del tipo $(4, 1, 1, 1, 2)$, il gruppo scrive:

> *"Un esempio per il primo giocatore è* [questo] *perché la somma dei numeri binari delle colonne* <u>*non è nulla*</u> *e io (primo giocatore) posso spostare le pedine in modo tale che risulti sempre un numero nullo per il secondo giocatore."*

In effetti trasformando in codice binario i numeri contenuti nel vettore $(a_{1,}, a_3, a_5)$, che in tal caso è $(4, 1, 2)$, e applicando la somma-Nim in colonna si ottiene un risultato non nullo, come mostrato in tabella 5.

4	→	1	0	0
1	→			1
2	→		1	0
	Somma Nim:	**1**	**1**	**1**

Tabella 4 – Conversione in codice binario dei valori contenuti nel vettore $(\boldsymbol{a_{1,}}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_5})$ e somma Nim in colonna

Received October 10, 2017
Revision received November 11, 2017/November 14, 2017
Accepted December 30, 2017

“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 394-411 – ISSN 2038-1034

Quadrilateri in un ambiente di Geometria dinamica: un’esperienza didattica per supportare abilità visuo-spaziali

Elisa Miragliotta

Abstract – *This paper describes a teaching experience aimed at facilitating processes of visualization and prediction using a Dynamic Geometry Environment. It is part of a wider research effort to build a theoretical framework to be leveraged for the investigation of the role played by some visuo-spatial abilities in learning Euclidean Geometry. Firstly, the paper frames the investigation work within the international research scenario, by quickly outlining the relevant theoretical framework and by mentioning results of the latest studies on spatial reasoning and visualization. Then, it focuses on the teaching activities performed, describing both content and underlying hypothesis and emphasizing the crucial role played by the Dynamic Geometry Environment. Finally, it briefly presents the results of a preliminary pilot test and outlines future directions of research in this field.*

Riassunto – *In questo lavoro descriveremo un’esperienza didattica volta a favorire processi di visualizzazione e previsione, implementata in un ambiente di geometria dinamica. Essa fa parte di una ricerca più ampia, volta alla costruzione di un quadro teorico utile per indagare il ruolo di alcune abilità cognitive di natura visuo-spaziale nell’apprendimento della geometria euclidea. L’articolo inquadrerà l’indagine nello scenario internazionale, citando i risultati più recenti delle ricerche sul pensiero spaziale e la visualizzazione e descrivendo brevemente il quadro teorico. Successivamente si concentrerà sulle attività didattiche, descrivendone contenuto e ipotesi fondanti e sottolineando il ruolo cruciale dato all’ambiente di geometria dinamica. Infine, si accennerà ai risultati i un primo studio pilota e alle prospettive di ricerca future.*

Keywords – visualization, geometry, visuo-spatial abilities, quadrilaterals, dynamic geometric environment

Parole chiave – visualizzazione, geometria, abilità visuo-spaziali, quadrilateri, ambiente di geometria dinamica

Elisa Miragliotta è studentessa di Dottorato in Matematica all’interno del programma di dottorato consortile delle Università di Modena-Reggio Emilia, Ferrara e Parma. I suoi interessi di ricerca si inseriscono nell’ambito della Didattica della Matematica e nello specifico al legame tra le abilità cognitive di natura spaziale e l’apprendimento della geometria, con particolare attenzione per l’apprendimento degli studenti con bisogni educativi speciali. Tra le pubblicazioni: *Visuo-spatial abilities and geometry: a first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization* (Miragliotta e Baccaglini-Frank, 2017).

1. Introduzione: ricerca internazionale/inquadramento o contesto teorico della ricerca

La *visualizzazione* e il *pensiero spaziale* (*spatial reasoning*) sono temi di ricerca condivisi da diverse discipline. Storicamente gran parte della ricerca sullo sviluppo dei concetti geometrici e del pensiero spaziale si colloca nel dominio della Psicologia ed è sovente legata al costrutto chiamato *mental imagery.* Con l’avvento della Psicologia cognitiva e delle Neuroscienze contemporanee, la comunità scientifica ha elaborato un modello che descrive le componenti che intervengono nel processo immaginativo e ha collezionato un elenco di abilità cognitive coinvolte in tale processo (Cornoldi e Vecchi, 2004), chiamate *abilità visuo-spaziali*.

Oggi il ruolo della visualizzazione e del pensiero spaziale nella risoluzione di compiti matematici è largamente riconosciuto (es. Giaquinto, 2007; Duval, 1998). Secondo Hadamard (1944) il modo di pensare matematico è essenzialmente di natura spaziale. Inoltre, studi in cui sono stati intervistati matematici (es. Sfard, 1994) mettono in luce come questi si affidino fortemente all'immaginazione. Secondo Wheatley (1997), le immagini hanno un ruolo centrale nel ragionamento matematico, tanto da affermare che gli studenti che le utilizzano nel loro ragionamento risolvono problemi non routinari più efficacemente rispetto chi adopera un approccio procedurale. Tuttavia, solo a partire dagli anni ’80 del secolo scorso la visualizzazione e i processi ad essa collegati sono diventati oggetto di indagine della ricerca in Didattica della Matematica. Traendo le mosse dal lavoro fondativo di Alan Bishop (1980), che ha teorizzato due abilità spaziali diverse che intervengono nei processi di visualizzazione nel dominio specifico della matematica, Norma Presmeg (1986) ha dato un contributo sostanziale alla ricerca, classificando le diverse strategie immaginative utilizzate sia dagli insegnanti di matematica che dagli studenti. Inoltre, i suoi studi hanno intercettato un filone di ricerca volto a declinare le caratteristiche di due tipi di solutori: *visualizers* e *non-visualizers* (Presmeg, 2006). Tali studi sono stati influenzati dal lavoro di Krutetskii (1976), il quale distingue tre tipi di pensiero matematico sulla base della dominanza della componente logico-verbale o visivo-figurale: *analitico*, *geometrico* e *armonico*. Più tardi, le ricerche di Presmeg hanno informato il lavoro di Owens (1999), incentrato sulla classificazione delle strategie immaginative utilizzate dagli studenti nel dominio specifico della geometria. Infatti, sebbene il pensiero spaziale sia utile e utilizzato in diversi campi della matematica, sicuramente interviene notevolmente nei processi di risoluzione di compiti geometrici e, per estensione, nell’insegnamento-apprendimento della geometria. Questo ambito di ricerca è stato esplorato da studi volti a sviluppare costrutti teorici, utili per comprendere come gli studenti percepiscono le figure geometriche e progrediscono nell’apprendimento della geometria (Fischbein, 1993; Mariotti, 1996; Battista, 2007).

Recentemente l’interesse di ricerca sul pensiero spaziale è cresciuto in parte perché ne è stato riconosciuto il ruolo importante all’interno degli studi e carriere che coinvolgono le STEM (science, technology, engineering, math) (es. Wai, Lubinski, e Benbow, 2009). Gli studi (es. Newcombe, 2010) hanno richiamato l'attenzione sull'impatto positivo dello sviluppo precoce delle abilità spaziali sullo sviluppo matematico a tutti i livelli scolari. Da un lato le ricerche in Psicologia mostrano come persone con buone abilità spaziali tendono a manifestare buone prestazioni matematiche; dall’altro, spesso scarse abilità spaziali influenzano negativamente i progressi in matematica degli studenti (Clements e Sarama, 2011). Un ulteriore impulso alla ricerca è derivato dalla crescente evidenza che il pensiero spaziale e le competenze correlate sono malleabili a qualsiasi età, sviluppabili fin dall’infanzia e modificabili nel tempo, anche nel contesto scolastico attraverso una varietà di attività geometriche svolte da insegnanti (Mulligan e Mitchelmore, 2013; Bruce e Hawes, 2015; Candeloro, Del Zozzo, Bettini, Poli e Baccaglini-Frank, 2015) e che le competenze associate sono fortemente correlate non solo al successo nelle STEM, ma in tutti i settori (Newcombe, 2010; Uttal *et al.*, 2013).

Dall'analisi della letteratura recente, emergono alcuni punti di interesse per la ricerca in Didattica della Matematica. Da un lato l'importanza di promuovere lo sviluppo di abilità cognitive di natura spaziale, che possono rivelarsi utili non solo in ambito scolastico e accademico, ma anche nella vita di tutti i giorni (si pensi a quante operazioni spaziali compiamo mentalmente quando dobbiamo orientarci utilizzando la cartina di una città). Dall'altro, emerge la possibilità di modificare tali abilità anche nell'ambito scolastico, attraverso attività mirate di risoluzione di compiti geometrici. Tuttavia, per un insegnante di Matematica può essere difficile tradurre, nell'ambito dell'apprendimento della disciplina matematica e nella propria prassi didattica, i costrutti sviluppati dalla Psicologia. Spesso tali costrutti sembrano dare poca rilevanza alla componente concettuale che è insita nella risoluzione di compiti geometrici e fondamentale nella cognizione geometrica.

Proprio a partire da quest'ultima istanza più pragmatica ha preso le mosse il lavoro di ricerca in cui si inserisce questo articolo. Si è indagata la possibilità di tradurre nell'ambito dell'apprendimento della geometria euclidea piana alcune delle abilità visuo-spaziali già classificate dalla letteratura e a nostro parere maggiormente coinvolte nella risoluzione di compiti geometrici, utilizzando costrutti sviluppati dalla ricerca in Didattica della Matematica. Il quadro teorico che ne è derivato ha rappresentato uno strumento utile per guidare l'elaborazione sia di un test per valutare le abilità degli studenti nella risoluzione di compiti geometrici ad alto potenziale visuo-spaziale, sia di un intervento didattico volto a sperimentare la possibilità di modificare le abilità scelte, attraverso la risoluzione di compiti geometrici in un ambiente di geometria dinamica. Inoltre, ha fornito una lente teorica per leggere a priori e posteriori i comportamenti degli studenti, durante la risoluzione del test e dei problemi posti nel corso dell'attività didattica.

In questo articolo ci si concentrerà in particolar modo sul contenuto dell'intervento didattico, esplicitando le ipotesi che hanno guidato l'elaborazione dei quesiti e sottolineando quale ruolo cruciale si sia dato all'ambiente di geometria dinamica (AGD)[1].

2. Costruzione del quadro teorico

Secondo gli studi in Psicologia cognitiva, la generazione ed elaborazione di immagini mentali avviene all'interno di un complesso processo di acquisizione e uso di competenze, tra le quali abilità cognitive chiamate *abilità visuo-spaziali*. Tali abilità intervengono in tutte le fasi del

[1] Per i dettagli relativi alla composizione del test e alla trasposizione delle abilità visuo-spaziali si rimanda rispettivamente a Miragliotta, 2016 e a Miragliotta, Baccaglini-Frank e Tomasi, 2017, in cui si descrive il lavoro di tesi, realizzato nel 2016 sotto la supervisione della prof.ssa Anna Baccaglini-Frank e del prof. Luigi Tomasi. Per un esempio riguardante l'utilizzo della lente teorica per leggere le produzioni degli studenti si rimanda a Miragliotta e Baccaglini-Frank, 2017.

processo immaginativo[2]: a partire dalla generazione dell'immagine, passando per il suo mantenimento nel *taccuino visuo-spaziale* e alla sua manipolazione (ad esempio per rotazione), fino alla comunicazione verbale o scritta. Ad oggi la comunità scientifica non è pervenuta ad una definizione condivisa di tali abilità, tuttavia la letteratura ne offre una classificazione (es. Cornoldi e Vecchi, 2004, p. 16). Nella trasposizione delle abilità visuo-spaziali nell'ambito del ragionamento geometrico nel particolare dominio della geometria euclidea, abbiamo operato mantenendo invariata la classificazione delle abilità visuo-spaziali e scegliendone alcune, a nostro parere maggiormente coinvolte nella risoluzione di compiti geometrici:

– Organizzazione visiva;
– Scansione visiva;
– Abilità visiva ricostruttiva;
– Abilità di generare immagini;
– Abilità di manipolare immagini;
– Memoria a breve termine spaziale sequenziale;
– Memoria spaziale a lungo termine.

Inoltre, quando un solutore risolve un problema geometrico, egli può interagire con immagini visive o mentali in modi diversi, sollecitando alcune delle abilità sopra elencate. Un processo che sembra verificarsi spesso è immaginare la conseguenza delle manipolazioni (mentali) su una figura. Tale processo può avvenire grazie alla combinazione di alcune abilità visuo-spaziali, ma spesso accade in maniera così istantanea e automatica da consentire di identificarlo come un'abilità a sé stante. Abbiamo parlato in questi casi di *previsione geometrica*, intendendo il prodotto di un processo di visualizzazione avente come scopo l'individuazione di proprietà o configurazioni particolari di una figura. Tale costrutto teorico appare coerente con i costrutti di *immagine anticipatoria* (Piaget e Inhelder, 1966) e di *schemi anticipatori* (Neisser, 1976), che suggeriscono l'esistenza nell'individuo di una sorta di capacità di previsione, che orienta sia la percezione sia l'immaginazione, in presenza di uno scopo preciso.

La trasposizione nell'ambito del dominio del pensiero geometrico rappresenta un tentativo di dialogo tra costrutti teorici elaborati in settori disciplinari diversi, ma legati dall'interesse per temi di ricerca comuni, al fine di elaborare uno strumento utile sia per le indagini del ricercatore in Didattica della matematica che per la pratica didattica dell'insegnante di matematica.

Nel dominio dell'insegnamento-apprendimento della geometria la *Teoria dei concetti figurali* spiega quale sia la peculiarità delle figure geometriche che le distingue, dal punto di vista psicologico, sia dai meri concetti che dalle immagini: esse rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurali (Fischbein, 1993). Infatti, "The objects to which we refer – points, sides, angles and the operations with them – have only an ideal existence. They are of a conceptual nature. At the same time, they have an intrinsic figural nature: only while referring to images one may consider operations like detaching, re-

[2] Per un approfondimento sulle componenti del processo immaginativo si veda: Mammarella, Pazzaglia e Cornoldi, 2008 e Guarnera, Castellano e Di Nuovo, 2013.

versing or superposing. As a matter of fact, the triangle to which we refer and its elements cannot be considered either pure concepts or mere common images" (*ibidem*, p. 140).

L'entità mentale, che si aggiunge alle immagini e ai concetti nel caso particolare del pensiero geometrico e che possiede simultaneamente proprietà concettuali e figurali, viene chiamata da Fischbein *concetto figurale*. Le due componenti possono essere in conflitto nel corso dell'evoluzione del pensiero geometrico, ma si armonizzano quando si raggiunge la costruzione del concetto figurale: un'entità figurale-concettuale complessa, nella quale la sintesi tra le due componenti tende ad essere perfetta e i vincoli formali diventano rigorosamente dominanti, ma non esclusivi (Mariotti, 1996). Tale armonia non rappresenta una conquista spontanea, ma dipende dall'intervento didattico dell'insegnante (Mariotti e Fischbein, 1997).

Dunque, sembra emergere l'importanza degli aspetti teorici nella capacità di dominare le proprietà di una figura geometrica e modificare la componente figurale coerentemente con i vincoli formali imposti dalla sua componente concettuale. La nostra ipotesi è che, rendendo più efficace e stabile il *controllo teorico* (Mariotti, 1996) che uno studente riesce ad esercitare sulle figure geometriche, egli possa dominarne meglio le proprietà durante una manipolazione o trasformazione (anche mentale) e che in tal modo sia possibile influire su competenze di natura visuo-spaziale. In altre parole, avanziamo l'ipotesi che un controllo teorico fine sulle figure possa sostenere le abilità cognitive di natura visuo-spaziale, coinvolte nella risoluzione di compiti geometrici.

3. Il ruolo dell'Ambiente di Geometria Dinamica

Per esplorare la nostra ipotesi abbiamo messo a punto e realizzato un ciclo di attività didattiche in una classe I di un Liceo Scientifico opzione Scienze Applicate del nord Italia. L'attività è ha avuto inizio ad ottobre con la conoscenza degli allievi e si è conclusa a dicembre con l'ultimo test. L'intervento didattico ha per oggetto alcuni quadrilateri e le loro proprietà ed è stato implementato nell'ambiente di geometria dinamica *GeoGebra*.

La scelta di collocarsi in un AGD è sostenta da diversi studi a sostegno dell'efficacia dell'utilizzo di contesti di tal sorta nel favorire lo sviluppo di modi di pensare matematici (es. Laborde e Strässer, 1990; Hadas, Hershkowitz e Schwarz, 2000; Mariotti, 2005; Baccaglini-Frank, 2010, 2012; Leung, Baccaglini-Frank e Mariotti, 2013; Antonini e Baccaglini-Frank, 2015).

Ricerche recenti hanno mostrato come le tecnologie digitali che promuovono interazioni visive e cinetiche possano aiutare l'insegnamento-apprendimento della geometria (es. Battista 2007; Bruce et al. 2011; Clements e Sarama, 2011). Grazie alla possibilità di trasformare le figure senza modificarne le proprietà di costruzione, gli AGD mostrano almeno due vantaggi: aiutano gli studenti a vedere e costruire una vasta gamma di esempi di figure geometriche; aiutano gli studenti ad apprezzare alcuni aspetti delle relazioni inclusive, perché ad esempio è possibile trasformare un certo parallelogramma in un rettangolo (Sinclair e Bruce, 2015). Attraverso costruzioni passo a passo (come faremmo su carta con riga e compasso), software di questo tipo consentono di costruire figure geometriche che hanno la caratteristica di essere dinamiche. Infatti, è possibile trascinarne un elemento (es. i punti) mantenendo invariate tutte le proprietà determinate dalle relazioni geometriche che, per mezzo dei comandi del software, l'utente ha deciso di conferire alla figura e tutte le proprietà che sono loro conseguenza logica all'interno della teoria della geometria euclidea (Laborde e Strässer, 1990). Il *trascinamento* o *dragging* è una delle modalità di interazione con le figure dinamiche e consiste nel selezionare con il mouse un elemento di una figura dinamica e muoverlo sullo schermo.

Il dinamismo e la coerenza logica che mantengono le figure dinamiche consentono di osservare gli *invarianti* di una figura ovvero le proprietà che essa assume in maniera stabile durante il trascinamento e le proprietà indotte con il trascinamento, ove mai esso segua opportune traiettorie (Antonini e Baccaglini-Frank, 2015). La percezione di *invarianti per trascinamento* può facilitare il riconoscimento e la definizione di un quadrilatero non tanto sulla base della sua componente figurale, quanto sulla base delle proprietà che lo definiscono (componente concettuale), e prevedere se e in quali condizioni sia possibile trasformarlo in un altro quadrilatero. A nostro parere, operare in un AGD potrebbe favorire l'armonizzazione tra la componente figurale e la componente concettuale delle figure geometriche.

4. Descrizione dell'attività didattica

La trasposizione in ambito geometrico della abilità visuo-spaziali è stato uno strumento utile per guidare l'elaborazione dei quesiti inclusi nell'intervento didattico. Ogni consegna è stata costruita sulla base dell'abilità o della combinazione di abilità sollecitate secondo la nostra analisi a priori.

Insieme al trascinamento e alla percezione di invarianti per trascinamento, di cui abbiamo parlato nel precedente paragrafo, nella costruzione dell'intervento didattico abbiamo sfruttato altri due costrutti, elaborati dalla letteratura e peculiari degli ambienti di geometria dinamica: la differenza tra punti *base* e punti *dipendenti* (Antonini e Baccaglini-Frank, 2015), la differenza tra costruzioni *stabili* e *instabili* (Baccaglini-Frank, 2012). Poiché le figure dinamiche mantengono invariate le proprietà di costruzione, è possibile distinguerne i punti in base al loro grado di libertà sul piano dello schermo:

– liberi di muoversi ovunque nel piano;
– vincolati ad altri oggetti geometrici (punto su un oggetto);
– punti che non è possibile muovere attraverso un trascinamento diretto.

Chiameremo i primi *punti base*, cioè costruiti come nuovi punti sullo schermo; gli altri due punti *dipendenti*, cioè costruiti a partire da altri elementi con cui sono in relazione. Inoltre, se un processo di costruzione geometrica conferisce alla figura dinamica le proprietà sufficienti per essere un particolare tipo di quadrilatero, tale figura dinamica sarà una rappresentazione *stabile* di quel quadrilatero. Le figure dinamiche che rappresentano in modo stabile un quadrato, per esempio, possono derivare da diverse procedure di costruzione. Nel seguito, chiameremo *stabile* o *robusta* una figura dinamica che mantiene le proprietà che la caratterizzano, quando uno qualsiasi dei suoi punti base viene trascinato. Altrimenti diremo la figura *instabile*.

Durante l'attività didattica guidata dallo sperimentatore, gli studenti hanno lavorato in coppie, formate sulla base dei risultati del pre-test, appaiando studenti con prestazioni analoghe. L'intervento ha coinvolto 8 studenti, scelti tra quelli della classe che hanno mostrato le prestazioni più basse nel pre-test, e si è svolto in 5 incontri della durata di 2 ore circa ciascuno. L'argomento curricolare scelto riguarda l'esplorazione delle proprietà di alcuni quadrilateri ed è stato affrontato in una classe prima durante il primo quadrimestre. Sebbene tale argomento venga solitamente affrontato durante il secondo quadrimestre, ci sembra ragionevole supporre che, nei precedenti livelli scolari, gli studenti abbiano già incontrato tali figure e ne conoscano alcune proprietà. L'argomento e le modalità di intervento si inseriscono pienamente nei suggerimenti contenuti nelle *Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici con opzione Scienze Applicate* (MIUR, 2010). Infatti, nella sezione del documento dedicata alla geometria, si legge che: *Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica… Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti. Inoltre studierà le proprietà fondamentali della circonferenza. La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.*

Attività	**Contenuto**
Attività 1	– Esplorazione e previsione con configurazioni semplici – Introduzione alla differenza tra punti *base* e punti *dipendenti*
Attività 2	– Introduzione al trascinamento – Differenza tra costruzioni *stabili* e *instabili*
Attività 3	– Esplorazione delle proprietà del quadrato – Carta d'identità del quadrato
Attività 4	– Esplorazione delle proprietà del parallelogramma – Carta d'identità del parallelogramma
Attività 5	– Esplorazione delle proprietà del rombo – Carta d'identità del rombo

Tabella 1 – Sintesi del contenuto dell'attività didattica

Gli incontri hanno seguito lo schema riportato in Tabella 1. Le attività sono state guidate dallo sperimentatore attraverso un'intervista contenente il canovaccio di una serie di quesiti e lasciando piena libertà di approfondire aspetti emersi dallo scambio tra gli studenti non previsti a priori. La modalità di svolgimento è stata descritta agli studenti, dicendo loro che avrebbero avuto libertà di confrontarsi sulle risposte, che sarebbe stato possibile essere in disaccordo e che alla fine avrebbero dovuto dare ciascuno una propria risposta. Prima di iniziare si sono illustrati i comandi base della barra delle funzioni di *GeoGebra* e si è lasciato del tempo ad ogni coppia per esplorare liberamente il software. Infatti, la maggior parte degli studenti non aveva mai svolto lezioni o risolto problemi in questo ambiente.

In riferimento alla Tabella 1, vediamo che lo scopo della prima parte dell'*Attività 1* è realizzare esplorazioni e previsioni con configurazioni geometriche abbastanza semplici. A tale fine, si chiede agli studenti di disegnare una retta e un punto *A* nel piano dello schermo e di dire se, trascinandolo, il punto *A* può muoversi ovunque. Si chiede, poi, di costruire un punto *B* sulla retta e di prevederne i movimenti. Dopo aver trascinato anche il punto *B* e trovato conferma o smentita della propria previsione, si chiede di esplicitare le differenze osservate tra i due punti. Si ripete l'esperienza con una circonferenza. Grazie a questo quesito gli studenti possono osservare come si comportino diversamente i punti costruiti sul piano e i punti costruiti su altri enti geometrici. Per introdurre la differenza tra punti base e punti dipendenti si chiede di disegnare in sequenza: prima due punti e poi una retta passante per essi; prima una retta e poi due punti su di essa. Dopo la costruzione si chiede agli studenti di prevedere il movimento dei punti e delle rette.

La seconda attività si concentra sul trascinamento e sulla costruzione delle figure. Si chiede di costruire liberamente un quadrato, di descrivere le proprie azioni e, a costruzione ultimata, muoverne i vertici e dire se il quadrato resta tale. Ci si aspetta che le costruzioni degli studenti non producano subito quadrati stabili. Attraverso questa esperienza può emergere il legame tra le relazioni tra gli enti geometrici che compongono una figura (gli aspetti concettuali) e le caratteristiche che essa manifesta a livello figurale. A rinforzo di questa idea il protocollo prevede un quesito in cui si chiede di eseguire una costruzione passo a passo, prevedere quali proprietà la figura costruita (che è un quadrato) manterrà durante il trascinamento e confrontare questa costruzione stabile con la propria instabile.

In generale, le attività sono state costruite in modo tale da promuovere il riconoscimento di proprietà geometriche invarianti, relazioni tra queste e processi di previsione, in un AGD. Possiamo classificare i quesiti in 3 categorie, che nel seguito descriveremo:
– problemi aperti di congettura;
– esplorazione e scoperta delle proprietà dei quadrilateri;
– problemi di costruzione.

Per *problema aperto di congettura in un AGD* intendiamo un tipo di quesito ampiamente studiato in letteratura (es. Antonini e Baccaglini-Frank, 2015), formulato in modo tale che lo studente si trovi in una situazione in cui non ha istruzioni precise da seguire, ma è libero di esplorare il problema e trarre le proprie conclusioni. "In un AGD un problema aperto di congettura spesso prende la forma di una richiesta generica di un enunciato sulle relazioni tra gli elementi della configurazione o tra le proprietà della configurazione. Le domande sono generalmente espresse nella forma "quale configurazione assume… quando…?", "Che relazione riesci a scoprire tra… e…?", "In quali tipi di figura può…essere trasformato?" (*ibidem*, p. 259).

Mostriamo e commentiamo di seguito un esempio di attività, tra quelle proposte durante la sperimentazione didattica, che include anche questo tipo di problema. L'estratto appartiene all'*Attività 2*. Accanto ad ogni consegna, tra parentesi, si trovano esplicitate le abilità visuo-spaziali che ci si aspetta vengano sollecitate dal compito.

Trascinamento 4

Esegui la seguente costruzione passo a passo:

- tre punti A, B e C;
- segmento BC;
- retta passante per A e parallela al segmento BC;
- punto D sulla retta;
- segmento AB;
- segmento DC.
-

<u>Facciamo una previsione</u>: osserva il quadrilatero ottenuto (*Scansione visiva*)

a) immagina di trascinarne i punti, quali punti ti aspetti si possano muovere liberamente, quali ti aspetti possano muoversi solo in direzioni particolari, quali pensi non possano muoversi affatto? (*Abilità di manipolare immagini con Previsione geometrica*)

b) credi si possa ottenere un trapezio isoscele? (*Abilità di generare immagini con Previsione geometrica - Memoria spaziale a lungo termine*)
Muovendo quali vertici e in che modo? (*Abilità di manipolare immagini con Previsione geometrica*)

c) credi si possa ottenere un trapezio rettangolo? (*Abilità di generare immagini con Previsione geometrica - Memoria spaziale a lungo termine*)
Muovendo quali vertici e in che modo? (*Abilità di manipolare immagini con Previsione geometrica*)

d) Muovi i vertici del quadrilatero che hai costruito:

- riesci ad ottenere un trapezio isoscele?
- riesci ad ottenere un trapezio rettangolo?

Possiamo osservare che il problema si compone di tre parti. Prima di tutto si chiede di eseguire una costruzione passo a passo in *GeoGebra*, per ottenere un quadrilatero (Figura 1). Ultimata la costruzione, si chiede di fare delle previsioni a figura ferma sulla natura dei punti (base o dipendenti) e sulle possibili proprietà aggiuntive da conferire alla figura al fine di trasformarla in un altro quadrilatero. In altri quesiti dell'*Attività 2* si è chiesto "Descrivi il quadrilatero che hai ottenuto" oppure "Quali quadrilateri può diventare?". In questa fase gli studenti sono sollecitati a manipolare mentalmente l'immagine, tenendo conto dei vincoli geometrici indotti dallo specifico protocollo di costruzione eseguito e, dunque, di compiere quella che abbiamo chiamato *previsione geometrica*. Tale previsione potrà essere coerente o meno con le premesse formali, per questo motivo l'ultima parte del quesito riveste un ruolo importante dal punto di vista didattico. Infatti, al termine dell'esplorazione a figura ferma, si chiede di trascinare con il mouse i vertici del quadrilatero, coerentemente con la strategia dichiarata nelle precedenti risposte, e di scoprire se la propria previsione è realizzabile oppure no.

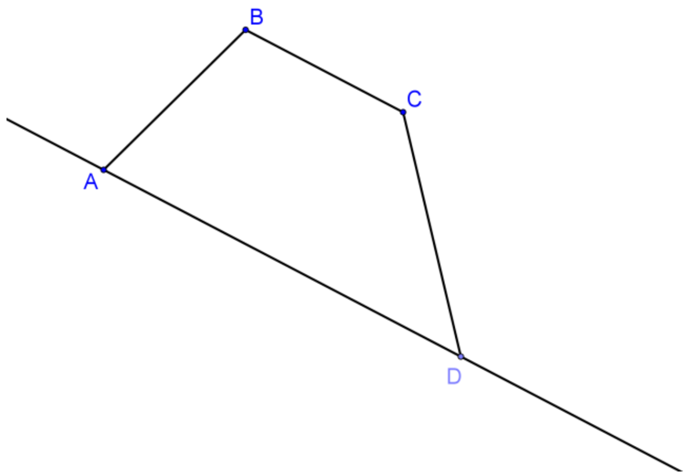


Figura 1 – Figura ottenuta dalla costruzione passo a passo proposta dal quesito "Trascinamento 4"

Di seguito proponiamo una breve analisi a priori del quesito, evidenziando le abilità coinvolte. Il quesito (4a) dovrebbe sollecitare l'*Abilità di manipolare immagini*, in quanto per rispondere correttamente sembra necessario che il solutore riconosca che: la figura è stata costruita a partire dai punti A, B e C, che dunque sono punti base; il punto D è stato costruito sulla retta parallela al segmento BC e dunque è vincolato. I quesiti (4b) e (4c) dovrebbero sollecitare la *Scansione visiva*, in quanto sembra necessario osservare il quadrilatero ottenuto dalla costruzione passo a passo, al fine di riconoscerne le proprietà. Le proprietà che il solutore può osservare dipendono dalla posizione reciproca, più o meno generale, dei punti A, B, C, D che ha scelto. La proprietà che è riconoscibile, indipendentemente da tale posizione, è il parallelismo tra i lati BC e AD del quadrilatero. Il quesito potrebbe coinvolgere anche l'*Abilità di generare immagini* e la *Memoria spaziale a lungo termine* per richiamare il prototipo di trapezio isoscele (rispettivamente di trapezio rettangolo). La *Scansione visiva* potrebbe guidare il solutore a riconoscere le proprietà comuni al quadrilatero sullo schermo e al trapezio isoscele (rispettivamente al trapezio rettangolo), per concludere che è possibile ottenere quest'ultimo a partire dal primo. L'*Abilità di manipolare immagini* dovrebbe consentire al solutore di scegliere quali vertici muovere, immaginandone il movimento, per rendere la figura sullo schermo un trapezio isoscele (rispettivamente un trapezio rettangolo), dotandola delle proprietà aggiuntive che quest'ultimo possiede. La consegna (4d) potrebbe aiutare il solutore a validare o correggere le proprie risposte.

Un problema come questo offre agli studenti la possibilità di cogliere il legame tra la configurazione che vedono sullo schermo (componente figurale) e le proprietà che la costruzione passo a passo ha conferito alla figura (componente concettuale).

La scoperta delle proprietà dei quadrilateri (quadrato, parallelogramma e rombo) è stata guidata da file *GeoGebra* già predisposti dallo sperimentatore, contenenti tre o quattro esempi di uno stesso quadrilatero stabile di cui lo studente può trascinare i vertici. Le figure sono costruite in modo tale che mantengano tutte le proprietà del quadrilatero di volta in volta esplorato, ma ne enfatizzino in particolare alcune su cui si desidera che lo studente focalizzi la propria attenzione. In Figura 2 abbiamo riportato un'immagine del file relativo all'esplorazione dei quadrati. Possiamo osservare che, durante il trascinamento con traccia attiva, il QUADRATO 1 mostra i lati tutti uguali, il QUADRATO 2 le diagonali perpendicolari, il QUADRATO 3 è inscrivibile in una circonferenza, il QUADRATO 4 ha gli angoli retti.

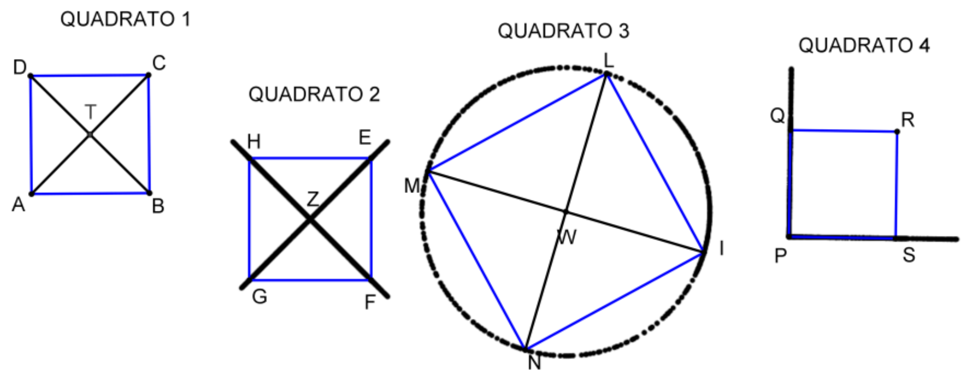
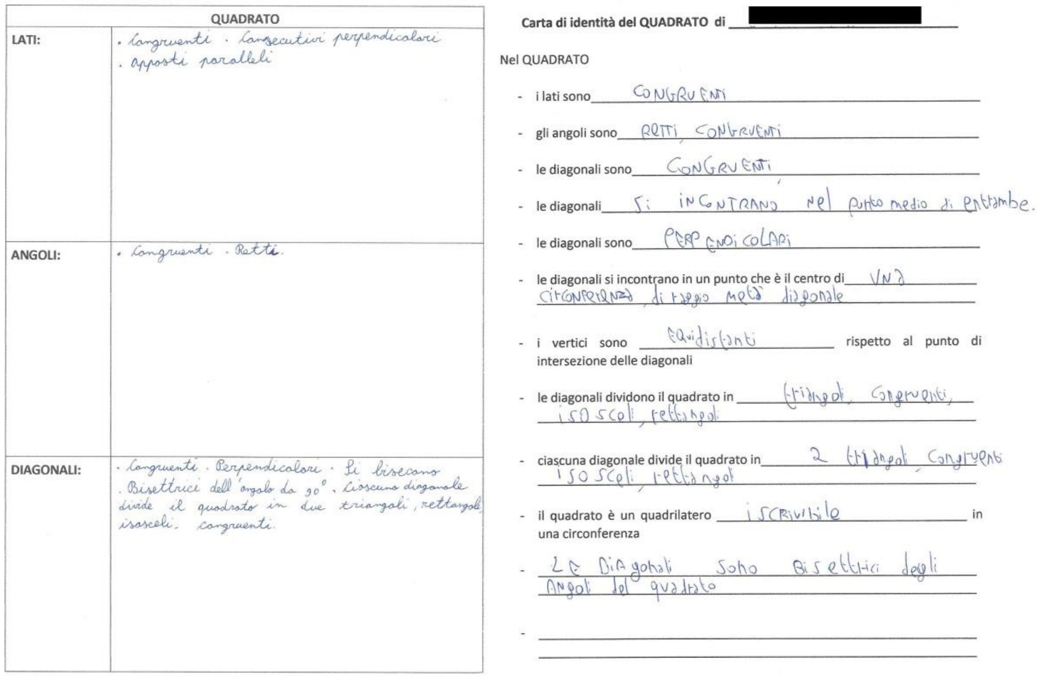


Figura 2 – Immagine tratta dal file GeoGebra di esplorazione dei quadrati

Una volta scoperte le proprietà dei quadrilateri, gli studenti le hanno formalizzate in una sorta di *Carta d'identità*, che raccoglie la lista delle proprietà riguardanti i lati, gli angoli e le diagonali del quadrilatero studiato. In Figura 3 abbiamo riportato l'elenco delle proprietà del quadrato osservate da uno studente per mezzo dell'esplorazione dei quadrati dinamici.



QUADRATO	
LATI:	. Congruenti . Consecutivi perpendicolari . Opposti paralleli
ANGOLI:	. Congruenti . Retti.
DIAGONALI:	. Congruenti . Perpendicolari . Si bisecano . Bisettrici dell'angolo da 90° . Ciascuna diagonale divide il quadrato in due triangoli, rettangoli isosceli, congruenti.

Carta di identità del QUADRATO di [redacted]

Nel QUADRATO

- i lati sono CONGRUENTI
- gli angoli sono RETTI, CONGRUENTI
- le diagonali sono CONGRUENTI
- le diagonali Si INCONTRANO nel punto medio di entrambe.
- le diagonali sono PERPENDICOLARI
- le diagonali si incontrano in un punto che è il centro di UNA CIRCONFERENZA di raggio metà diagonale
- i vertici sono equidistanti rispetto al punto di intersezione delle diagonali
- le diagonali dividono il quadrato in triangoli, congruenti, isosceli, rettangoli
- ciascuna diagonale divide il quadrato in 2 triangoli congruenti isosceli, rettangoli
- il quadrato è un quadrilatero iscrivibile in una circonferenza
- Le Diagonali sono Bisettrici degli Angoli del quadrato
-

Figura 3 – Foglio di appunti (a sinistra) e Carta d'identità del quadrato (a destra)

La *Carta d'identità* dei quadrilateri è stata un utile strumento per la risoluzione dei problemi di costruzione. Sebbene, contenga solo un elenco delle proprietà che gli studenti hanno osservato, riteniamo rappresenti un ulteriore stimolo al processo di armonizzazione tra componente concettuale e componente figurale che aiuti a superare l'interiorizzazione di rappresentazioni stereotipate a vantaggio di rappresentazioni coerenti con gli elementi teorici ad esse soggiacenti. Lo strumento ha aiutato gli studenti a richiamare le proprietà utili per realizzare costruzioni stabili di quadrilateri. Infatti, le tre attività (3, 4, e 5) di esplorazione delle proprietà dei quadrilateri si concludono con la richiesta di elaborare ed eseguire una costruzione stabile di un quadrilatero dello stesso tipo di quello già esplorato.

Nelle tre attività la richiesta è stata variata leggermente. Le riportiamo interamente:

Quadrato stabile 1
In GeoGebra provate a costruire un quadrato che resti tale.
Una volta ultimata la figura, provate a muovere i suoi vertici per controllare che il quadrato sia stabile.

Quadrato stabile 2
Costruite un segmento di estremi A e B.
Completate la costruzione affinché sia la costruzione di un quadrato stabile che abbia il segmento AB come diagonale.

Parallelogramma stabile
Studente 1:
- Scrivi la costruzione di un parallelogramma stabile.
- Una volta scritta chiedi al tuo compagno se crede sia stabile e perché.

Studente 2:
Esegui la costruzione in GeoGebra e verifica se la figura resta un parallelogramma.
L'attività si ripete per l'altro studente.

Rombo stabile
Completa la seguente costruzione passo a passo affinché sia la costruzione di un rombo stabile di lato AB:
- due rette parallele r ed s;
- punto A sulla retta r e punto B sulla retta s;
- segmento AB;
- …………
- …………

Apri il file GeoGebra *Rombo stabile* [in cui gli studenti troveranno la figura parziale ottenuta seguendo i primi passi di costruzione] ed esegui la costruzione che hai completato.
Prova a muovere i vertici per controllare che il rombo sia stabile.

Questo tipo di quesiti sembra sollecitare il recupero del proprio *prototipo* (Fischbein e Nachlieli, 1998, p. 1200) della figura geometrica richiesta, eventualmente ampliato e rivisitato dal solutore sulla base delle esplorazioni compiute. Nella soluzione del compito ci si aspetta che intervengano gli aspetti concettuali appresi durante l'esplorazione a scapito dell'abituale immagine stereotipata. Sia nella fase di elaborazione dei passi di costruzione che di validazione delle costruzioni altrui sembra intervenire fortemente la *previsione geometrica*, abbinata ad alcune abilità visuo-spaziali sia per immaginare gli enti geometrici coinvolti e le loro relazioni sia per visualizzare le figure parziali che si potrebbero ottenere aggiungendo un certo passo di costruzione.

5. Risultati preliminari

La sperimentazione didattica ha coinvolto 8 studenti scelti tra quelli della classe che hanno mostrato le prestazioni più basse nel pre-test. Dopo l'attività didattica al campione è stato somministrato lo stesso test e si è confrontato il numero di risposte corrette nei due test. Sebbene il campione sia troppo esiguo per considerazioni statistiche, dal punto di vista quantitativo, la sperimentazione ha dato buoni risultati: mediamente è stata riscontrata una variazione percentuale delle risposte corrette pari al 17% (con picchi del 28%) e un miglioramento generale delle prestazioni per tutti gli studenti.

L'analisi qualitativa dei dati è stata condotta confrontando le risposte degli studenti nel pre-test e nel post-test. Si è prestata attenzione ad alcuni aspetti specifici, quali: l'evoluzione del linguaggio e dei processi immaginativi; l'influenza dei significati situati, sviluppati durante l'intervento didattico, sull'esplorazione e sulla costruzione di figure geometriche; il ruolo dell'aspetto concettuale e dell'aspetto figurale delle figure geometriche.

Dal punto di vista sia cognitivo che didattico, l'analisi qualitativa e quantitativa dei dati ci consente di trarre alcune conclusioni che riportiamo molto sommariamente di seguito. Dopo l'attività in coppia, gli studenti sembrano maggiormente capaci di riconoscere figure mostrate in orientamenti inusuali o figure semplici all'interno di altre figure; sembrano utilizzare strategie immaginative più efficaci, producendo previsioni più coerenti alle premesse; riescono a compiere inferenze circa la costruzione geometrica di una figura dinamica; manifestano una percezione dei rapporti topologici più precisa; sembrano più abili nell'esplorare figure generate solo mentalmente e, in generale, più propensi alla visualizzazione; sembrano manifestare l'abilità di manipolare mentalmente una figura o una classe di figure, al fine di produrre una congettura o individuarne le proprietà invarianti; sembrano manifestare la capacità di denominare e classificare i quadrilateri solo sulla base delle proprietà di cui godono, piuttosto che per la coincidenza con un'immagine stereotipata; sembrano aver costruito significati situati durante le attività di potenziamento, che sembrano agevolarli nella manipolazione, generazione e mantenimento delle immagini mentali; sembrano aver ampliato la gamma di prototipi di quadrilateri depositati nella memoria a lungo termine; sembrano conoscere e saper utilizzare le proprietà dei quadrilateri per esplorarli e manipolarli; sembrano più abili nell'elaborare costruzioni passo a passo; sembrano capaci di riconoscere proprietà invarianti e di produrre congetture; usano in generale un lessico più preciso.

Globalmente, le attività di scoperta e formalizzazione delle proprietà e di manipolazione delle figure sembrano essersi rivelate utili per sviluppare negli studenti un maggiore controllo concettuale sulle figure, che sembra aver guidato, indirizzato e talvolta corretto le previsioni degli studenti.

6. Conclusioni e prospettive di ricerca

L'attività descritta in questo articolo fa parte di una sperimentazione didattica che rientra in uno studio più generale sulle abilità cognitive di natura visuo-spaziale coinvolte nella risoluzione di compiti geometrici. Lo studio si è mosso su due fronti: da un lato ha indagato la possibilità di interpretare alcune abilità visuo-spaziali, descritte nella letteratura della Psicologia cognitiva, nell'ambito dell'apprendimento matematico della geometria piana; dall'altro ha esplorato la possibilità di modificare particolari abilità visuo-spaziali, attraverso un intervento didattico che fa uso della geometria dinamica.

La costruzione del quadro teorico ha evidenziato alcune delle difficoltà epistemologiche insite nel far dialogare costrutti teorici e metodologie d'indagine appartenenti a discipline diverse, sebbene accomunate da interessi di ricerca spesso comuni. Ad oggi, infatti, la Didattica della Matematica e la Psicologia cognitiva non sono riuscite a costruire un contesto di ricerca comune per studiare i processi di visualizzazione ai quali sono entrambe interessate.

D'altra parte, il primo studio pilota, realizzato in una classe I di un Liceo Scientifico opzione Scienze applicate, ha mostrato risultati promettenti. Da un lato, l'analisi dei dati sembra confermare come il controllo teorico che gli studenti esercitano sulle figure (osservate o immaginate) influenzi le risposte ai compiti geometrici proposti durante l'intervento didattico. Dall'altro ha consentito di riscontrare nelle produzioni degli studenti istanze del costrutto teorico che abbiamo chiamato *previsione geometrica*, soprattutto nello stupore (scarso o notevole) manifestato dagli studenti di fronte a soluzioni attese o inattese dei quesiti. Dunque, sembra necessario formalizzare meglio le componenti di un nuovo costrutto teorico relativo ai processi di visualizzazione con scopo.

Attualmente stiamo lavorando dal punto di vista teorico per affinare la lente teorica utilizzata nello studio pilota, per renderla più utile ad individuare nelle produzioni degli studenti istanze di manipolazione e previsione geometrica.

Dal punto di vista pragmatico, l'intervento didattico sembra aver mostrato cambiamenti nell'approccio degli studenti a compiti geometrici ad alto potenziale visuo-spaziale. Sebbene l'intervento fosse rivolto ad un piccolo campione e la modalità fosse quella dell'intervista guidata dallo sperimentatore, riteniamo che possa essere facilmente adattato alla pratica scolastica di classe quotidiana in un ambiente di geometria dinamica.

7. Bibliografia

Antonini, S. e Baccaglini-Frank, A. (2015). Il trascinamento di mantenimento nella formulazione di congetture in ambienti di geometria dinamica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* 38 A-B.3, 257-278.

Baccaglini-Frank, A. (2010). Conjecturing in Dynamic Geometry: A Model for Conjecture-generation through Maintaining Dragging. *Doctoral dissertation*, University of New Hampshire, Durham, NH.

Baccaglini-Frank, A. (2012). Potenzialità Didattiche di Alcune Attività in Geometria Dinamica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *35B* N.1, 27-50.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 843-908.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education – A review. *Educational studies in mathematics*, *11*(3), 257-269.

Bruce, C., McPherson, R., Sabbati, M. e Flynn, T. (2011). Revealing significant learning moments with interactive whiteboards in mathematics. *Journal of Educational Computing Research, 45*(4), 433-454.

Bruce, C. D. e Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it?, *ZDM*, *47*(3), 331-343.

Candeloro, A., Del Zozzo, A., Bettini, P., Poli, F. e Baccaglini-Frank, A. (2015). Possibili effetti dell’apprendimento in geometria mediato da un software di geometria dinamica nella scuola secondaria di primo grado. Risultati del progetto “Muoviamo le proprietà geometriche”. *Difficoltà in Matematica, 12*(1), 29-47.

Clements, D. H. e Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 133-148.

Cornoldi, C. e Vecchi, T. (2004). *Visuo-spatial working memory and individual differences*. Hove (UK): Psychology Press.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study* (pp. 37–51). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics, 24*(2), 139-162.

Fischbein, E. e Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193-1211.

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics: An epistemological study.* New York: Oxford.

Guarnera, M. A., Castellano, S. e Di Nuovo, S. (2013). Mental imagery: un’antica e sempre attuale risorsa della mente. *Qi-Questioni e idee in psicologia 4*. Consultabile al sito: http://qi.hogrefe.it/rivista/mental-imagery-antica-e-sempre-attuale-risorsa-d/

Hadamard, J. (1944). *The psychology of mathematical invention*. NY: Dover Publications.

Hadas, N., Hershkowitz, R. e Schwarz, B. B. (2000). The Role of Contradiction and Uncertainty in Promoting the Need to Prove in Dynamic Geometry Environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2), 127-150.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Laborde, J. M. e Strässer, R. (1990). Cabri-Géomètre: A microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für didaktik der mathematik, 90*(5), 171-177.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A. e Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. In: *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 439-460.

Mammarella, I. C., Pazzaglia, F. e Cornoldi, C. (2008). Evidence for different components in children’s visuospatial working memory. *British Journal of Developmental Psychology, 26*(3), 337-355.

Mariotti, M. A. (1996). The interaction between images and concepts in geometrical reasoning. *Unpublished PhD dissertation*. *Università di Pisa and Tel Aviv University*.

Mariotti, M. A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*. Bologna: Pitagora Editrice.

Mariotti, M. A. e Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248.

Miragliotta, E. (2016). *Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali coinvolte: possibili effetti di un potenziamento con un software di geometria dinamica*. Tesi di Laurea Magistrale in Matematica. Relatori: L. Tomasi e A. Baccaglini-Frank.

Miragliotta, E. e Baccaglini-Frank, A. (2017). Visuo-spatial abilities and Geometry: a first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization. *Paper at TWG24 of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education, Dublin, 2017.*

Miragliotta, E., Baccaglini-Frank, A. e Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica (I parte)*. L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *40B*(3), 339-360.

MIUR (2010). *Indicazioni Nazionali 2010 per i licei scientifici con opzione scienze applicate*.

Mulligan, J. T. e Mitchelmore, M. C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. In L. English & J. Mulligan (Eds.). *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 29-45). Dordrecht: Springer Science-Business Media.

Neisser, U. (1976). *Cognition and reality: Principles and implications of cognitive psychology*. WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.

Newcombe, N. S. (2010). Picture this: increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator*, *34*(2), 29-43.

Owens, K. (1999). The role of visualization in young students' learning. In O. Zaslavsky (Ed.). *Proceedings of XXIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 250–264), Haifa, Israel.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1966). *The child's conception of space*. New York: W. W. Norton & Co.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational studies in mathematics*, *17*(3), 297-311.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 44-55.

Sinclair, N. e Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school, *ZDM*, *47*(3), 319-329.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C. e Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352-402.

Wai, J., Lubinski, D. e Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 817-835.

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed.). *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*. L. Erlbaum Associates, 281-297.

Received October 6, 2017
Revision received December 10, 2017/December 13, 2017
Accepted January 8, 2018