“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 372-393 – ISSN 2038-1034

I sistemi di numerazione: un’esperienza di apprendimento capovolto

Elena Lazzari

Abstract – *The contribution describes a flipped learning experience on number systems implemented in a first class of upper secondary school. The aim is to highlight the benefits and problems encountered by students, accustomed to a traditional education. To this purpose, we shall provide a detailed study of the educational design by analyzing the situations that came to be created, in order to arrive at more general reflections.*
.

Riassunto – *Questo contributo descrive un’esperienza di apprendimento capovolto, attuata in una classe prima di scuola secondaria di secondo grado, sul tema dei sistemi di numerazione. L’obiettivo è quello di evidenziare i benefici ottenuti e i problemi riscontrati dagli studenti, abituati ad un modello educativo tradizionale. Per farlo entreremo nel dettaglio del design didattico analizzando le situazioni che sono venute a crearsi, per giungere a riflessioni di carattere più generale.*

Keywords – flipped learning, active learning, skills, instructional design, number systems

Parole chiave – apprendimento capovolto, apprendimento attivo, competenze, design didattico, sistemi di numerazioni

Elena Lazzari, iscritta al XXXI ciclo di Dottorato di Ricerca presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell’Università degli Studi di Ferrara, ha svolto numerose collaborazioni con l’università, ricoprendo ruoli di Supporto alla Didattica e Tutor Piano Lauree Scientifiche. Il suo ambito di ricerca riguarda le metodologie didattiche innovative, come l’apprendimento capovolto, applicato all’insegnamento-apprendimento della matematica, con particolare interesse all’ambito dei fattori affettivi. La sua ultima pubblicazione si trova negli Atti del XX Convegno Nazionale GRIMeD, *Un’esperienza didattica di flipped teaching nell’insegnamento-apprendimento della matematica* (in “Quaderni GRIMeD”, n. 3. *Una feconda contraddizione – Didattica individualizzata vs didattica cooperativa? Il problema della valutazione all’incrocio tra le “due didattiche”*, 2017).

1. Introduzione

Leggendo i più recenti atti normativi, sia nazionali che internazionali, è possibile osservare come il concetto di competenza stia guadagnando una posizione centrate nel dibattito educativo, stimolando un ripensamento riguardo al ruolo e all’identità della scuola. Ci si riferisce in particolare alla sua capacità di aggiornarsi per aderire al cambiamento sociale in atto, all’apporto che può dare alla formazione di cittadini attivi e consapevoli, al suo raccordo con le necessità individuali e sociali: in una parola alla connessione tra scuola e realtà (Castoldi, 2009). “Nell’esperienza quotidiana si apprende per interesse, in modo contestuale, provando attivamente e collaborando con i propri pari. Nella scuola tradizionale si studia per dovere, in modo astratto, spesso ascoltando passivamente e lavorando individualmente” (Cecchinato, 2014, p. 22). Questo divario influenza inevitabilmente la visione dell'ambiente scolastico come estraneo al modo di apprendere dei più giovani.

Vista la situazione appena descritta, l'apprendimento capovolto è nato, si è diffuso e sviluppato in pochissimi anni, diventando una delle metodologie più famose e innovative di questi ultimi tempi (Hwang, Lai, Wang, 2015). Il percorso inizia ufficialmente nel 2007 con Jonathan Bergmann e Aaron Sams, all'epoca insegnanti di chimica al Woodland Park High School in Colorado, considerati i due fondatori della *flipped classroom*, o classe capovolta[1]. In breve tempo la metodologia si è propagata in Canada, negli Stati Uniti e in Europa, riscuotendo grande successo sia tra gli insegnanti che tra gli studenti (Bergmann e Sams, 2012).

È con un'evoluzione di questa metodologia[2], descritta nel paragrafo successivo, che l'esperienza didattica si è svolta, in occasione di un laboratorio di approfondimento sui sistemi di numerazione. Il laboratorio è stato creato per entrare a far parte della proposta didattica del Piano Lauree Scientifiche, organizzato dall'Università degli Studi di Ferrara, per le scuole secondarie di secondo grado. La classe che ha partecipato al progetto, nella seconda metà del primo semestre, era una classe prima di un liceo scientifico della città, composta da 27 alunni alle prime armi con un metodo educativo diverso da quello tradizionale.

Il laboratorio, della durata complessiva di 12 ore, era composto di tre parti: i sistemi di numerazione nella storia, il sistema di numerazione decimale e il sistema di numerazione binario.

La struttura, i contenuti e le modalità operative verranno presentate nel dettaglio e intrecciate con la descrizione delle situazioni nate dall'applicazione in classe del percorso. Prima però verranno illustrate le caratteristiche principali della metodologia e come questa si inserisce nel quadro teorico di riferimento. Concluderemo infine con alcune osservazioni di carattere generale.

2. Apprendimento capovolto e inquadramento teorico

Il *flipped learning* è una metodologia didattica di stampo costruttivista (Bishop e Verleger, 2013), che come tale ha il suo *focus* nell'apprendimento, e non nell'insegnamento. Ciò significa portare in primo piano non solo i contenuti, ma anche e soprattutto i processi con i quali avviene l'apprendimento, come ad esempio la riflessione, la capacità di analizzare, valutare e applicare in contesto le conoscenze (Franchini, 2014; Cecchinato e Papa, 2016). Per rendere questo possibile non è sufficiente invertire i due momenti fondanti nell'educazione tradiziona-

[1] Già nel 2000 M. J. Plat e M. Treglia utilizzarono un termine simile, *classe rovesciata,* in una loro pubblicazione sul "Journal of Economic Education". Qui mettevano in evidenza il bisogno dei docenti di adeguare il proprio metodo di insegnamento alle differenti necessità di tutti gli studenti, ognuno avente un personale stile di apprendimento.

[2] Il vocabolo *flipped learning* (apprendimento capovolto) non è sinonimo di *flipped classroom* (classe capovolta), termine con cui inizialmente si è diffusa la metodologia. La distinzione è stata evidenziata dal Flipped Learning Network (2014), in *Flipping a class can, but does not necessarily, lead to Flipped Learning* (http://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning).

le, l'esposizione dei contenuti in classe e lo studio individuale a casa, come la *flipped classroom* prevede, ma è necessario capovolgere il processo stesso di apprendimento (Bergmann e Sams, 2014). I nuovi concetti dovranno essere costruiti attivamente dagli studenti – non ascoltati passivamente – interagendo con l'ambiente e rielaborando in modo autonomo (D'Amore, 1999).

La ricerca pedagogica fornisce alcune linee guida a sostegno di questa inversione mediante strategie di *active learning*, sempre tenendo in considerazione gli statuti epistemologici e le pratiche didattiche proprie di ogni disciplina. Da diverse esperienze sembra che l'*inquiry based learning*[3] e *peer education*[4] siano le strategie più proficue, specialmente se integrate fra loro (Cecchinato, 2014).

Guy Brousseau (1986) sostiene però che uno studente può costruire conoscenza solo se realmente interessato ad approcciarsi a ciò che gli è stato proposto. Per questo motivo la costruzione di concetti deve essere motivata e stimolata, inserendola in contesti legati alla quotidianità dei ragazzi. In effetti la didattica capovolta riprende molti punti della *Teoria delle situazioni* (Brousseau, 1997), in particolare della situazione *a-didattica*. Si potrebbe dire che il *flipped learning* "rappresenti una specifica messa in campo concreta di una particolare instanziazione della teoria delle situazioni" (Vastarella, 2016, p. 124).

Risulta evidente quindi come l'apprendimento capovolto si poggi su teorie didattiche e sfrutti strategie educative conosciute e sostenute dalla ricerca in questo campo da diversi anni, la cui efficacia è stata ampiamente dimostrata (Bergmann e Sams, 2013). Il merito che va riconosciuto al metodo *flipped* è di averle strutturate in un modello dinamico e integrate con le nuove tecnologie, permettendone una diffusione e un attecchimento nella scuola come mai era accaduto in precedenza.

In un contesto di questo tipo la figura dell'insegnante non può restare invariata. Il docente non dovrà più essere un semplice divulgatore, ma un consigliere; come ben riassume King (1993), deve avvenire una trasformazione da *sage on the stage* a *guide on the side*. In questo modo si ha la possibilità di attuare un apprendimento individualizzato, assistendo ogni studente e favorendo personali inclinazioni, talenti e interessi.

La struttura del nuovo ciclo di apprendimento è scansionato da tre fasi: lanciare, condurre e chiudere la *sfida*.

Il *lancio della sfida* è un momento delicato, il cui obiettivo è attivare l'interesse negli studenti attraverso la presentazione di problemi reali, dibattiti provocatori, analisi di casi e ricerche personali. Se fosse necessario in questa occasione è possibile anche definire il contesto o richiamare prerequisiti fornendo informazioni non del tutto esaustive. Gli approcci sono vari –

[3] Con il termine *inquiry based learnin*, o apprendimento per ricerca, si racchiudono numerose metodologie e tecniche didattiche che stimolano gli studenti a risolvere compiti e problemi attraverso processi esplorativi o analisi critiche di dati fornitegli o ricavati (Haq, 2017). Una delle metodologie le più utilizzate è il *problem based learning*, sviluppato nei primi anni '70 nell'ambito delle *Medical Schools* delle Università americane (Barrows, 1986).

[4] Con il termine *peer education*, o apprendimento tra pari, si considerano una serie di metodologie e tecniche didattiche in cui l'apprendimento non è individualistico ma collaborativo, grazie alla suddivisione della classe in piccoli gruppi (Comoglio, 1996). I tre approcci maggiormente utilizzati sono: *peer collaboration*, *peer tutoring* e *cooperative learning* (Damon e Phelps, 1989).

video, testo, immagini, file multimediali – e possono essere attuati a casa prima della lezione o in aula.

Gli studenti dovrebbero sentirsi incoraggiati a operare come "piccoli ricercatori" per risolvere le questioni lasciate aperte; ciò dovrebbe accadere durante la seconda fase, la *conduzione della sfida*. Lo scopo è di favorire una mentalità scientifica promuovendo la capacità di mettere in discussione le conoscenze invece che assimilarle acriticamente. Gli studenti dovrebbero attivarsi in questo senso applicando strategie cognitive e procedure di indagine specifiche della matematica, producendo anche materiale che sarà utile nell'ultima fase. Per favorire questo processo si sfruttano le strategie di apprendimento attivo già nominate.

Il ciclo si conclude con la rielaborazione e valutazione dello stesso. La *chiusura della sfida* consiste in un processo collettivo guidato dall'insegnante che coinvolge l'intera classe non solo con l'obiettivo di chiarire, rendere espliciti e consolidare i contenuti, ma anche di costruire e sviluppare competenze, riflettendo sui processi e sulle strategie attuate. Si tratta dunque di un vero e proprio *debriefing*, che può essere prolungato al di fuori dell'aula prevedendo attività di consolidamento, ulteriori ricerche e pratiche applicative.

È questa inoltre la fase in cui la valutazione interviene maggiormente, anche se il processo valutativo è in realtà integrato con l'intero percorso didattico, seppur in forme e con obiettivi differenti. La volontà è quella di non analizzare solo i prodotti, ma anche e soprattutto i processi, fornendo frequenti *feedback* in forma di consiglio, piuttosto che di giudizio, per rendere gli studenti in grado di modificare le proprie azioni migliorando le capacità di apprendimento (Rivoltella, 2013; Cecchinato e Papa, 2016). La valutazione sta quindi mutando, non limitandosi più a un mero accertamento di conoscenze, ma dando attenzione anche a "quanto il soggetto sa utilizzare il proprio sapere per agire nel contesto di realtà in cui si trova a vivere" (Castoldi, 2009, p.27), per questo motivo viene chiamata valutazione autentica (Maglioni e Biscaro, 2014).

3. I sistemi di numerazione nella storia

La prima parte del percorso si è svolta in un unico incontro di quattro ore nel laboratorio di informatica del liceo, per avere a disposizione computer e connessione internet. Le altre parti sono state spezzate in più incontri da due ore ciascuno e hanno avuto luogo in classe.

Lo stimolo, che è stato presentato in aula, consisteva in un'immagine trovata in rete, in uno dei social network di maggior diffusione, *Facebook*. Il soggetto era un uomo di origine araba con abbigliamento tradizionale, affiancato da una frase: "*Questo è Ako Sharmootah e vuole imporre in Italia l'uso dei numeri arabi. Condividi se sei indignato*". La speranza, usando tale immagine con origine e tema estremamente attuale e provocatorio, era di rendere maggiormente accattivante l'introduzione dell'argomento attivando una discussione collettiva. Dopo aver mostrato la foto è stato chiesto agli studenti di esprimere la propria opinione a riguardo. In seguito ad un primo momento di disappunto e confusione generale, uno studente ha domandato: *"ma i numeri arabi non sono quelli che utilizziamo?"*, calmando immediatamente la situazione, e attirando l'attenzione di tutti.

La classe è stata esortata a fare domande; essendo queste formulate da loro in prima persona avrebbero dovuto provocare un naturale bisogno di soddisfarle. Gli interrogativi emersi sono stati: *"Perché usiamo i numeri arabi?"*, *"I numeri arabi che usiamo sono sempre stati di questa forma?"*. È stata concessa una decina di minuti per una rapida indagine sul web con lo scopo di rispondere ai quesiti emersi per poi esporre i risultati in modo informale durante la successiva discussione, svelando così i due temi principali dell'unità di apprendimento: i differenti sistemi di numerazione usati dalle popolazioni nel corso della storia - popolazioni primitive, egiziane, mesopotamiche, greche, romane, cinesi e indiane - e la diffusione del sistema di numerazione indo-arabo in Europa.

Sul primo argomento si è basata l'attività di conduzione della sfida in aula, sviluppata mediante la *peer education*. La classe è stata divisa in 7 gruppi, uno per popolazione, composti da tre, quattro o cinque studenti in base alla quantità di materiale a disposizione. La ripartizione dei gruppi è avvenuta secondo i canoni della *peer collaboration*, quindi affiancando studenti con lo stesso livello disciplinare (Damon e Phelps, 1989). Grazie a questa scelta è stato possibile assegnare le popolazioni con sistemi di numerazione più complessi ai gruppi con competenze matematiche di livello più alto.

Prima di dare inizio all'attività si è svolta una breve lezione dialogata, per presentare il sistema di numerazione posizionale decimale, richiamando alcuni prerequisiti e riorganizzandoli in una struttura più adatta al nostro percorso. Questo momento, in cui è stato creato un collegamento con le loro conoscenze pregresse, ha un duplice effetto: far emergere eventuali *misconcetti* (D'Amore, 1999) e produrre un apprendimento stabile e significativo. "Le nuove conoscenze si innestano in quelle già possedute, favorendo il cambiamento concettuale" (Cecchinato e Papa, 2016, p. 52)

L'attività prevedeva che ogni gruppo svolgesse una ricerca approfondita sul tema dei sistemi di numerazione usati dalla popolazione a loro affidata. Questa è stata guidata dall'insegnante mediante una lista di siti web/testi cartacei da cui poter attingere, e da un elenco di punti nodali su cui concentrarsi. L'insieme di questi due strumenti è stato chiamato *scheda di supporto* (riportiamo a titolo di esempio quella relativa alla popolazione egiziana in appendice nella Scheda 1).

Una volta raccolte le informazioni gli studenti hanno dovuto rielaborarle e riorganizzarle per la produzione di materiale, testuale e multimediale, che è stato condiviso in un secondo momento con l'intera classe. Era inoltre previsto che ogni gruppo proponesse una breve presentazione del proprio argomento e che i compagni, a cui era rivolta, prendessero appunti. Questi ultimi sarebbero stati utili, insieme al materiale preparato e condiviso dal gruppo stesso, per la compilazione di una scheda di verifica sull'argomento, a conclusione dell'incontro.

L'obiettivo non era solo far conoscere l'origine dei numeri e la loro evoluzione, ma era soprattutto sviluppare alcune competenze trasversali a tutte le materie, a cui non sempre viene data la giusta attenzione. Ci stiamo riferendo ad alcune delle competenze generali riportate dalle *Indicazioni Nazionali per Licei* del 2010 come progettare, comunicare, collaborare e partecipare, agire in modo autonomo e responsabile, individuare collegamenti e relazioni, acquisire e interpretare l'informazione.

Gli studenti hanno dimostrato impegno ed interesse, ma essendo il primo approccio ad attività di questo tipo si sono manifestate alcune carenze (Carletti e Varani, 2005). I membri della maggior parte dei gruppi invece di collaborare si sono suddivisi i punti nodali da ricercare individualmente, proponendo in molti casi un prodotto disomogeneo, mal strutturato e a volte ripetitivo. Il lavoro svolto si può assimilabile a consecutivi "copia e incolla" piuttosto che un'interpretazione delle informazioni trovate[5]. Si evidenzia una mancanza di capacità collaborative, progettuali, di rielaborazione e di individuazione delle relazioni.

Durante l'attività è emerso un aspetto particolarmente interessante: la preferenza degli studenti ad usare supporti digitali piuttosto che cartacei nella ricerca di informazioni. Questa ipotesi è stata confermata dagli stessi, che durante la compilazione del questionario finale di gradimento, di cui parleremo nel seguito, hanno affermato all'unanimità di aver scelto i siti web come fonti piuttosto che i formati cartacei. I motivi espressi sono principalmente due: da un lato la rapidità e l'intuitività, dall'altra l'abitudine ad utilizzare tali modalità. Questo episodio costituisce un esempio tangibile del fatto che "tutti noi, in particolare le giovani generazioni, siamo continuamente coinvolti in pratiche info-comunicative di natura digitale che stanno profondamente innovando le modalità di produzione e diffusione culturale" (Cecchinato e Papa, 2016, p. 8).

Al termine delle presentazioni di tutti i gruppi, durante il quale il docente ha potuto dare consigli agli allievi per migliorare gli elaborati, si è aperto uno spazio per le riflessioni, ricordando un quesito a cui non era ancora stata data risposta: *"Perché si chiamano numeri arabi?"*. È stata ampliata questa fase oltre l'aula, invitando gli alunni a svolgere individualmente una ricerca sull'argomento - dal titolo *Diffusione della matematica araba in Europa* - guidata dall'insegnante mediante schede di supporto. Gli studenti hanno ricevuto *feedback* praticamente immediati sul loro lavoro, che hanno potuto applicare modificando le trattazioni e migliorando i risultati ottenuti.

Per mancanza di tempo la verifica conclusiva (in appendice nella Scheda 2) è stata compilata a casa; gli studenti hanno dimostrato di saper comunicare le conoscenze acquisite e anche di saper individuare collegamenti e relazioni fra essi.

L'uso della storia nell'insegnamento-apprendimento della matematica, sfruttata in particolar modo per introdurre nuovi concetti, è molto apprezzato da ricercatori, insegnanti e studenti (Bagni, 2004). Le ragioni di questo gradimento sono da riferirsi al suo carattere formativo e d'interesse. La storia della matematica offre la possibilità di suscitare riflessioni metacognitive e di sviluppare una conoscenza socio-culturale profonda di un particolare periodo storico (Furinghetti e Somaglia, 1997).

4. Il sistema di numerazione decimale

Dopo la ricerca degli studenti sulla matematica araba e la sua diffusione in Europa, si è

[5] Questo episodio è un esempio di come l'impiego del web possa essere poco utile o addirittura dannoso se adoperato acriticamente. Per tale motivo è importante nella scuola di oggi formare gli studenti a un uso consapevole della rete.

scelto di dedicare attenzione agli algoritmi delle quattro operazioni fondamentali usate oggi per numeri a più cifre, che nascono e si sviluppano proprio nel periodo storico appena trattato. Si è pensato potesse essere interessante per gli studenti capire perché tali algoritmi, che tutti sfruttano quotidianamente, funzionano (Zan, 2000a).

È stata organizzata una gara di velocità nel "far di conto". Questo è stato semplicemente un pretesto - lo stimolo - per attirare l'attenzione degli studenti facendo loro applicare gli algoritmi delle quattro operazioni e, in un secondo memento, fargli notare quanto sia stato meccanico eseguirli. Al termine della gara, sono state poste alcune domande al vincitore: "*Come hai fatto a essere così veloce?", "Quale algoritmo hai usato? Mostracelo!", "Come fai a essere sicuro che il risultato sia giusto?"*. La domanda che ha creato più difficoltà, non solo al vincitore ma a tutta la classe, è stata: *"Perché l'algoritmo funziona?".* Le risposte inizialmente aggiravano il problema – *"servono perché rendono i calcoli più veloci"* – poi, una volta compresa la finalità della richiesta, sono emerse giustificazioni che potrebbero essere considerate un indicatore dell'apprendimento acritico a cui l'insegnamento tradizionale li ha portati (Gibbs, 1981): *"ce le hanno insegnate così", "degli studiosi le hanno inventate".* Era dunque il momento giusto per passare alla conduzione della sfida.

L'attività consisteva nell'argomentazione di alcune delle operazioni svolte durante la gara sfruttando la rappresentazione decimale dei numeri e le proprietà delle operazioni[6].

Sono state usate nuovamente strategie di *peer education*, questa volta suddividendo gli studenti in gruppi di due o tre elementi secondo i canoni della *peer tutoring*. In ogni gruppo era quindi presente un alunno con livello disciplinare alto, chiamato *tutor*, e uno/due studenti con un livello più basso, chiamato *tutorando* (Damon e Phelps, 1989).

Gli obiettivi, oltre quelli di carattere generale già elencati in precedenza, erano: saper riconoscere la prova matematica come aspetto fondamentale della materia, fare congetture matematiche e sviluppare per essa un'argomentazione (D'Amore e Godino, 2003). Non solo, l'essere parte di un gruppo potrebbe spingere ogni membro a sviluppare competenze comunicative specifiche per creare una conoscenza condivisa.

L'applicazione in classe è stata complicata, i gruppi in principio non capivano esattamente la richiesta poiché, come già anticipato, non avvertivano la necessità di dover dimostrare o argomentare nulla. Le prime risposte scritte sembrano essere una descrizione dell'algoritmo piuttosto che un'argomentazione delle ragioni sottostanti al suo funzionamento.

Per citarne alcune: *"La somma in colonna funziona perché si separano le unità dalle decine e dalle migliaia"; "L'addizione si fa in colonna perché questo metodo ci permette di sommare singolarmente le unità, le decine e le centinaia degli addendi. Se queste somme superano il 10 si scrive la cifra delle decine nella colonna a sinistra e si somma alle altre cifre che hanno la stessa potenza di 10 quando le scrivo sotto forma decimale"*.

Dopo l'intervento dell'insegnante, mirato di gruppo in gruppo, gli studenti sono riusciti ad impostare il lavoro correttamente, e nel tempo dato a disposizione sono stati in grado di argomentare gli algoritmi di una somma, una differenza e un prodotto. Molte delle spiegazioni

[6] A titolo di esempio consultare il sito dell'Università di Bologna http://progettomatematica.dm.unibo.it/Basi/node4.html.

sono state confuse, alcuni gruppi hanno applicato l'algoritmo della somma in colonna ai numeri scritti in notazione decimale. Ciò nonostante, essendo la classe una prima di scuola secondaria di secondo grado che muove i suoi primi passi verso lo sviluppo delle capacità argomentative matematiche, si potrebbe considerare il lavoro svolto soddisfacente. Alcuni esempi di tali risposte sono:

"$57 + 34 = 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 8 \cdot 10^1 + 11 \cdot 10^0 = 8 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 91.$ *Uso il riporto perché ho superato il 10, quindi lo scompongo ancora e trovo 91, risultato effettivo".*

"La somma in colonna funziona perché le cifre moltiplicate per la stessa potenza di dieci (es. $7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^0$*) si sommano tra loro fino a raggiungere 9 al massimo, dove si [passa] poi alla potenza di 10 successiva. Il riporto viene quindi utilizzato per non confondere fra di loro le cifre, che appartengono a diverse potenze di 10".*

Durante il *debriefing* finale, che ha concluso l'incontro, l'insegnante ha riordinato e formalizzato i contenuti sfruttando i contributi degli alunni.

Nella lezione successiva l'attenzione era ancora indirizzata verso il sistema di numerazione decimale, ma il lancio della sfida ha avuto luogo usando stimoli di natura differente: giochi di prestigio.

Il primo gioco proposto è *Il magico 9*. Dopo aver scritto il numero 9 su un foglio, senza mostrarlo alla classe, questo deve essere ripiegato e inserito in una busta. Gli alunni vengono invitati, ognuno in modo indipendente dagli altri, a pensare ad un numero di due cifre. Si richiede poi di sommare le due cifre di cui il numero è formato e di sottrarlo a quello pensato inizialmente. Si specifica che se il risultato è di una sola cifra si ha finito il gioco, altrimenti le due cifre di cui è composto vanno nuovamente sommate (Peres, 2006). È stato chiesto di dire ad alta voce e contemporaneamente il risultato ottenuto dopo il procedimento. Ogni studente è rimasto molto sorpreso nel sentire dire all'intera classe il suo stesso valore, e ancor di più nel vedere che il numero 9 era stato predetto fin dal principio all'interno della busta. La speranza era quella di far nascere il forte desiderio di comprendere il meccanismo che lo rende possibile, come spesso accade quando si è spettatori di giochi di prestigio, generando negli studenti domande derivate dalla pura curiosità, le più proficue per un apprendimento profondo e a lungo termine (De Beni e Moè, 2000). La conduzione della sfida consisteva proprio nel soddisfare tali quesiti spontanei. Per farlo si è adottata la stessa strategia di *peer education* della lezione precedente, mantenendo i gruppi invariati.

Gli obiettivi specifici dell'attività erano: saper risolvere problemi che nascono in contesti matematici e non, fare congetture matematiche, saperle argomentare/dimostrare e comunicare ad altre persone (D'Amore e Godino, 2003).

Per spiegare il trucco è necessario sfruttare la rappresentazione posizionale decimale di un numero generico ed applicare su di esso le richieste del gioco. Un generico numero di due cifre in rappresentazione decimale è della forma $X \cdot 10 + Y$. Sottraendo a quest'ultimo la somma delle cifre di cui è composto si ottiene $X \cdot 10 + Y - (X + Y)$ e svolgendo i calcoli si ha

$X \cdot 10 + Y - X - Y$, ossia $9X$.

Se $X = 1$ il risultato è 9, numero composto di una sola cifra, quindi il gioco è giunto al termine con il risultato atteso. Se $X > 1$ il risultato $9X$ è un numero composto di due cifre e multiplo di 9. Poiché il criterio di divisibilità per 9 asserisce che un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è multiplo di 9, alla richiesta di sommare le cifre di cui è composto si ottiene come risultato il valore previsto.

Il primo problema incontrato dalla classe è stato la comprensione della richiesta, non sentendo la necessità di dimostrare o argomentare, molti studenti hanno voluto sapere se fosse sufficiente scrivere i passaggi del gioco applicati ad alcuni esempi. Altri, che avevano invece avvertito la necessità di generalizzare, hanno rappresentato un numero generico a due cifre come XY e la somma delle sue due cifre come $X + Y$, dimostrando di non saper applicare le conoscenze acquisite a situazione concrete. In seguito all'intervento mirato dell'insegnante – che ha fornito *feedback* individuali, indispensabili quando gli allievi giungono ad un punto oltre il quale non riescono a procedere (Cecchinato e Papa, 2016) – tutti i gruppi sono riusciti a sviluppare la dimostrazione fino ad ottenere $9X$. Via via che gli studenti giungevano a tale risultato veniva consegnata loro una lista contenente i criteri di divisibilità, il secondo argomento centrale di questa parte del percorso.

Tutti gli studenti hanno capito immediatamente che era necessario applicare il criterio di divisibilità del 9, ma nonostante gli input del docente nessuno ha portato a termine la dimostrazione. Per meglio dire, circa la metà dei gruppi dichiara di averla conclusa semplicemente scrivendo in modo sconnesso e non motivato la frase *"Per il criterio di divisibilità del* 9*".* Questo fatto potrebbe essere ricondotto al problema del contratto didattico (Brousseau, 1984); la paura di sbagliare o di non portare a termine il compito assegnato sembra aver spinto i gruppi a scrivere la risposta che credevano l'insegnante avrebbe voluto leggere.

Durante la chiusura della sfida, grazie all'apporto di tutti i gruppi, la dimostrazione è stata formalizzata approfondendo in particolare l'ultimo passaggio in cui era necessaria l'applicazione del criterio di divisibilità. Per consolidare questo tema è stato proposto un quesito tratto dai Campionati Internazionali di Giochi Matematici MATEpristem dell'Università Bocconi di Milano chiamato *Superdivisibilità: "Utilizzando una sola volta le cifre 1,2 e 3 gli unici numeri divisibili per 1, 2 e 3 che possiamo formare sono 132 e 312. Utilizzando una sola volta i numeri da 1 a 6, possiamo formare dei numeri che siano divisibili per 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Se sì, qual è il più piccolo? Motiva la tua risposta"*.

Il problema è stato risolto rapidamente dai gruppi, fornendo risposte esaurienti e corrette. Non tutti però hanno dato la soluzione più semplice, come nel seguente esempio: *"I numeri divisibili per 5 e per 6 sono quelli che terminano con lo zero. Dato che i numeri che possiamo scrivere sono formati da cifre che vanno dall'1 al 6, nessun numero composto da queste cifre può essere diviso sia per 5 che per 6"*. Ciò nonostante è stata dimostrata una comprensione profonda dell'argomento, oltre ad una corretta scelta strategica.

Per concludere la lezione è stato assegnato un ultimo gioco di prestigio chiamato *Il rinoceronte nero* (Peres, 2006), la cui spiegazione si basa sugli stessi elementi portanti già affrontati con *Il magico 9*. Chiedere alla classe di interpretare anche questo gioco di prestigio coincide con la richiesta di applicare e adattare le strategie e le conoscenze appena sviluppate ad un nuovo problema sfidante (Cecchinato e Papa, 2016). Gli studenti hanno provato di possedere questa competenza fornendo argomentazioni chiare e complete in brevissimo tempo.

I prodotti e i processi delle tre attività descritte sono state valutate positivamente. Gli studenti hanno avuto *feedback* immediati in aula grazie alla presenza costante del docente che, passando tra i gruppi, ha potuto monitorare il loro apprendimento.

5. Il sistema di numerazione binario

Per l'introduzione della terza parte lo stimolo scelto è stato nuovamente un gioco di prestigio, chiamato *Le tracce significative*. Come detto in precedenza la speranza era ancora quella di stimolare un forte desiderio di comprendere il meccanismo che ne sta alla base. *Le tracce significative* è un gioco di magia molto semplice, che necessita di un collaboratore scelto nella classe e di un mazzo di carte. Dopo aver tracciato sei linee verticali a distanza di circa 10 cm, il docente deve dare le spalle alla cattedra chiedendo allo studente nominato suo collaboratore di prendere un mazzetto formato da un numero di carte a scelta e posizionarle sulla prima linea a destra. Da questo devono essere prelevate due carte, una va scartata, l'altra posizionata sulla prima linea successiva verso sinistra. Quest'ultimo procedimento deve essere ripetuto finché possibile, ossia fino a quando saranno terminate le carte del mazzetto sulla prima linea da destra o ne sarà rimasta soltanto una. La serie di mosse appena illustrate devono essere svolte ancora sul nuovo mazzetto, presente sulla seconda linea a partire da destra, e poi iterato per la terza, la quarta e così via, fino all'esaurirsi delle carte. Come si può immaginare, al termine di tutto il processo, sulle linee verticali potranno esserci una o nessuna carta. Giunti a questo momento il docente, girandosi verso la cattedra, riuscirà a capire il numero esatto di carte di cui era composto il mazzetto selezionato inizialmente, semplicemente guardando la disposizione ottenuta (Peres, 2006). La soluzione al gioco di prestigio è strettamente legata al codice binario. Infatti ogni operazione di ridistribuzioni dei mazzetti, su cui si basa questo gioco, equivale a dividere per due il numero di carte di cui sono formati. Per dirlo in altri termini, il quoziente della divisione corrisponde al numero di carte che vengono posizionate sulla linea successiva verso sinistra, mentre il resto è dato dal numero di carte che rimangono sulla linea di partenza. È evidente la corrispondenza tra tale procedimento e l'algoritmo di conversione di un numero decimale in codice binario. Dunque per risalire al numero di carte contenute nel mazzetto iniziale è sufficiente riconvertire in decimale il numero binario individuato dalla successione di spazi con la carta – ossia 1 – e spazi vuoti – ossia 0 – presenti sulle linee.

L'attività didattica della prima parte della lezione è stata svolta individualmente, non per giungere alla comprensione del trucco che sottende *Le tracce significative*, come richiesto nella lezione precedente, ma per indagare la relazione che intercorre tra i passaggi del gioco e le procedure matematiche che ne conseguono, inquadrando la situazione e modellizzandola. L'attività, guidata da una scheda di supporto – in Tabella 1 – potrebbe condurre gli inconsapevoli studenti alla scoperta del processo di conversione di un numero decimale in binario.

La compilazione della scheda è avvenuta senza alcuna difficoltà e gli studenti hanno dimostrato di saper modellizzare un problema comprendendo le dinamiche che lo sottendono (un esempio è riportato nella Scheda 3 in appendice).

Compila la seguente tabella annotando il numero di carte presenti nei mazzetti posizionati sulle linee verticali (quando ci sono):

Linee da destra	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Numero carte all'inizio						
Numero carte dopo il primo ciclo						
Numero carte dopo il secondo ciclo						
Numero carte dopo il terzo ciclo						
Numero carte dopo il quarto ciclo						

Dimentichiamoci per un secondo del gioco di prestigio e analizziamo la tabella.
Cosa posso osservare?
Cosa accade passando dalla prima alla seconda riga? E dalla seconda alla terza? E...?

Tabella 1 – Scheda di supporto relativa a Le tracce significative

Restava solo da spiegare come l'insegnante riuscisse a individuare il numero di carte del mazzetto iniziale guardando la loro disposizione, ossia l'ultima riga della tabella. Ciò è avvenuto durante una discussione collettiva, occasione in cui è stato introdotto il sistema di numerazione binario. Sono stati esposti i principi fondamentali della numerazione in base due, fornendo informazioni utili per il seguito dell'attività didattica mediante una breve lezione dialogata.

Terminata questa prima fase introduttiva è stato proposto il secondo stimolo, un gioco di strategia uno contro uno chiamato *Il gioco del Nim*. Vengono disposte su un tavolo quattro colonne di fiammiferi, che ne contengono rispettivamente *1, 3, 5 e 7* (vedi Figura 1). In ogni mossa il giocatore di turno deve scegliere una delle colonne, non già vuote, e rimuovere da esso un certo numero di fiammiferi, da un minimo di uno fino all'intera colonna. Vince il giocatore che rimuove l'ultimo fiammifero.

Il gioco è stato scelto per la relativa strategia vincente che si basa principalmente sulla conversione dei numeri decimali in numeri binari (Peiretti, 2012) (riportata in appendice nella Scheda 4). Grazie anche alla sua complessità gli studenti dovrebbero sentirsi stimolati a mettere in campo le proprie capacità di riflessione e ragionamento.

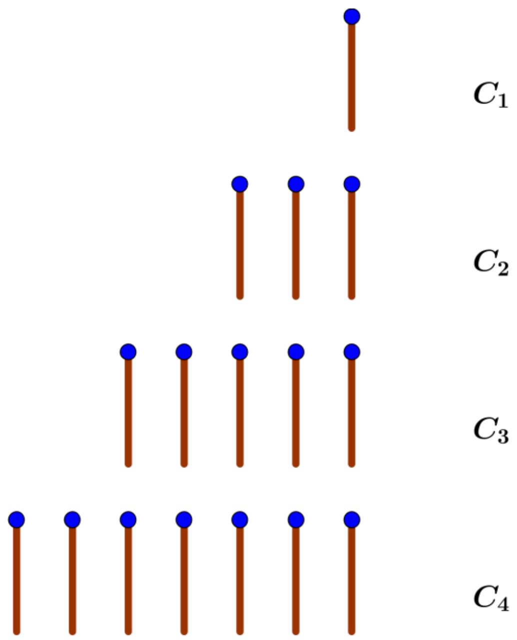

Figura 2 – Rappresentazione posizione iniziale del Gioco del Nim. Quattro colonne C_1, C_2, C_3, C_4 contengono rispettivamente 1, 3, 5 e 7 fiammiferi

La conduzione di questo momento, che ora descriveremo, si ispira alla strategia didattica *Think-Pair-Share* secondo cui, in seguito ad una breve illustrazione dell'argomento, viene lasciata la possibilità agli studenti di sviluppare una discussione di coppia scambiandosi reciprocamente le proprie riflessioni (King, 1993). Infatti, dopo la presentazione delle regole del gioco, portando come esempio alcune partite, gli studenti sono stati invitati a disporsi in coppie e a sfidarsi per alcuni minuti. Lo spirito di competizione avrebbe dovuto far emergere in loro il desiderio di conoscere la strategia vincente.

Una volta svelata quest'ultima è stato concesso altro tempo, fino al termine della lezione, per permettere alle coppie di confrontarsi e applicare la complessa strategia in ulteriori partite.

Nella lezione successiva, l'ultimo incontro del laboratorio, si è messa nuovamente in atto la *peer education* con l'approccio *peer collaboration*, suddividendo la classe in gruppi di 4 elementi con il medesimo livello disciplinare.

L'attività è cominciata con la consegna di alcuni documenti riguardanti una delle tre varianti più famose del gioco del Nim (Eugeni, Mascella e Tondini, 2001) avendo cura di consegnare le versioni più complesse ai gruppi con competenze matematiche più alte (in appendice, nella Scheda 5, è riportato un esempio del materiale fornito agli studenti). La scelta del livello di difficoltà del compito è un aspetto molto importante, bisognerebbe riuscire a collocare quest'ultimo in una fascia di competenze appena superiore a quello che l'alunno possiede, posizionandolo così in quella che Vygotskij (1990) chiama *zona di sviluppo prossimale*. Grazie al diverso grado di complessità delle tre versioni del gioco del Nim è stato possibile scegliere il livello più adeguato per ogni gruppo, puntando ad un apprendimento individualizzato. Si è adoperata questa accortezza anche durante la prima attività sui sistemi di numerazione nella storia.

Ogni gruppo ha dovuto studiare il materiale, che conteneva le regole e la strategia vincente riconducibile al *Gioco del Nim* originale. Questa, oltre a essere messa in pratica, doveva essere esposta alla classe durante la fase finale di chiusura della sfida. Per verificare la piena comprensione è stato anche richiesto di proporre alcuni esempi di posizioni iniziali, differenti da quella data, in modo tale la strategia vincente diventasse a favore del primo giocatore.

Gli obiettivi specifici in questo caso erano innumerevoli, si voleva sviluppare la capacità di applicare e adattare strategie appropriate per risolvere i problemi, riconoscere e sfruttare connessioni tra oggetti matematici e non, progettare strategie matematiche argomentandole e comunicandole ad altre persone, anche mediante rappresentazioni di vario tipo (D'Amore e Godino, 2003).

Il problema principale riscontrato è stato la lettura del testo. Gli studenti si sono lanciati nello svolgimento dell'attività senza leggere con attenzione la richiesta, ponendosi in corso d'opera diverse questioni che gli hanno impedito di proseguirla, nonostante queste fossero ben esplicitate nel compito. Solo dopo l'intervento diretto dell'insegnante, che ha spronato a rileggere con attenzione le regole e le strategie, i gruppi hanno cominciato a lavorare nel modo corretto (un esempio è proposto nella Scheda 6).

La lezione è terminata con l'ultimo *debriefing* in cui gli studenti hanno esposto i contenuti delle loro schede e proposto gli esempi elaborati alla classe, dimostrando di saper modellizzare e risolvere il problema; hanno anche messo in luce il loro lato creativo proponendo varianti del gioco adeguate. Questa è stata un'ulteriore occasione per gli studenti di ricevere valutazioni e consigli da parte dell'insegnante.

6. Conclusioni

L'esperienza svolta in classe è stata un'occasione per sviluppare diverse riflessioni. Il nuovo approccio didattico sembra aver fatto emergere vari aspetti delicati del contesto educativo tradizionale, mettendone in evidenza i limiti.

L'apprendimento acritico e mnemonico che spesso si ottiene somministrando lezioni frontali, ha portato gli studenti a non avvertire la necessità di spiegare, argomentare o dimostrare i risultati matematici. Questo aspetto è estremamente delicato e complesso: è nota la difficoltà che hanno la maggior parte degli allievi nel vedere la dimostrazione matematica come prova, ed è una delle motivazioni che ha influito nell'inserimento dell'argomentazione nella pratica didattica. La speranza era di creare una continuità che conducesse in modo naturale alla dimostrazione, anche se oggi sappiamo che lo sviluppo di un'argomentazione, per quanto elaborata e raffinata sia, non apre le porte verso la dimostrazione. Questo non significa che non debba essere trattata, anzi, è fondamentale per sviluppare competenze da utilizzare di fronte all'argomentazione stessa, ma quest'ultima, come la dimostrazione, deve avere una sua didattica esplicita (Duval, 1996).

Un'altra conseguenza è la frequente comparsa di situazioni legate al contratto didattico (Brousseau, 1984). Gli studenti sono spesso abituati ad avere obblighi e ricompense che sono costanti nel modo di insegnare di un docente; per tale motivo gli allievi percepiscono determinati comportamenti come attesi dall'insegnante (D'Amore, 1999). Ciò li porta a ripeterli o emularli per ottenere la sua approvazione, anche senza averne piena consapevolezza. Gli studenti per apprendere devono invece accettare le incertezze che derivano dall'incompletezza del loro sapere, il docente ha quindi il dovere di "rassicurare gli allievi e incitarli a rischiare mostrando loro che gli errori non sono degli sbagli" (Sarazzy, 1998, p. 146).

Un secondo aspetto critico dell'approccio tradizionale consiste nella tendenza ad "addestrare" gli studenti, richiedendo di svolgere batterie di esercizi standardizzati o problemi stereotipati, che tolgono motivazione e inibiscono la capacità di applicare conoscenze matematiche. Attività di questo tipo non richiedono infatti una riflessione sui testi, a volte non è nemmeno indispensabile leggerli. Lo studente, non essendo abituato a dare attenzione alla richiesta, si lancia nell'applicazione acritica di algoritmi senza un'analisi preventiva e approfondita del testo. Ciò non può che condurlo a una conoscenza superficiale e volatile (Malara, 1993).

Per osservare risultati soddisfacenti e significativi dell'applicazione di metodologie didattiche attive, queste dovrebbero essere praticate con costanza e per lunghi periodi di tempo (Carletti e Varani, 2005). Consapevoli di ciò, sembra comunque che l'esperienza vissuta abbia permesso agli alunni di sviluppare diverse competenze di carattere generale e specifico della disciplina, come mostrato in precedenza.

L'aspetto emerso in modo più preponderante è quello legato ai fattori affettivi, e in particolare alla componente motivazionale, che è uno dei fattori considerati rilevanti nell'insegnamento-apprendimento della matematica (Pellerey 1993; Zan, 2000b). L'idea stessa di competenza sembra essere naturalmente legata alle intenzioni, alle potenzialità e alla volizione del soggetto che apprende. Bruno D'Amore afferma infatti che la competenza è non solo l'uso e la padronanza di conoscenze "ma pure un insieme di atteggiamenti che mostrano la disponibilità "affettivamente positiva" a volerne far uso" (D'Amore e Godino, 2003, p. 8).

L'impegno e l'interesse dimostrato durante le lezioni non sono stati gli unici indicatori della presenza di questa componente (Goldin *et al.*, 2016); gli studenti stessi, mediante la compilazione del questionario finale[7], hanno confermato tali ipotesi. Una percentuale che varia tra il

[7] Il questionario, compilato da 25 studenti, indagava diversi aspetti del *flipped learning*: apprendimento significativo, didattica individualizzata, valutazione autentica. L'obiettivo era di verificare la presenza di eventuali

76% e il 96% ha dichiarato di aver trovato il laboratorio più divertente[8] delle lezioni tradizionali, gli argomenti affrontati con tali modalità più interessanti e le sensazioni provate sempre positive[9]. Tutta la classe vorrebbe infatti ripetere l'esperienza e il 72% desidererebbe studiare matematica sempre in modalità *flipped* (Lazzari, 2017).

Tirando le fila di questa breve serie di riflessioni pare che il risultato di maggior interesse e dalle prospettive più proficue sia probabilmente l'ultimo trattato. Se l'apprendimento capovolto riuscisse realmente a migliorare la motivazione - o più in generale la componente affettiva - come studi teorici (Abeyekera e Dawson, 2015; Kaushal, Cheng-Nan, Chun-Yen, 2015) e questa primissima esperienza sembrano suggerire, potrebbe essere un utile strumento per l'insegnamento-apprendimento della matematica.

Emerge quindi una possibilità di sviluppo sull'argomento, per rendere più chiaro il legame fra i fattori affettivi e l'apprendimento capovolto in matematica.

7. Bibliografia di riferimento

Abeysekera, L., Dawson, P. (2015). Motivation and cognitive load in the flipped classroom: definition, rationale and a call for research. *Higher Education Research & Development*, 34 (1), 1-14. Consultabile al sito http://socialwork.nyu.edu/content/dam/sssw/faculty-staff/pdf/EducationalTechnology/Research/Motivation%20and%20cognitive%20load%20in%20the%20flipped%20classroom%20definition%20rationale%20and%20a%20call%20for%20research.pdf (ultimo accesso 03/08/2017).

Bagni, G. T. (2004). Storia della matematica in classe: Scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*. 3, 51-70.

Barrows, H. S. (11986). A Taxonomy of Problem Based Learning Methods. *Medical Education*. 20, 481-486.

Bergmann, J., Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom: Reach every Student in every Class every Day*. Eugene (OR): ISTE.

Bergmann, J., Sams, A. (2014). *Flipped Learning. Gateway to student Engagement*. Washington (DC): ISTE.

Bishop, J. L., Verleger, M. A. (2013). The flipped classroom: A Survey of Research. 120th ASEE Annual Conference & Research. Consultabile al sito https://www.asee.org/public/conferences/20/papers/6219/view (ultimo accesso 03/08/2017).

Boyer, C. B. (1976). *Storia della matematica.* Milano: Isedi.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract. *Proceedings of the TME*

benefici derivati dall'applicazione della metodologia già dopo breve tempo.

[8] Middleton (1995) afferma che il termine "divertimento" può essere interscambiato con "motivazione intrinseca". Il primo è più colloquiale ed è di più facile comprensione quando si parla con studenti e docenti.

[9] Il 96% degli studenti ha dichiarato di aver trovato le lezioni *flipped* più divertenti rispetto a lezioni tradizionali, il 76% che gli argomenti trattati in questo modo sono stati più interessanti e l'80% di aver provato sempre sensazioni positive.

54, I.D.N. Bielefeld, pp. 110-119.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7 (2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical situations in Mathematics. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990.* (Trad. Cooper, M., Balacheff, N., Sutherland, R., Warfield, V.). Londra: Kluwer.

Carletti, A., Varani, A. (2005). *Didattica costruttivista. Dalla teoria alla pratica in classe.* Trento: Erickson.

Castoldi, M. (2009). *Valutare le competenze. Percorsi e strumenti*. Roma: Carocci.

Cecchinato, G. (2014). Flipped classroom: innovare la scuola con le tecnologie digitali. *Tecnologie Didattiche*, 22 (1), 11-20.

Cecchinato, G., Papa, R. (2016). *Flipped classroom un nuovo modo di insegnare e apprendere*. Novara: UTET.

Comoglio, M. (1996). Verso una definizione del Cooperative Learning. *Animazione Sociale*, 4.

Damon, W., Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International journal of educational research*, 13 (1), 9-19.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B., Godino, J. D., *et al.* (2003). *Competenze in matematica: una sfida per il processo di insegnamento-apprendimento*. Bologna: Pitagora.

De Beni, R., Moè, A. (2000). *Motivazione ad apprendere*. Bologna: il Mulino.

Duval, R. (1996). Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva?. *La matematica e la sua didattica*, 10 (2), 130-152.

Eugeni, F., Mascella, R., Tondini, D. (2001). Un’applicazione del calcolo binario: il gioco del NIM. *Periodico di Matematiche*, VIII, 1 (4).

Flipped Learning Network. (2014). *The Four Pillars of F-L-I-P.* Consultabile al sito http://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning (accesso: 23 luglio 2017).

Franchini, R. (2014). The flipped classroom (Le classi capovolte). *Rassegna CNOS*, 1, 83-97.

Furinghetti, F., Somaglia, A. (1997). Storia della matematica in classe, *L’educazione matematica*, XVIII, V, 2 (1).

Gibbs, G. (1981). Twenty terrible reasons for lecturing. *SCED Occasional Paper No*. 8, Birmingham.

Goldin, G. A., Hannula, M. S., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middleton, J. A., Pantizira, M., Zhang, Q. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions*. ICME-13 Topical Surveys. Springer.

Haq, I. (2017). Inquiry-based Learning. In Cantillon, P., Wood, D., Yardley, S., *ABC of Learning and Teaching*. Hoboken, NJ: Wiley.

Hwang, G. J., Lai, C. L., Wang, S. Y. (2015). Seamless flipped learning: a mobile techology-enhanced flipped classroom with effective learning strategies. *Journal of Computer in Education*, 2 (4), 449-473.

Kaushal, K. B., Cheng-Nan, C., Chun Yen, C. (2015). The Impact of the Flipped Classroom on Mathematics Concept Learning in High School. *Educational Technology & Society*, 19 (3), 134-142.

King, A. (1993). From Sage on the Stage to Guide on the Side. *College Teaching*, 41(1), 30-35.

Lage, M. J., Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *The Journal of Economic Education*, 31, 30-43.

Lazzari, E. (2017). Un'esperienza di flipped theaching nell'insegnamento-apprendimento della matematica. In *Quaderni GRIMeD n°3. Una feconda contraddizione – Didattica indivualizzata vs didattica cooperativa? Il problema della valutazione all'incrocio tra le "due didattiche"*, Atti del XX Convegno Nazionale GRIMeD. A cura di Cateni, C., Fattori, C., Imperiale, R., Piochi, B., Veste, A., Ricci, F. Torino: Il capitello. pp. 58-67. Consultabile al sito http://www.capitello.it/grimed3/Atti_Grimed_3.pdf (accesso: 23 luglio 2017).

Maglioni, M., Biscaro, F. (2014). *La classe capovolta. Innovare la didattica con la flipped classroom*. Trento: Erickson.

Malara, N. A. (1993). Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16 (10), 928-954.

MIUR (2010). *Indicazioni Nazionali 2010 per i licei*. Consultabile al sito http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_Liceo%20scientifico.pdf (accesso: 23 luglio 2017).

Peiretti, F. (2012). *Matematica per gioco*. Milano: TEA.

Pellerey, M. (1993). Volli, sempre volli, fortissimamente volli. La rinascita della pedagogia della volontà. *Orientamenti pedagogici*, 6, 1005-1017.

Peres, E. (2006). *L'elmo della mente. Manuale di magia matematica*. Milano: Salani Editore.

Rivoltella, P. C., *et al*. (2013). *Fare didattica con gli EAS. Episodi di Apprendimento Situato*. Brescia: La Scuola.

Sams, A., Bergmann, J. (2013). Flip Your Students' Learning. *Educational Leadership*. 70 (6), pp.16-20.

Sarrazy, B. (1998). Il contratto didattico. *La Matematica e la sua didattica*. 2, pp. 132-175.

Vastarella, S. (2016). Postfazione. In Bergmann, J., Sams, A. *Flip your classroom. La didattica capovolta.* Trad. Vastarella, S. Firenze: Giunti.

Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza.

Zan, R., (2000a). Convinzioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 23(3), 161-197.

Zan, R., (2000b). Atteggiamenti e difficoltà in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 23(5), 441-466.

APPENDICE

Scheda 1

Numerazione egiziana

Testi e siti web consigliati:
- C. B. Boyer, *Storia della matematica.* pp. 10-26, formato cartaceo
- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/HistoryTopics.html
- dm.unife.it/storia/index.html

Domande guida:
- dove e quando si è sviluppata la civiltà egiziana?
- quali reperti storici ci hanno permesso di conoscere e decifrare la loro scrittura?
- che tipo di numerazioni veniva usata?
- come svolgevano le operazioni aritmetiche?
- che scopi aveva la matematica?

Scheda 2

Rispondi alle seguenti richieste non superando le cinque righe di testo.

1. Racconta una breve storia del numero 0. (5 punti)
2. Quale civiltà utilizzava un sistema di numerazione sessagesimale e posizionale? Scrivi una breve descrizione del sistema di numerazione. (3 punti)
3. Scrivi i numeri 314 e 815 con i simboli egiziani, prova a sommarli e a sottrarli come avrebbero fatto loro. (3 punti)
4. Cosa si intende con notazione a bastoncino? Descrivilo brevemente contestualizzando la tua risposta. (3 punti)
5. Cosa hanno in comune la numerazione greca e quella romana? (2 punti)
6. Secondo te, perché noi oggi utilizziamo una numerazione posizionale decimale? (giustifica entrambi gli aggettivi) (4 punti)

Scheda 3

Compila la seguente tabella annotando il numero di carte presenti nei mazzetti posizionati sulle linee verticali (quando ci sono):

Linee da destra	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Numero carte all'inizio						*20*
Numero carte dopo il primo ciclo					*10*	*0*
Numero carte dopo il secondo ciclo				*5*	*0*	*0*
Numero carte dopo il terzo ciclo			*2*	*1*	*0*	*0*
Numero carte dopo il quarto ciclo		*1*	*0*	*1*	*0*	*0*

Tabella 3 – Tabella presente nella scheda di supporto e compilata da uno studente

Dimentichiamoci per un secondo del gioco di prestigio e analizziamo la tabella.
Cosa posso osservare?
Cosa accade passando dalla prima alla seconda riga? E dalla seconda alla terza? E...?

"Possiamo osservare che ogni numero viene dimezzato colonna per colonna; se il numero delle carte è pari allora non avremo più carte nella colonna, se il numero è dispari ci avanzerà una carta.
Dalla prima alla seconda riga il numero si dimezza essendo pari non avanza nessuna carta. Nella seconda uguale e nella terza essendo dispari avanza una carta. Nella quarta non ne avanzano e nell'ultima ne avanzava una."

Scheda 4

La situazione presente sul tavolo dopo ogni mossa può essere rappresentata da una quadrupla $(a_{1,}, a_2, a_3, a_4)$, detta *posizione*, contenente in ordine le quantità di fiammiferi delle varie colonne. Ad esempio la posizione iniziale del gioco preso in esame sarà indicata con $(1, 3, 5, 7)$. Dopo ogni mossa la posizione si modificherà in base alla scelta fatta dal giocatore. Appare quindi evidente che esiste una sola posizione terminale, ovvero $(0, 0, 0, 0)$.
In questa versione del gioco esiste una strategia vincente per il secondo giocatore. Questo deve muovere i fiammiferi in modo da lasciare al proprio avversario una posizione tale che:

- trasformati in codice binario $a_{1,}, a_2, a_3, a_4$
- sommati in colonna quest'ultimi con la somma-Nim (in tabella *3*)
- il risultato sia nullo.

Somma Nim:	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabella 3 – Somma Nim

Si può osservare che la posizione iniziale da noi considerata, $(1, 3, 5, 7)$, ha somma-Nim nulla (come mostrato in tabella 4), e da una posizione di questo tipo il primo giocatore può ottenere solo posizioni con somma-Nim non nulla. Per tale motivo il secondo giocatore, se conosce questa strategia, risulterà sempre vincitore.

1	→			1
2	→		1	1
5	→	1	0	1
7	→	1	1	1
	Somma Nim:	**0**	**0**	**0**

Tabella 4 – Conversione in codice binario dei valori contenuti nella posizione iniziale e somma Nim in colonna

Il numero di colonne e di fiammiferi della posizione iniziale può essere modificato, verificando che la somma-Nim sia nulla per assicurare la vittoria al secondo giocatore.

Scheda 5

Regole e Strategia

Sia data una scala composta di 5 gradini con 9 monete poste su alcuni di questi, come mostrato in figura. Ogni mossa consiste nello spostare un certo numero di monete a scelta, da un minimo di uno fino a tutta la pila, da un gradino a quello immediatamente sottostante. Quando le monete giungono a terra vengono eliminate dal gioco. Il gioco termina quando tutte le monete raggiungono il suolo e vince chi sposta l'ultima moneta. All'inizio di ogni turno è possibile rappresentare la posizione delle pedine con un vettore $(a_{1,}, a_2, a_3, a_4, a_5)$, in cui a_i è il numero di monete impilate sul i-esimo gradino, considerando il suolo come il gradino n° 0. Nell'esempio in figura la posizione iniziale è data da $(3, 2, 1, 1, 2)$. La strategia vincente consiste nel considerare la terna $(a_{1,},\ a_3, a_5)$ come una posizione del gioco del Nim (dunque prendendo in esame il numero di monete impilate solo sui gradini dispari), e quindi applicare la sua strategia vincente sulla terna ottenuta. Nel nostro esempio verrà considerato (3, 1, 2), ed è semplice osservare che, una volta convertiti i valori in codice binario, la loro somma-Nim in colonna sarà nulla, quindi la strategia sarà vincente per il secondo giocatore.

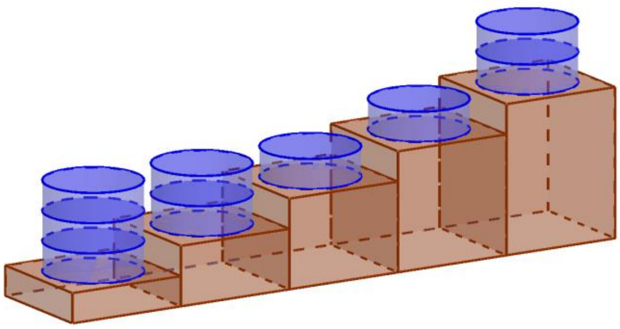

Figura 2 – Rappresentazione posizione iniziale Gioco del Nim a scala

Consegna

Dopo aver letto le regole e la strategia del Nim a scala, verificatene l'effettiva comprensione sfidandovi a coppie in questo gioco. Preparate una presentazione di circa cinque minuti per spiegare ai compagni il gioco del Nim a scala. Provate infine a proporre alcuni esempi di posizioni iniziali in modo tale che la strategia vincente diventi a favore del primo giocatore. Avrete la possibilità di variare il numero di gradini e il numero di monete in gioco.

Scheda 6

Dopo aver rappresentato una scala di 5 gradini con altrettante colonne di monete che ne contengono rispettivamente $4, 1, 1, 1$ e 2, ossia una posizione iniziale del tipo $(4, 1, 1, 1, 2)$, il gruppo scrive:

> *"Un esempio per il primo giocatore è* [questo] *perché la somma dei numeri binari delle colonne non è nulla e io (primo giocatore) posso spostare le pedine in modo tale che risulti sempre un numero nullo per il secondo giocatore."*

In effetti trasformando in codice binario i numeri contenuti nel vettore $(a_{1,}, a_3, a_5)$, che in tal caso è $(4, 1, 2)$, e applicando la somma-Nim in colonna si ottiene un risultato non nullo, come mostrato in tabella 5.

4	→	1	0	0
1	→			1
2	→		1	0
	Somma Nim:	**1**	**1**	**1**

Tabella 4 – Conversione in codice binario dei valori contenuti nel vettore $(\boldsymbol{a}_{1,}, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5)$ e somma Nim in colonna

Received October 10, 2017
Revision received November 11, 2017/November 14, 2017
Accepted December 30, 2017