

## **Un’esperienza didattica half-flipped in un ambiente di apprendimento SCALE-UP**

**Laura Branchetti**  
**Roberto Capone**  
**Francesco Saverio Tortoriello**

**Abstract** – *In this paper we describe a teaching experiment with a “blended” approach based on the integration of frontal lessons, flipped learning, Peer Discussion, Just in Time teaching and e-learning, also carried out using the social platform Edmodo and a Facebook group. The development of the students’ skills was monitored by means of three tests administered within the experiment; in parallel, we monitored the motivation level and the attitude towards the discipline through an affect test and a satisfaction survey. Some students had two additional hours per week based on cooperative learning in a SCALE UP learning environment. The research methodology falls within the Educational Reconstruction framework, that allowed us to investigate didactical phenomena, designing and creating learning environment, artefacts, teaching and learning sequences in authentic educational contexts. The results of the affect test showed a better attitude towards the discipline; from the satisfaction survey it emerged that most of the students liked the use of alternative methodologies. The results of our experimentation were analysed also from the point of view of disciplinary learning, comparing the students’ performances with the results of a test of a previous cohort of students who attended the same course.*

**Riassunto** – *In questo articolo, viene riportata la sperimentazione di un approccio didattico di tipo “blended” integrando lezioni tradizionali, flipped learning, Peer Discussion, Just in Time Teaching e e-learning, con l’ausilio della piattaforma sociale Edmodo e un gruppo Facebook. Lo sviluppo di competenze degli studenti è stato monitorato attraverso tre prove intercorso; parallelamente, è stato monitorato il loro livello di motivazione allo studio della disciplina attraverso un test affect e un test di gradimento. Alcuni studenti hanno integrato lo studio con due ore settimanali aggiuntive di lezioni gestite utilizzando il cooperative learning in un ambiente di apprendimento SCALE-UP. La metodologia di ricerca attuata rientra nel quadro della Educational Reconstruction, che ha permesso di studiare i fenomeni didattici progettando e realizzando ambienti di apprendimento, artefatti, sequenze di insegnamento/apprendimento che il ricercatore ha sperimentato in contesti educativi autentici. Dai risultati del test affect, sembra emergere una migliore predisposizione allo studio della disciplina; dal test di gradimento emerge, per la maggior parte degli studenti, l’apprezzamento dell’utilizzo di metodologie didattiche alternative. I risultati della sperimentazione sono stati analizzati anche dal punto di vista dell’apprendimento confrontando i risultati ottenuti dagli studenti con quelli degli studenti della coorte precedente che hanno frequentato lo stesso corso.*

**Keywords** – flipped learning, peer discussion, Just in Time teaching, SCALE-UP

**Parole chiave** – Insegnamento capovolto, discussione tra pari, insegnamento Just in Time, SCALE-UP

**Laura Branchetti** (Cesena, 1985), laureata in Matematica e Ph.D. in Didattica della Matematica, è Assegnista di Ricerca presso il Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche dell'Università di Parma e docente a contratto di *Didattica della matematica* e *Matematiche complementari* presso lo stesso Dipartimento. Tiene corsi di formazione per docenti in formazione e in servizio. Collabora con il Gruppo di ricerca in Fisica Generale e Didattica dell'Università di Bologna.

**Roberto Capone** è Assegnista di Ricerca del settore MAT-04 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno. Copre gli insegnamenti di *Didattica della Matematica* e di *Analisi Matematica*. I suoi maggiori interessi di ricerca riguardano la didattica per competenze, l'interdisciplinarietà e le metodologie didattiche innovative per l'insegnamento della matematica e della fisica. Si occupa di formazione docenti collaborando con l'USR Campania e con l'Invalsi.

**Francesco Saverio Tortoriello** è Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno. I suoi interessi di ricerca riguardano la didattica della matematica, i fondamenti della matematica, in particolare lo studio del rapporto tra le due culture. È tra i responsabili scientifici del Progetto Liceo Matematico.

## 1. Introduzione

Non tutti gli studenti che si iscrivono ad una facoltà scientifica hanno solide competenze matematiche e non sempre hanno un “buon rapporto” con la disciplina; alcuni hanno difficoltà di approccio allo studio legate sia alle difficoltà intrinseche della matematica quali ostacoli epistemologici (Brousseau, 1976), misconcezioni consolidate da pratiche didattiche inadeguate nel primo ciclo (Sbaragli e Santi, 2011) e nella scuola secondaria superiore (funzioni, Tall e Vinner, 1981; infinito, Arrigo e D'Amore, 1999; limiti, Bagni, 1999; disequazioni, Bazzini e Tsamir, 2001) sia alle difficoltà in matematica (Zan, 2007). Oltre alle difficoltà legate ad ostacoli epistemologici e didattici in matematica, molte ricerche hanno mostrato difficoltà legate ai diversi usi del linguaggio come, ad esempio, il rapporto tra linguaggio verbale e formale (Ferrari, 2003). Altre difficoltà sono dovute a specificità linguistiche del testo matematico (D'Amore, 2000; Branchetti e Viale, 2015), all'uso di diversi sistemi di rappresentazione semiotica (Duval, 1993) e di gesti (Arzarello, 2006), alla formulazione dei testi dei problemi e alla relazione tra contesti presentati e domande proposte (Zan, 2012).

Queste difficoltà sembrano amplificarsi in corsi di studio in cui gli esami di Matematica vengono visti dallo studente come un necessario passaggio o come “un sacrificio da espiare” per poter procedere negli studi. La ricerca relativa alla didattica universitaria si sta diffondendo nell'ultimo decennio in Europa (è nata una rete di ricercatori INDRUM che si occupa solo di questo tipo di ricerche); in Italia è però poco articolata e si può affermare che solo un esiguo numero di ricerche sia stato condotto in questa direzione. In classi eterogenee per etnia, abitudini linguistiche, appartenenza a classi sociali diverse, competenze di base differenti, le difficoltà evidenziate acquistano una certa rilevanza, di cui è necessario tener conto nella progettazione didattica. Inoltre, la forma di pensiero prevalente degli studenti è quella algoritmica (Fandino Pinilla, 2008) e l'approccio alla risoluzione di un problema sembra essere più basata sull'analogia con problemi simili, e lo studio della matematica viene associato alla memorizzazione di tecniche da usare di fronte a problemi prestabiliti. Delegandola all'algoritmo, lo stu-

dente rinuncia alla “responsabilità” di impostare un processo risolutivo basato su un approccio concettuale alla disciplina e associa spesso l'utilizzo di procedure formalizzate alla natura stessa della matematica. Questi fenomeni sono ben noti e ampiamente studiati dai ricercatori in didattica della matematica, soprattutto dalla parte della scuola francese che si è maggiormente occupata di studiare clausole ed effetti del contratto didattico, e prendono il nome di *delega formale* e *esigenza della giustificazione formale* (Brousseau, 1998).

Da queste considerazioni nasce il tentativo di cercare nuove strade da percorrere per un processo di insegnamento/apprendimento efficace. A questo scopo è stata condotta una sperimentazione con studenti del primo anno di corso di studi in Ingegneria Chimica dell'Università di Salerno durante il corso di Matematica. Questo corso è stato sempre condotto secondo un'impostazione didattica tradizionale: venivano alternate lezioni frontali ed esercitazioni con verifica scritta e orale alla fine del primo semestre, volte a valutare soprattutto conoscenze. Si è tentato un approccio didattico di tipo “blended” che ha previsto, accanto a lezioni tradizionali, lezioni con metodologia “flipped”, integrata, laddove è stato possibile, con Peer Discussion e Just-in-Time Teaching e orientata al rafforzamento e sviluppo delle competenze matematiche. È stato, inoltre, sperimentato un approccio e-learning attraverso la piattaforma sociale “Edmodo” e un gruppo Facebook di cui facevano parte tutti gli iscritti al corso. L'approccio e-learning ha consentito agli studenti di rapportarsi continuamente con il docente e i tutor ed ha permesso di attivare anche dinamiche di peer-education, grazie ad un confronto costante tra tutti i membri del gruppo classe. L'ipotesi della ricerca è che un cambio di metodologia nella didattica della matematica universitaria, soprattutto in Corsi di Laurea in cui la disciplina ha ruolo “di servizio” rispetto ad altre discipline di indirizzo, possa influenzare in modo decisivo l'apprendimento. Questa dovrebbe consentire di agire sulla motivazione e di arginare parzialmente le difficoltà dovute a un contratto didattico che vede lo studente in atteggiamento imitativo e orientato alla riproduzione di procedure. Si ipotizza, infatti, che attraverso la collaborazione coi pari e tramite un coinvolgimento diretto degli studenti, anche mediato dalle tecnologie, si possano riattivare dei processi di apprendimento più significativi e duraturi.

Tra le tante metodologie, dopo un'analisi della letteratura di ricerca sul tema, ci è parso opportuno sceglierne alcune la cui attenzione è centrata sullo studente, sui suoi bisogni e sulle sue necessità epistemologiche. Si è pensato così di integrare la “Didattica capovolta” più conosciuta come Flipped Learning o Flipped Classroom (FC)<sup>1</sup> con altre metodologie di insegnamento attive quali il Just-in-Time Teaching, il Cooperative Learning, l'E-learning, la Peer-Education. Tuttavia, per non sconvolgere completamente il percorso di insegnamento così come si è andato consolidando negli anni, alcune lezioni sono state erogate con il metodo tradizionale. Ne è venuta fuori una didattica ibrida (Blended Learning) in cui si intersecano diverse metodologie didattiche (Figura 1).

---

<sup>1</sup> Testi più specialistici evidenziano la differenza tra le due espressioni.

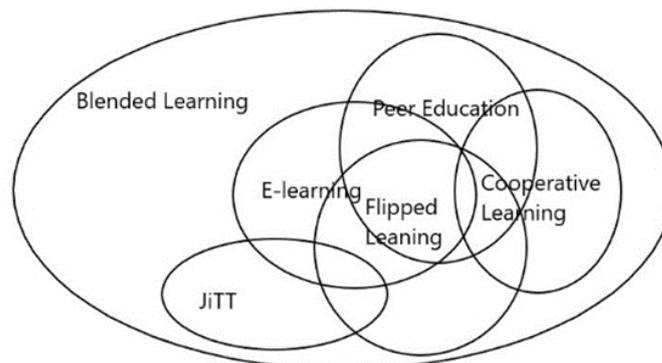


Figura 1

## 2. Contesto della ricerca

Gli studenti iscritti al primo anno di Ingegneria Chimica dell'Università di Salerno, con i quali è stata fatta questa sperimentazione didattica, hanno una provenienza scolastica piuttosto eterogenea: su 128 studenti intervistati, 90 (pari al 70,3%) studenti hanno frequentato il Liceo Scientifico, 14 studenti (pari al 10,9%) il Liceo Classico, 12 studenti (pari al 9,4%) altri tipi di Liceo, 6 studenti (pari al 4,7%) hanno frequentato un Istituto Tecnico, 4 studenti (pari al 3,1%) un Istituto Tecnico a indirizzo Chimico, 2 studenti (pari al 1,6%) ha, infine, frequentato un Istituto Professionale.

Ad un questionario somministrato all'inizio del corso, solo una parte degli studenti ha dichiarato di aver già affrontato gli argomenti previsti dal piano di studi (21,9%), la maggior parte (73,4%) ha dichiarato di aver affrontato solo in parte gli argomenti oggetto del corso, mentre una parte, seppure esigua (4,7%) ha dichiarato di non aver mai affrontato gli argomenti oggetto del corso.

Di fronte ad una pluralità sia di percorsi di studio seguiti, sia di stili cognitivi, si è riscontrata l'esigenza didattica di prevedere percorsi individualizzati.

## 3. La metodologia Flipped nella letteratura di ricerca pedagogica e didattica

La comunità educativa fin dal 2007 ha posto una sempre crescente attenzione per il concetto di "classe capovolta" (Bergman and Sams, 2012) come tentativo di dare svolta al modello tradizionale di didattica trasmissiva di tipo upside-down (Mazur, 2009).

La FC, nella sua idea originaria, consiste nel capovolgere i tradizionali momenti didattici ovvero la lezione e le attività di studio individuale: ciò che tradizionalmente aveva luogo in classe (la lezione frontale) viene svolto a casa e ciò che si svolgeva a casa (i compiti) è affrontato in classe (Slomanson, 2014; Bishop & Verleger, 2013). In altri termini, al modello tradizionale basato su tre momenti ovvero la lezione frontale in classe, lo svolgimento di compiti a casa e la verifica, viene sostituito un modello distinto in tre fasi principali: nella fase di attivazione, che generalmente avviene a casa, lo studente fruisce autonomamente dei contenuti che il docente consiglia e mette a disposizione; a questa fase segue in classe una fase di approfondimento e una fase di esercitazione, anche in piccoli gruppi, sotto la guida del docente regista.

Gli studenti arrivano in classe possedendo già una pre-conoscenza generale degli argomenti da trattare in modo tale che può essere dedicato maggior tempo a lavorare sulle attività chiave dell'apprendimento (Bergmann, Overmyer & Wilie, 2011). Queste idee sembrano ben adattarsi alla cornice teorica dell'Enattivismo, che ha offerto una serie di suggestioni molto significative per permettere di ipotizzare una nuova concezione del processo conoscitivo e del ruolo del soggetto in esso. In relazione alla sperimentazione, molti elementi della teoria enattiva sono stati presi in considerazione: la centralità del soggetto discente, la funzione del docente da trasmissiva a propositiva; l'abbandono di una struttura rigida e gerarchica degli argomenti trattati e l'adozione di una struttura più flessibile; si è data elevata importanza alla metacognizione e ai diversi stili di apprendimento degli studenti. Con l'Enattivismo lo studente è visto immerso nella realtà, nel contesto educativo, nell'ambiente di apprendimento (Varela *et al.*, 1991). La conoscenza diviene enazione del mondo, ovvero produzione ed elaborazione di significati a partire da esperienze e azioni nel mondo e sul mondo, rese possibili dal possesso di un corpo che lo studente pone in contatto con l'esterno e con l'altro da sé. Pertanto, si è cercato di scegliere sempre problemi che premettero allo studente un apprendimento situato (Lave e Wenger, 1991) facendo in modo che la conoscenza non fosse un insieme di operazioni formali e non fosse fatta di manipolazioni su simboli astratti. Il soggetto, inoltre, non riceve passivamente informazioni dall'ambiente per poi tradurle in rappresentazioni mentali ma partecipa attivamente a creare i significati per lui rilevanti ai fini del mantenimento della propria identità ed integrità. L'Enattivismo sostiene l'idea che la conoscenza non è un processo soltanto razionale-cognitivo e prettamente individuale, ma è un flusso circolare e continuo di interazioni senso-motorie tra cervello-corpo-ambiente.

#### 4. Didattica per competenze: le metodologie didattiche usate

Questo articolo esamina il tentativo di integrare i benefici didattici provenienti dall'utilizzo della Flipped Classroom con la metodologia Just-in-Time Teaching (JiTT) utilizzando un approccio didattico di tipo *blended on line* e in-class format (Novak et al. 1999) in un ambiente di apprendimento centrato sull'allievo: Student-Centered Active Learning Environment with Upside-down Pedagogies (SCALE-UP). Questa metodologia ibrida è stata chiamata Half-Flipped Classroom (HFC). Nella pratica, invece di "capovolgere la classe", si è tentato di "capovolgerla a metà": sono stati assunti i benefici adottati dalla Flipped Classroom, scelta dettata sia da mo-

tivazioni sociali che didattiche ma soprattutto dall'intenzione di creare un ambiente di apprendimento centrato sullo studente e non sul programma, sul testo o sul docente abituato a rivestire una funzione prevalentemente trasmissiva (Capone et al., 2017). Tuttavia, non sempre è stato possibile attivare una didattica attiva in classe per la numerosità degli studenti e così si è riscontrata la necessità di integrare altre metodologie didattiche, come meglio specificato nel paragrafo successivo. Lo scopo è stato quello di creare sia un ambiente di apprendimento che una comunità di ricerca, un laboratorio vivo, che stimoli idee ma soprattutto motivi lo studente cercando di garantirgli il successo formativo. Inoltre, si è cercato di rinunciare alle espressioni "acquisizione di conoscenza" e "transfer di apprendimento" e pensare all'apprendimento, in termini di partecipazione periferica legittima (Lave e Wenger, 1991), ad attività socialmente organizzate intendendo il processo educativo come ricostruzione sociale partendo dalle forme biologiche del comportamento (Vygotskij, 1987).

Inoltre, si è lavorato per competenze con l'obiettivo di sviluppare il Decision Making (DM) adattivo (Payne et al, 1988), ovvero la capacità dello studente di operare risolvendo problemi in situazioni complesse. Questo tipo di DM si contrappone al DM veridittivo, che chiede di individuare la risposta giusta e chiede al soggetto di trovare una soluzione efficace tra diverse possibili. Sembra che lavorare per competenze sviluppi l'agire strategico, e abitui lo studente a fare previsioni; sembra sviluppare, inoltre, la riflessività e il pensiero critico. La consapevolezza e la quota metacognitiva sono due degli elementi più significativi che il lavoro per competenze consente di mettere a fuoco. A fronte di questi vantaggi, il lavorare per competenze ha richiesto al docente di modificare il suo modo di progettare e di valutare. Il percorso didattico è stato suddiviso così in unità di apprendimento e sono stati evidenziati, per ciascuna unità, i traguardi di competenza e i traguardi formativi, esplicitati attraverso indicatori di competenza. Nella tabella di seguito è riportato un esempio relativo all'unità di apprendimento sul calcolo dei limiti.

Unità di apprendimento	Competenze		
	Obiettivi di apprendimento	Traguardi formativi	Indicatori
Il calcolo dei limiti	Utilizzare le tecniche dell'analisi, rappresentandole anche sotto forma grafica. – Individuare strategie appropriate per risolvere problemi. – Utilizzare gli strumenti del calcolo differenziale nella descrizione e modellizzazione di fenomeni di varia natura.	Calcolare i limiti di funzioni e successioni	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcolare il limite di somme, prodotti, quozienti e potenze di funzioni</li> <li>- Calcolare limiti che si presentano sotto forma indeterminata</li> <li>- Calcolare limiti ricorrendo ai limiti notevoli</li> <li>- Confrontare infinitesimi e infiniti</li> <li>- Calcolare il limite di successioni</li> <li>- Studiare la continuità o discontinuità di una funzione in un punto</li> <li>- Calcolare gli asintoti di una funzione</li> <li>- Disegnare il grafico probabile di una funzione</li> </ul>

## 5. L'apprendimento sociale e la piattaforma Edmodo

In accordo con il fatto che "ogni funzione dello sviluppo culturale compare prima sul piano sociale e poi su quello psicologico, prima compare tra le persone come categoria interpsicologico-

gica, poi all'interno dello studente come categoria intrapsicologica" (Vygotskij, 1987, p.11), si è cercato di favorire il confronto tra pari. Sono stati utilizzati per questo scopo la piattaforma sociale "Edmodo" e un gruppo Facebook con tutti gli iscritti al corso.

Edmodo è una piattaforma digitale pensata per operare con gruppi di studenti in ambiente protetto. Visivamente si presenta con uno spazio centrale dove appaiono i messaggi, racchiuso fra due riquadri di servizio, a destra e a sinistra, come in Figura 2.

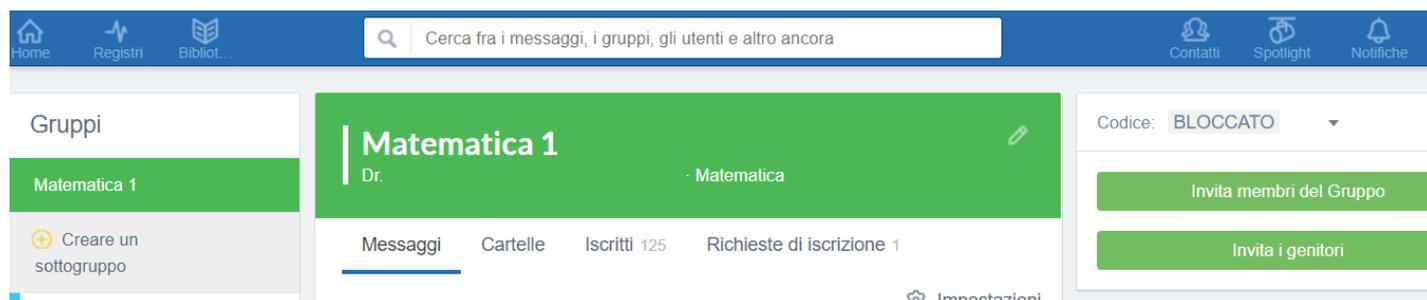


Figura 2 – Homepage del gruppo Edmodo di Matematica 1

All'interno del gruppo, la comunicazione può essere uno-a-molti (il docente a tutti, uno studente a tutti) oppure discreta, fra insegnante e studente. Oltre a dialogare con il docente, gli studenti possono inviare allegati sotto forma di documenti che l'insegnante annota online e rispedisce al mittente (anche nella modalità uno-a-uno). Altri utili strumenti che offre la piattaforma sono una biblioteca condivisa dove si possono conservare documenti, immagini, un calendario dove segnare le scadenze del lavoro domestico e le date delle verifiche, la possibilità di creare quiz, la possibilità di gestire valutazioni proteggendo la privacy. L'approccio e-learning ha consentito agli studenti di rapportarsi continuamente con il docente e i tutor ed ha permesso di attivare e promuovere processi di *peer education* tramite un confronto costante tra tutti i membri del gruppo classe.

Rispetto all'idea originaria, il nostro approccio didattico è stato un tentativo di capovolgere la classe a metà. Agli studenti veniva fornito il materiale didattico attraverso la piattaforma Edmodo e venivano proposti semplici esercizi di cui discutere in classe. Il materiale didattico fornito preventivamente agli studenti e i relativi esercizi hanno avuto lo scopo di innescare una discussione sul web tra gli studenti stessi in modo tale che il docente riuscisse a capire il punto di vista dell'allievo in merito agli argomenti da trattare. La lezione in presenza prendeva spunto dalle conoscenze degli studenti e veniva orientata anche in base agli errori più comuni commessi o a eventuali misconcezioni documentate e analizzate in precedenti ricerche di cui ci si accorgeva durante il dibattito. Altro motivo della scelta di capovolgere la classe solo a metà è stato dettato da esigenze logistiche; infatti, il corso è stato seguito in media da 100 studenti e così spesso diventava difficile per il docente rispondere alle esigenze formative di

tutti gli studenti utilizzando esclusivamente pratiche didattiche “in-class format”. Dell’idea originaria di FC è stato preso comunque il quadro teorico di riferimento e le finalità educative. Infatti, si è cercato di creare un ambiente di apprendimento centrato sull’allievo (student-centered learning) che sfruttasse le tecnologie informatiche e favorisse la collaborazione tra pari. Si è cercato, inoltre di favorire l’apprendimento autoregolato (Self Regulated Learning, SRL) definito come un “insieme di processi attraverso i quali gli studenti attivano e sostengono personalmente le cognizioni, gli aspetti emotivi ed emozionali e i comportamenti che sono sistematicamente orientati verso i propri obiettivi” (Zimmermann e Schunk, 2011, p.1). Non è stato mai sottovalutato, inoltre, l’aspetto emotivo-emozionale per il successo formativo dello studente affinché imparasse a gestire in modo autonomo, attivo e consapevole il proprio processo di apprendimento. L’interazione in una comunità virtuale è stata utile anche perché ha permesso in modo più naturale il passaggio da un registro linguistico colloquiale ad un registro linguistico formale.

Come si può vedere dalla Figura 3, il dialogo tra studenti, anche quando avveniva con un linguaggio colloquiale, ha consentito al docente di enucleare alcune difficoltà di approccio allo svolgimento degli esercizi.

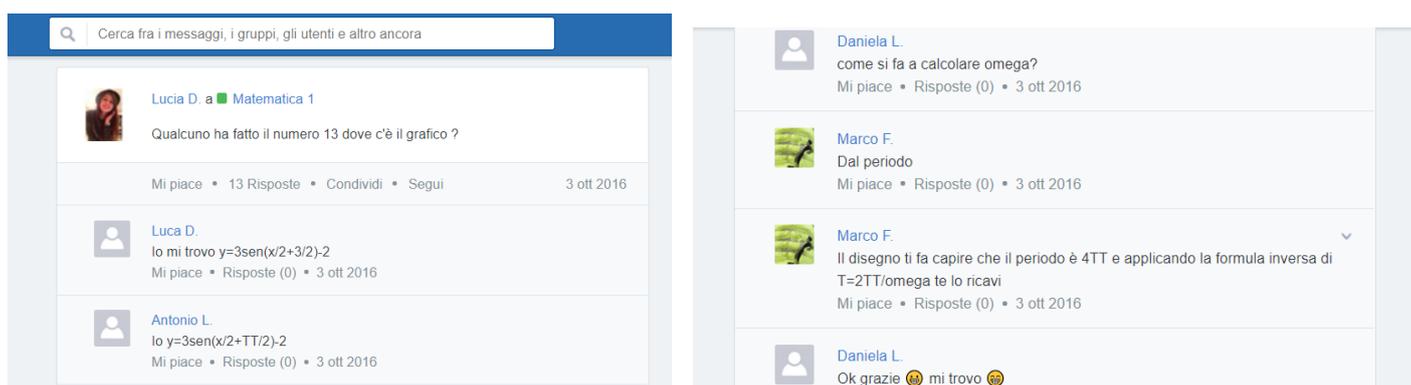


Figura 3 – Stralci di finestre di dialogo tra studenti

È stato possibile, così, grazie ai post condivisi e ai commenti lasciati dagli studenti, individuare “Just in time” nuclei tematici da approfondire in aula e intervenire anche su alcune misconcezioni.

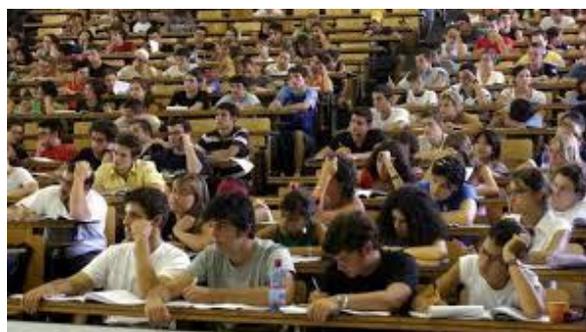
## 6. L’ambiente di apprendimento SCALE-UP

SCALE-UP è un ambiente di apprendimento creato in modo specifico per facilitare l’apprendimento attivo e collaborativo tra studenti. Gli spazi sono attentamente progettati per faci-

litare le interazioni tra gruppi di studenti che lavorano su compiti generalmente di breve durata. Un decennio di ricerca indica miglioramenti significativi nell'apprendimento (Y. Dori e J. Belcher, 2004). Si è pensato di adottare questo modello riprendendo le sperimentazioni fatte al Massachusetts Institute of Technology di Boston e adattandolo alle specifiche esigenze del corso.



*Figura 4 – A sinistra un ambiente di apprendimento SCALE-UP al MIT di Boston, a destra un'aula disposta in modo tradizionale*



*Figura 5 – A sinistra un laboratorio SCALE-UP dell'Università di Salerno; a destra un'aula con disposizione tradizionale degli studenti presso la facoltà di Ingegneria*

## 7. Risultati intermedi e valutazione sommativa finale

L'attività didattica è stata costantemente monitorata, oltre che attraverso i sistemi informatici, anche attraverso tre prove intercorso che hanno avuto una funzione sia di valutazione formativa che di valutazione sommativa. Ciò ha permesso di individuare precocemente le difficoltà di alcuni studenti, soprattutto in termini di competenza matematica. Per gli studenti che hanno manifestato diffuse lacune di base dopo la prima prova intercorso, è stata suggerita una integrazione dello studio con due ore aggiuntive di lezioni gestite utilizzando la metodologia *cooperative learning*, seguendo la logica del Mastery Learning, secondo cui in un tempo sufficiente e con opportune modifiche metodologiche, tutti gli studenti possono raggiungere traguardi di base in ogni disciplina. Tali ore integrative si sono svolte in un ambiente di apprendimento SCALE-UP. Gli studenti sono stati suddivisi in piccoli gruppi ed hanno lavorato con la presenza di un tutor che ha supportato gli studenti in tutta la fase di recupero delle competenze di base. Lo spazio di apprendimento è stato progettato per facilitare l'interazione degli studenti, nonché l'interazione tra i gruppi. A seguito dei primi interventi didattici basati sulla nuova metodologia descritta, sono stati rilevati i risultati degli studenti in termini di sviluppo di competenze matematiche di base.

Di seguito è riportato un esempio di quesito proposto agli studenti nella prima prova intercorso:

Ti è data la funzione

$$f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$$

1. Trova  $a, b, c$  in modo che il suo grafico sia simmetrico rispetto all'asse  $y$ , passi per il punto  $\left(1; \frac{7}{2}\right)$  e  $f(0)=4$ ;
2. Calcola per quali valori di  $x$  si ha  $f(x) \geq \frac{9}{2}$
3. Esprimi analiticamente la funzione  $g(x)$  il cui grafico è simmetrico di quello di  $f(x)$  rispetto alla retta di equazione  $y = 6$ . Argomenta il procedimento eseguito.

Di seguito è riportato un esempio di quesito proposto agli studenti nella seconda prova intercorso:

Ti è data la funzione

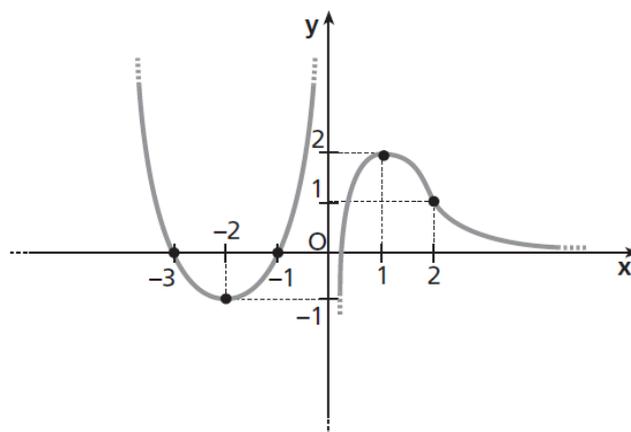
$$f(x) = \arctg\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

1. Traccia il grafico della funzione  $y = f(x)$
2. Traccia il grafico della funzione  $y = |f(x)|$  a partire dal grafico della funzione rappresentata al punto precedente.
3. Spiega come hai ricavato il grafico  $y = |f(x)|$  a partire da quello di  $y = f(x)$
4. Per quale valore di  $a$  la retta di equazione  $y = ax + 3$  è tangente alla funzione? Motiva la risposta

Di seguito è riportato un esempio di quesito proposto ad una prova d'esame:

In figura è rappresentato il grafico della funzione  $y = f(x)$ .

- Immagina di essere al telefono con un tuo amico; descrivigli la funzione
- A partire dal grafico illustrato, traccia l'andamento del grafico della derivata prima della funzione.



In letteratura ci sono molti studi che raccomandano cautela con quest'ultimo tipo di esercizi, perché grafici di questo tipo sono caratterizzati da numerosi impliciti, non potendosi prevedere che cosa succede ai grafici al di fuori della zona di visibilità (Ferrari, 2004).

Il quesito proposto agli studenti, tuttavia, non ha lo scopo di fare un'analisi approfondita del ruolo della componente figurale nei processi di apprendimento della matematica ma di verificare se lo studente è in grado di analizzare il grafico anche evidenziandone le ambiguità e i limiti che inevitabilmente caratterizzano ogni rappresentazione di un concetto matematico astratto; l'individuazione di ambiguità e impliciti nella rappresentazione è infatti un indicatore di competenza matematica.

Come si può desumere da questi esempi di quesiti forniti agli studenti durante le prove intercorso e alla prova d'esame, si è cercato di verificare le competenze acquisite dallo studente ovvero "la comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali e metodologiche per risolvere situazioni problematiche non note" (EQF, 2006). Le competenze dello studente sono state valutate tenendo conto delle seguenti dimensioni: risorse, ovvero conoscenze e abilità di base dell'allievo; strutture di interpretazione, ovvero come lo studente legge e interpreta situazioni problematiche; strutture in azione, ovvero come lo studente reagisce di fronte ad un problema; strutture di autoregolazione, ovvero come lo studente apprende dal-

l'esperienza e adatta le proprie strategie alle sollecitazioni provenienti dal contesto (Trincherò, 2012). Nel caso particolare dell'ultimo quesito, le dimensioni di competenza valutate sono le seguenti:

Risorse	Conoscere il concetto di campo di esistenza di una funzione, di intersezione con gli assi coordinati, di massimo e minimo relativi, di concavità e convessità, di flesso.
Strutture di interpretazione	Saper cogliere il fatto che la soluzione del problema non sta nell'applicazione di un algoritmo, ma in un ripensamento del grafico della funzione
Strutture di azione	Saper ricondurre il grafico di una funzione di cui non si conosce l'espressione analitica ad una funzione di cui se ne riescono a desumere verisimilmente le caratteristiche.
Strutture di autoregolazione	Saper valutare le proprie strategie confrontandole con gli obiettivi e con i dati a disposizione.

La valutazione delle competenze è stata condotta sulla base della seguente rubrica di valutazione (in tabella sono descritti i quattro livelli di competenza e la corrispondenza tassonomica tra fascia, livello di competenza e voto):

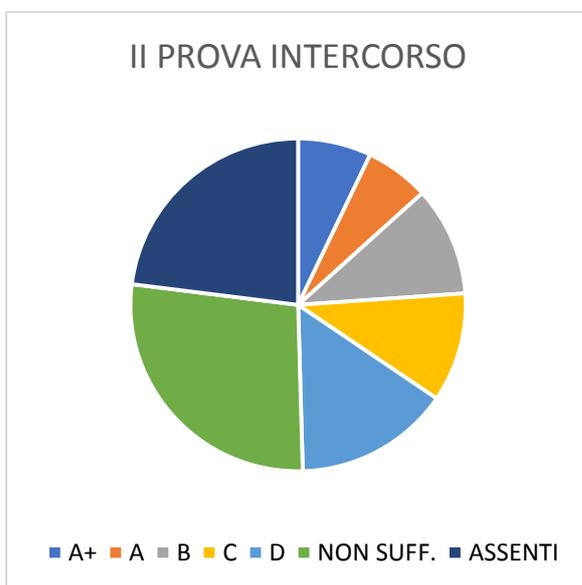
<b>A+/A</b> Livello avanzato	<b>B</b> Livello alto	<b>C</b> Livello medio	<b>D</b> Livello iniziale
<p><b>Lo studente:</b> Pianifica la sequenza delle procedure del calcolo autonomamente. Descrive con precisione e correttezza tutte le sequenze prese in esame e individua il loro possibile utilizzo. Padroneggia gli strumenti del calcolo infinitesimale. Utilizza in modo appropriato il linguaggio specifico della disciplina</p>	<p><b>Lo studente:</b> Utilizza le tecniche dell'analisi, rappresentandole anche sotto forma grafica. Individua le strategie più appropriate per risolvere problemi. Utilizza in maniera appropriata gli strumenti del calcolo differenziale nella descrizione e modellizzazione di fenomeni di varia natura.</p>	<p><b>Lo studente</b> Utilizza le tecniche dell'analisi, rappresentandole anche sotto forma grafica pur con qualche incertezza; individua le strategie per risolvere problemi; utilizza gli strumenti del calcolo differenziale nella descrizione e modellizzazione di fenomeni di varia natura.</p>	<p><b>Lo studente</b> Utilizza le tecniche dell'analisi, non sempre rappresentandole in forma grafica, pur con qualche incertezza; individua le strategie per risolvere problemi commettendo ancora qualche lieve errore procedurale; utilizza gli strumenti del calcolo differenziale non sempre riuscendo a descrivere il modello presente in natura</p>

<b>FASCIA</b>	<b>CORRISPONDENZA TASSONOMICA tra livello di competenza e voto</b>	<b>LIVELLO DI COMPETENZA</b>
A (A+)	27-30 (con lode)	AVANZATO
B	23-26	ALTO
C	20-22	MEDIO
D	18 – 19	INIZIALE

La prima prova intercorso evidenzia un numero piuttosto elevato di studenti che non hanno raggiunto sufficienti livelli di competenza relativamente agli argomenti oggetto di studio e solo pochi studenti hanno acquisito un livello avanzato, come evidenziato in tabella:

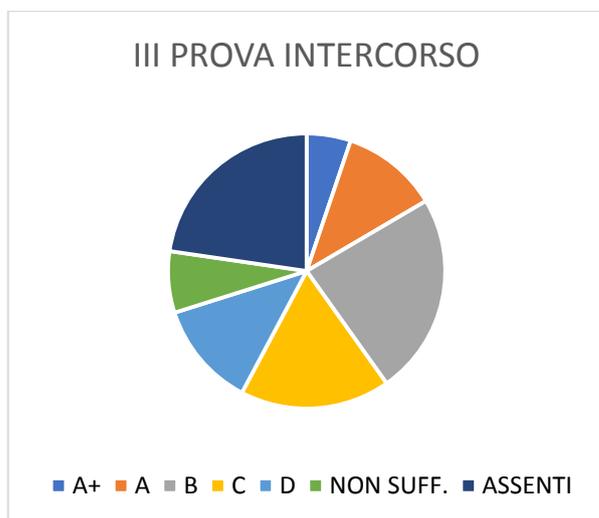


FASCIA	PERCENTUALE STUDENTI
A e A+	3%
B	6%
C	15%
D	18%
NON SUFF.	42%
Assenti	16%



FASCIA	PERCENTUALE STUDENTI
A e A+	14%
B	10%
C	10%
D	16%
NON SUFF.	27%
ASSENTI	23%

La seconda prova intercorso evidenzia un netto aumento sia degli studenti che hanno riportato una valutazione positiva sia degli studenti che hanno superato brillantemente la prova, evidenziando competenze avanzate.



FASCIA	PERCENTUALE STUDENTI
A e A+	14%
B	20%
C	15%
D	10%
NON SUFF.	6%
ASSENTI	19%

Ancora più soddisfacenti sono i risultati riportati dagli studenti nella terza prova, dopo aver attivato interventi educativi personalizzati e in piccoli gruppi.

## 8. Analisi dei risultati del test *affect*

Sia all'inizio del corso che alla fine del corso è stato somministrato agli studenti un questionario in cui sono state poste loro delle domande che evidenziassero il loro atteggiamento nei confronti della matematica. (Di Martino & Zan, 2011). Il questionario è stato denominato *test affect*, terminologia ripresa dalla ricerca in psicologia (Goldin, 2002) e già usato in altri contesti specifici della ricerca in didattica della matematica (Capone *et al.*, 2017).

Dal test somministrato all'inizio del corso emerge che non per tutti il rapporto con la matematica era positivo, anzi il 44% del campione dichiara di non aver avuto un buon rapporto con la matematica e per il 37% di questi l'atteggiamento dei confronti della disciplina è diventato negativo a partire dai primi due anni della Scuola Secondaria di II grado. È stato chiesto di "descrivere la matematica con tre aggettivi". Gli aggettivi più ricorrenti sono stati: monotona, difficile, impegnativa, complessa. È stato poi chiesto: "Scrivi tre emozioni che associ alla parola matematica". Le risposte più ricorrenti sono state: ansia, sconforto, noia, paura, soddisfazione, inadeguatezza, rigore, formalismo. Questi risultati sembrano in linea con altre ricerche

di questo tipo (Di Martino & Zan, 2011). Alla fine del corso è stato somministrato lo stesso test affect (Capone *et al.*, 2017). Da questo si evince che, nel 22% del campione, le parole: ansia, paura, difficoltà vengono sostituite dalle parole: sfida, successo, gratificazione. Diminuisce inoltre del 24%, la presenza dell'aggettivo 'monotona', mentre rimane stabile la presenza delle parole 'impegnativa' e 'complessa'. Alla fine del corso, sembra emergere, pertanto, una migliore predisposizione allo studio della disciplina; dal test di gradimento, infine, emerge l'apprezzamento dell'utilizzo di metodologie didattiche alternative dalla maggior parte degli studenti (il 79% apprezza moltissimo le innovazioni didattiche del corso, il 10% apprezza molto, per il 7% non ha influito in maniera determinante per il successo formativo, il 4% preferisce una didattica più tradizionale).

I risultati sono stati confrontati anche con i risultati dei 117 studenti della coorte precedente che hanno frequentato lo stesso corso, attraverso una stessa tipologia di prova di valutazione. Si rileva che l'81% degli studenti ha superato l'esame nella sessione invernale contro il 60% della coorte precedente. Inoltre, il 58% ha raggiunto risultati buoni rispetto al 32% dell'anno precedente. I dati riportati sembrano confermare i dati di un decennio di ricerca che evidenzia miglioramenti significativi nell'apprendimento in seguito alla attivazione di percorsi didattici centrati sullo studente (Beichner *et al.*, 2006, Dori & Belcher, 2004).

In particolare, la metodologia SCALE-UP sembra fornire risultati di apprendimento coerenti con le tesi sostenute dagli esponenti del costruttivismo sociale e delle idee di Vygotskij, in quanto gli studenti mostrano di migliorare le loro competenze sotto la guida di un peer più capace agendo nella zona di sviluppo prossimale. È da notare, dai risultati riportati in tabella, relativi alla seconda prova intercorso, che si riscontra un miglioramento delle *performance* degli studenti rispetto alla risoluzione dei problemi; si può notare anche come sia aumentato l'apprendimento di tipo concettuale (Fandino Pinilla, 2009).

## 9. Conclusioni

Recenti studi confermano che la FC attiva un apprendimento che rispetta le esigenze degli studenti, rispetta i tempi e incrementa la motivazione allo studio (Hamdan *et al.*, 2013). La nostra esperienza sembra confermare ulteriormente gli studi citati. Questa prima sperimentazione ha avuto esito positivo e stimola la curiosità per nuove e più approfondite indagini. Nonostante l'esiguità del campione non ci permetta di trarre conclusioni statisticamente significative, è stato osservato un netto miglioramento nella performance della classe sperimentale e un aumento considerevole dell'interesse e della motivazione degli studenti. Il successo dell'intervento didattico è messo in evidenza anche dal numero esiguo di abbandoni (4%) inferiore rispetto alla percentuale dell'anno precedente (10%). Altri aspetti qualificanti dell'esperienza, da sottoporre ad ulteriore verifica, sono stati una facilitazione del recupero da parte di chi è stato assente alle lezioni grazie alla modalità di erogazione e-learning di alcuni contenuti.

## 10. Riferimenti bibliografici

Arrigo, G., D'Amore, B. (1999). Lo vedo ma non ci credo. Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di George Cantor che coinvolge l'infinito attuale. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B, 5, 465-494.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 267-299.

Bagni, G. T. (1999). Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B, 4, 333-372.

Bazzini, L., Tsamir, P. (2001). Research based instruction: widening students' perspective when dealing with inequalities. In *Proceedings of the 12th ICMI Study "The future of teaching and learning of algebra"*, Melbourne, AU, December 2001, 1, 61-68.

Beichner, R., Dori, Y., and Belcher, J. (2006). New Physics Teaching and Assessment: Laboratory and Technology-Enhanced Active Learning. In Mintzes, J., and Leonard, W. (Eds.). *Handbook of College Science Teaching*, Washington DC: National Science Teachers Association.

Bergmann, J., Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. International Society for Technology in Education.

Bishop, J., & Verleger, M. (2013, June). *The flipped classroom: A survey of the research*. Paper presented at the 120th ASEE Annual Conference, Atlanta, GA.

Branchetti, L., Viale, M. (2015). Tra italiano e matematica: il ruolo della formulazione sintattica nella comprensione del testo matematico. In Ostinelli M. (2015). *La didattica dell'italiano. Problemi e prospettive*. Locarno: Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques Grenoble*, 4(2).

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Capone, R., Coppola C., Dello Iacono U., Tortoriello, F. S. (2017). *Competenze matematiche in una dimensione europea – Il progetto Numero Ergo Sum*. Milano: FrancoAngeli.

Capone, R., Del Sorbo, M. R., Fiore, O. A. (2017). Flipped Experience in Physics Education Using CLIL Methodology. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 10, 13.

D'Amore, B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(4), 471-482.

Dori, Y., and Belcher, J. (2004). How does technology-enabled active learning affect undergraduate students' understanding of electromagnetism concepts. *Journal of the Learning Sciences*, 14(2).

Duval, R. (1993). Registres de Représentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

European Commission (2005). *Towards a European Qualifications Framework for Lifelong Learning*. Commission Staff Working Document. Brussels.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

Ferrari, P. L. (2003). Tecnologia informatica e sistemi di rappresentazione nell'insegnamento universitario della matematica. *Convegno UMI*.

Ferrari, P. L. (2004). Matematica ed educazione: il ruolo fondamentale dei linguaggi. *XXI Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica*.

Goldin, G. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structures'. In G. Leder, E. Pehkonen and G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 59-72.

Hamdan, N., McKnight, P., McKnight, K., Artfstrom, K. (2013). The flipped learning model: A white paper based on the literature review, in *Flipped Learning Network*.

Lave, J., Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Mazur, E. (2009). Farewell, lecture. *Science*, 323, 5910, 50-51.

Novak, G. M., Patterson, E. T., Gavrin, A. D., Christian, W., & Forinash, K. (1999). Just in time teaching. *American Journal of Physics*, 67(10), 937-938.

Payne, J. W., Bettman, J. R., & Johnson, E. J. (1988). Adaptive strategy selection in decision making. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 14(3), 534-552.

Sbaragli S., Santi G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education*.

Slomanson, W. (2014). *Blended Learning: A flipped classroom experiment*. *Journal of Legal Education*, 64(1), 93-102.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Trincherò, R. (2012). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*. Milano: FrancoAngeli.

Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience*. Cambridge MA: Massachusetts Institute of Technology Press.

Vygotskij, L. (1987). *Il processo cognitivo*. Raccolta di scritti a cura di Michael Cole, Sylvia Scribner, Vera John-Steiner, Ellen Souberman. Torino: Bollati Boringhieri.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Springer Science & Business Media.

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 35 A.

Zimmerman, B., Schunk, D. H., (2011). *Handbook of Self-Regulation of Learning and Performance*. London: Taylor & Francis.

Received October 28, 2017

Revision received November 25, 2017 / December 17, 2017

Accepted December 30, 2017