

## ***Il problem solving come strategia per una diversa gestione dell'errore nell'educazione matematica al primo ciclo***

**Cristina Coppola**  
**Pietro Di Martino**

**Abstract** – *Errors in the context of school mathematics are often considered as something to be avoided at all costs: there is a sort of identification between difficulties in mathematical learning and errors and between errors and failure of the teaching strategies. Research into mathematics teaching has for some time brought this widespread “epistemology” of error into question. Taking the seminal work of Borasi as their starting point, maths educators have developed a new epistemology of error in line with a growing attention toward productive thinking in mathematical teaching and learning as well as the role of errors in the development of mathematics.*

**Riassunto** – *L'errore in matematica nel contesto scolastico è considerato come qualcosa da evitare assolutamente. Questo perché c'è una implicita identificazione tra errore e difficoltà, e tra errori degli allievi e fallimento dell'insegnamento. Questa diffusa “epistemologia” dell'errore è stata, da tempo, messa fortemente in discussione dalla ricerca in didattica della matematica. A partire dai lavori di Raffaella Borasi, nella ricerca in didattica della matematica si è sviluppata una nuova epistemologia dell'errore coerente con la crescita dell'attenzione allo stimolo del pensiero produttivo nell'insegnamento e apprendimento della matematica e con il ruolo che gli errori hanno avuto nello sviluppo della matematica.*

**Keywords** – error in mathematics, assessment, problem solving, productive thinking

**Parole chiave** – errore in matematica, valutazione, problem solving, pensiero produttivo

**Cristina Coppola** è Ricercatrice a tempo determinato presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Salerno. La sua ricerca in didattica della matematica riguarda principalmente il ruolo dei fattori linguistici in educazione matematica, in particolare le relazioni tra sviluppo di competenze linguistiche e sviluppo di abilità logiche in ambito di problem solving. La ricerca si occupa anche del ruolo dei fattori affettivi in educazione matematica. Ha pubblicato diversi contributi in riviste e libri nazionali e internazionali.

**Pietro Di Martino** è Professore Associato MAT/04 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Pisa. La sua ricerca in didattica della matematica si è sviluppata principalmente sullo studio delle difficoltà in matematica e su come si costruiscono ed evolvono emozioni, convinzioni e atteggiamenti negativi nei confronti della matematica. Ha pubblicato diversi contributi in riviste e libri nazionali e internazionali.

## 1. L'errore in educazione matematica

L'errore ha un ruolo particolare nel percorso educativo: non è un caso che di errore e gestione dell'errore si parli in diversi scritti pedagogici. Proprio in ambito pedagogico, la visione, molto radicata, di errore come aspetto allarmante da evitare è stata messa in discussione negli anni ottanta del secolo scorso da approcci che prevedono analisi fini (che differenziano l'errore a seconda della natura dello stesso e delle attività da cui emerge) e dalla considerazione di nuovi modelli del processo di apprendimento/insegnamento, come il modello socio-costruttivista (Nigris, 2009). A questo proposito, molto nota è la bellissima citazione da "Il libro degli errori" di Gianni Rodari: "Gli errori sono necessari, utili come il pane e spesso anche belli: per esempio la torre di Pisa".

Dal punto di vista dell'insegnamento scientifico, la cosa forse più interessante di questa rivisitazione pedagogica del ruolo e dello status dell'errore in aula è il fatto che nasca da una rilettura del pensiero di Popper. Nella visione di Popper la scienza non è il tentativo di sviluppare teorie certe: obiettivo irraggiungibile vista la fallibilità umana. Questa consapevolezza sottolinea l'importanza del controllo sulle teorie esistenti per scoprirne i limiti. In questo quadro, l'apprendimento dall'errore è alla base di qualsiasi progresso scientifico: "La scienza non ha niente a che fare con la ricerca della certezza, della probabilità o dell'attendibilità. Non siamo interessati allo stabilimento di teorie scientifiche in quanto sicure, certe o probabili. Consapevoli della nostra fallibilità, siamo soltanto interessati a criticarle e a controllarle con la speranza di scoprire dove sbagliano, di apprendere dagli errori e, se abbiamo fortuna, di pervenire a teorie migliori" (Popper, 1969, pp. 392-393).

L'ottica di Popper quindi, seppur riferita all'epistemologia e non direttamente all'insegnamento, ribalta completamente la visione degli approcci che tendono ad evitare le occasioni di errore. È lo stesso Popper ad esplicitare, con toni forti, la condanna a simili approcci, ritornando sull'assunto della fallibilità umana: "Evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l'errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza. In effetti, è dalle nostre teorie più ardite, incluse quelle che sono erronee, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa più grande è imparare da essi" (Popper, 1972, p. 242).

Queste parole (confermate dai tanti esempi nella storia della matematica di errori *rivelatori*<sup>1</sup>) evidenziano un aspetto sicuramente molto rilevante per l'educazione matematica: l'importanza dell'errore, della sua gestione e interpretazione per sviluppare la conoscenza. Federigo Enriques, nel saggio dal titolo eloquente *Il significato della storia del pensiero scientifico*, scrive: "Il maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante della sua arte didattica... E degli errori propriamente detti... nei casi più caratteristici si presentano come tappe naturali del pensiero nella ricerca della verità, il maestro sa valutare il significato educativo: sono esperienze didattiche che egli persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire

---

<sup>1</sup> Non approfondiamo questo aspetto – che d'altra parte è stato trattato a più riprese da diversi storici della matematica – in questo articolo. Alcuni esempi, tra i più noti, si possono trovare anche nel lavoro di Borasi (1996) di cui parliamo in seguito.

da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche ad errare per imparare a correggersi. Tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere” (Enriques, 1936, p. 12).

Trasporre questo approccio all'errore nella pratica didattica si è rivelato non per niente banale. Quali i motivi? In contesto matematico giocano sicuramente un ruolo molto importante le convinzioni epistemologiche degli insegnanti sull'errore in matematica. Tra quelle più diffuse, vi è l'idea che l'errore in matematica non solo sia oggettivo, ma che sia anche un indicatore oggettivo di difficoltà e come tale qualcosa da cercare di evitare.

L'oggettività dell'errore, così come l'identificazione errore-difficoltà, sono due posizioni da diversi decenni messe in crisi dai risultati della ricerca didattica (Zan, 2007). Purtroppo, come sottolineato da Bruno D'Amore nel suo intervento al Convegno UMI-CIIM di Salerno (2014)<sup>2</sup>, la diffusione di tali risultati alla comunità educativa, e talvolta anche alla comunità matematica, è spesso faticosa e molto lenta.

L'epistemologia, molto diffusa, dell'errore in matematica che abbiamo discusso sopra sembra essere la principale causa del divario netto tra la pratica didattica, nel quale l'errore è prevalentemente demonizzato, e le indicazioni provenienti dalla ricerca didattica, che sottolineano la necessità e l'importanza di un approccio costruttivo all'errore nel processo di costruzione della competenza matematica.

Già nel 1980, Radatz (1980) sottolinea, sulla base di numerosi studi, l'importanza dell'errore in educazione matematica ed in particolare come l'interpretazione dell'errore stesso sia una risorsa preziosissima per studenti e insegnanti (similmente a quanto sostenuto da Enriques). L'assunto che l'interpretazione dell'errore in matematica sia univoca è messo magistralmente in discussione da Rosetta Zan (2007): attraverso numerosi esempi tratti dalla ricerca didattica, la ricercatrice italiana spiega e mostra la fondamentale differenza tra osservazione e interpretazione dell'errore, mettendo in crisi l'idea di oggettività dell'errore e della sua gravità.

D'altra parte, è Raffaella Borasi (1996) che propone una visione radicalmente differente dell'errore nel contesto dell'apprendimento matematico, a tutti i livelli. La ricercatrice italo-americana va oltre l'idea dell'errore come strumento didattico per l'interpretazione di difficoltà e, sulla base anche di paralleli con la storia della matematica, teorizza ed esemplifica un approccio all'errore come “trampolino per la scoperta” nel processo di apprendimento e insegnamento della matematica. In particolare, Borasi introduce la metafora del “perdersi” per mostrare come il valore dato all'errore dipenda dal contesto, dallo scenario: se ho fretta e ho bisogno di arrivare velocemente in un luogo, perdermi potrebbe essere una *tragedia*; se mi perdo la prima volta che torno a casa dalla nuova sede di lavoro, potrei essere infastidito dall'aver sbagliato strada, ma allo stesso tempo potrei imparare strade alternative; se sto visitando una città, anche con una precisa destinazione, potrei non essere dispiaciuto nel perdermi e avere la possibilità di visitare luoghi imprevisi.

<sup>2</sup> Il testo dell'intervento è scaricabile al seguente URL: [http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/12/VF-DAmore\\_Testo-Conferenza-per-Salerno.pdf](http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/12/VF-DAmore_Testo-Conferenza-per-Salerno.pdf).

Ebbene, con in mente questa metafora, ci sembra che nel percorso di apprendimento della matematica la maggior parte degli scenari dovrebbe essere del secondo e del terzo tipo, mentre in realtà sappiamo che nella pratica didattica spesso non è così.

Borasi (1989; 1996) sviluppa una vera e propria tassonomia delle tipologie di uso costruttivo in classe degli errori degli studenti. Riconosce (ed illustra con diversi esempi di diversi livelli scolari) in particolare tre macro-situazioni legate alla metafora del perdersi, riuscendo comunque a costruire un approccio costruttivo all'errore anche nel primo caso:

– Si richiede di analizzare direttamente gli errori prodotti rispetto ad una domanda della quale si conosce già la risposta (può essere stata data anche alla fine dell'attività). In questo modo lo studente, cercando di identificare gli errori commessi, compie un lavoro attivo nel comprendere la natura del problema e della sua soluzione;

– Si propone una domanda, un problema che ammette più risposte. In questo caso, l'analisi degli errori può portare a trovare risposte diverse da quelle emerse dalle produzioni corrette;

– Si propone una domanda aperta (ad esempio le congetture di regolarità, molto usate in educazione matematica) per la quale non c'è in partenza una risposta nota. In questo caso, proprio dall'analisi degli errori molto spesso nascono proprio le esplorazioni più fruttuose.

Borasi però non si limita a fare la tassonomia delle tipologie di uso costruttivo degli errori, ma, partendo da alcuni errori tipici – e quindi particolarmente rilevanti dal punto di vista didattico – degli studenti dei vari livelli scolari, sviluppa attività significative dal punto di vista matematico. In poche parole, esemplifica l'approccio costruttivo all'errore che va oltre alla mera costruzione, ma che utilizza l'errore come fonte di costruzione di nuova conoscenza e indagine.

Un esempio tipico (tratto da Borasi, 1996) è la semplificazione sbagliata nel trattamento di numeri espressi come frazioni:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Il tipico intervento in classe si limita a mostrare con un controesempio (o più controesempi) che tale semplificazione è errata. Borasi invece suggerisce di sviluppare tutta una serie di domande che portano ad analizzare il concetto di frazione (e di frazione equivalente) e quindi lavorano più in profondità. Ad esempio chiede: “Come mai questo procedimento errato porta in questo caso ad un risultato giusto?” oppure “Ci sono altre frazioni con numeratore e denominatore di due cifre che semplificate in questo modo portano ad un risultato corretto?”.

Se è abbastanza evidente che il protrarsi di un errore come quello brevemente discusso può compromettere lo sviluppo di nuovi concetti e procedimenti matematici, la considerazione interessante dal punto di vista didattico è che la ricerca ha dimostrato come l'intervento puramente correttivo di solito non funziona, nel senso che non ottiene l'effetto desiderato: la maggioranza degli allievi che fanno quell'errore in maniera sistematica, continuano a farlo anche dopo diversi interventi correttivi. Il lavoro proposto da Borasi ha molto più effetto anche rispetto al solo obiettivo di superare quel tipo di errore.

L'approccio suggerito da Borasi ha una chiara complessità: richiede una competenza matematica elevata sia dal punto di vista epistemologico che didattico; ed evidenzia una delle caratteristiche più importanti dell'insegnamento: quella di saper porre *buone* domande.

A parte la complessità di cui sopra, la distanza tra pratica e ricerca sembra essere fortemente condizionata anche dagli obiettivi di apprendimento: in un approccio (molto diffuso nell'insegnamento della matematica in Italia) mirato all'addestramento, e quindi all'attivazione di processi riproduttivi, l'errore è sicuramente sintomo di fallimento e, quindi, qualcosa da evitare. Si genera così un fenomeno allarmante: quello della diffusione della "paura di sbagliare", che più in generale diventa paura della matematica (Di Martino & Zan, 2013).

In un approccio che punta a mettere in gioco il pensiero produttivo, invece, l'errore non solo va messo nel conto, ma può essere veramente decisivo per raggiungere l'obiettivo (Zan, 2007). Un approccio per problemi all'insegnamento della matematica necessita infatti di scelte e pratiche didattiche coerenti e, in particolare, del superamento della paura dell'ignoto, del "non controllato" anche da parte dell'insegnante.

## 2. Problem solving: pratica didattica, Indicazioni Nazionali e l'importanza di spostare l'attenzione educativa sull' affrontare problemi

Il fatto che gli insegnanti tendano a evitare, se possibili, occasioni di errore ai propri studenti è provato dallo sbilanciamento enorme nella scuola italiana e, in particolare, nell'insegnamento della matematica al primo ciclo, in favore di richieste di tipo riproduttivo (esecuzione di procedure note) rispetto a richieste di tipo produttivo (problemi nuovi). Tipicamente l'insegnante, prima di proporre un quesito su uno specifico contenuto matematico, mostra *come si fa* presentando diversi esempi, prova a immaginare e a illustrare tutte le varianti possibili in cui può capitare di mettere in gioco quel concetto matematico (non facendo emergere, tra l'altro, l'importante idea matematica di struttura e alimentando la convinzione che in matematica sia necessario ricordarsi moltissime cose) e poi propone agli allievi attività simili. Da questo punto di vista è indicativo il fatto che molti insegnanti, a commento delle prove INVALSI, esplicitino la loro contentezza quando accade che un quesito proposto da INVALSI sia stato già proposto in classe durante l'anno.

Come sottolinea Zan (2007, p. 27): "Implicita nella preoccupazione di evitare domande 'troppo difficili' c'è spesso la valorizzazione della correttezza dei prodotti, che viene considerata più importante dell'attivazione di processi di pensiero significativi, anche se, come già detto, tale correttezza si può ottenere banalizzando le richieste e di per sé non garantisce un effettivo apprendimento".

È evidente che il peso dell'errore dipenda dal tipo di attività proposta e dall'obiettivo dell'attività. Una prima demarcazione in questo senso può essere proprio tra richieste di tipo riproduttivo (esercizi) e richieste di tipo produttivo (problemi): se nel primo caso l'errore ha un peso evidente – proponendo tali attività si vorrebbe verificare il controllo su algoritmi noti e appunto la capacità di riproduzione corretta – nel secondo caso, l'errore non solo va messo nel conto, ma può essere fonte di approfondimento e apprendimento.

D'altra parte ridurre l'insegnamento della matematica alla riproduzione di algoritmi o fatti noti è sicuramente fortemente discutibile, seppur molto diffuso a livello di primo ciclo: in questo senso significativi sono anche gli esercizi e i cosiddetti problemi a disposizione sui libri di testo di scuola primaria, ma anche di scuola secondaria di primo e secondo grado.

È discutibile perché è quantomeno epistemologicamente limitato, se siamo d'accordo con quanto sottolinea Halmos (1975): "Di cosa si occupa realmente la matematica? Di risolvere problemi", e ancora: "Qual è il miglior modo per imparare a risolvere problemi? Affrontare problemi".

È discutibile perché trasmette una idea di successo e di *bravo* in matematica pericolosa: fa credere ai ragazzi che si è bravi in matematica quando si riesce a dare risposte corrette in poco tempo ad esercizi ripetitivi.

È discutibile perché in aperto contrasto con quanto richiesto dalle *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*, che sottolineano: "Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive" (MIUR, 2012, p. 49).

Per proporre una didattica della matematica diversa, fondata sulla problematizzazione e sui problemi, l'insegnante deve innanzitutto vincere la sua paura dell'errore: la paura che gli studenti sbaglino *troppo*. È un risultato tutt'altro che banale, che passa dal superamento dell'idea che gli errori degli studenti in matematica siano un fallimento dell'insegnante e del suo insegnamento, e anche del superamento dell'idea *duale*, ovvero la convinzione che l'insegnamento della matematica che produce risposte corrette sia un insegnamento che *funziona*, a prescindere dalla qualità delle domande poste e dei processi che hanno portato a quelle risposte ("funzionare" è, a nostro avviso, una parola molto pericolosa in ambito educativo).

Una volta vinta la paura di cui sopra, e, dunque, dopo essersi convinto dell'importanza di proporre questioni difficili agli allievi in matematica, l'insegnante ha un'altra necessità, anche matematicamente molto complessa: *tradurre* didatticamente quel "difficile" in base al contesto classe; in particolare, calibrare la difficoltà in modo che i suoi allievi possano affrontare il problema.

L'uso del verbo "affrontare" non è casuale: è probabilmente la chiave di volta del cambiamento di prospettiva importante che suggeriamo. L'obiettivo didattico nel proporre (veri) problemi di matematica agli allievi non dovrebbe essere tanto e solo quello di risolvere lo specifico problema assegnato di volta in volta, ma quello di *imparare ad affrontare i problemi*, coerentemente con quanto espresso nelle Indicazioni Nazionali ("Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche").



Da questo punto di vista, particolarmente significative ci sembrano le parole del matematico Israel Nathan Herstein nell'introduzione al suo libro *Algebra* (1982), un libro pensato per introdurre l'algebra astratta agli studenti universitari dei primi anni dei corsi di laurea in Matematica, con la consapevolezza che quei contenuti e concetti erano stati fino ad allora considerati troppo avanzati per i primi anni; un libro nato dopo l'esperienza di Herstein in un corso di Algebra con gli studenti migliori del secondo anno della Cornell University. Queste informazioni sono tutt'altro che secondarie: il libro – a nostro avviso bellissimo – è sviluppato avendo in mente una specifica categoria di studenti ai quali, si presume, la matematica piace e che hanno sempre avuto successo in matematica. Come sa chi ha avuto il piacere di usarlo nella preparazione ad un corso di Algebra a livello universitario, ogni paragrafo è corredato da una lista di problemi, mai banali, alcuni dei quali (spesso indicati con asterischi dall'autore) particolarmente complessi. Nell'introduzione, Herstein tocca la questione della delicatezza e soggettività della valutazione della difficoltà di un problema. Tale questione è ancor più complessa a livello di insegnamento di base visto che, come abbiamo sottolineato, in tale contesto deve essere trattata non in assoluto, ma rispetto al contesto classe. Scrive Herstein (1982, p. XIV): "Quelli che per qualche motivo mi sembrano difficili sono contrassegnati con un asterisco (a volte con due). Anche qui sono certo che non ci sarà accordo tra i matematici: molti penseranno che alcuni problemi con l'asterisco non dovrebbero averlo, altri penseranno che problemi senza asterisco dovrebbero, invece, averlo".

D'altra parte, la parte a nostro avviso più bella dell'introduzione, Herstein la dedica allo scopo dei problemi inseriti nel volume: "Due parole sui problemi. Ve ne sono molti, e solo uno studente eccezionale potrebbe risolverli tutti. Alcuni servono solo a completare dimostrazioni del testo, altri hanno lo scopo di illustrare i risultati ottenuti e far pratica su di essi. Molti non vengono proposti *tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati. Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione, quanto nelle idee che fa sorgere in chi la affronta e nei tentativi messi in atto*" (Herstein, 1982, p. XIV).

Se quello di affrontare i problemi è l'obiettivo per chi si presume abbia già una certa padronanza della matematica e comunque ha scelto di fare un percorso matematico a livello universitario, ci sembra debba esserlo a maggior ragione per chi sta iniziando il suo confronto con la matematica. È piuttosto evidente tra l'altro come l'obiettivo primario che l'insegnante (di qualsiasi livello scolare) identifica – affrontare o risolvere il problema – possa incidere fortemente sulla scelta dell'attività: quanto difficile, quanto un vero problema o un esercizio.

### 3. Problem solving: necessità e attività

Come abbiamo cercato di illustrare, l'insegnamento per problemi, di cui molto spesso si parla, ma che raramente è effettivamente messo in pratica (e che, dunque, in un certo senso sarebbe fortemente innovativo a livello di primo ciclo), è un approccio che mira ad obiettivi significativi dell'educazione matematica, in linea con quelli fissati nelle *Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* (MIUR, 2012) e che contribuisce a sviluppare una diversa epistemologia e considerazione dell'errore in matematica.

Un approccio efficace per problemi in educazione matematica necessita però di scelte e pratiche didattiche coerenti.

Abbiamo parlato del necessario cambiamento di prospettiva dell'insegnante che dovrebbe non identificare l'assenza di errori dei suoi studenti come equivalente al successo del suo insegnamento; dovrebbe superare per primo la paura dell'ignoto e del "non controllato"; dovrebbe proporre problemi "non tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati". Queste sono le condizioni preliminari. Poi ci sono gli aspetti relativi alla scelta dei problemi, alla gestione dell'attività di *problem solving* e alla valutazione di ciò che emerge, valutazione in senso epistemologico, cioè al dare valore – a cosa, come e perché – non ad assegnare un voto.

Per quanto riguarda la scelta del problema, Zan e Di Martino (2017) identificano, tra le altre, le seguenti tre caratteristiche come indicatori di un *buon* problema:

- è veramente un problema per gli allievi, ovvero non è collegabile immediatamente a schemi risolutivi visti in precedenza;
- mette in gioco obiettivi di apprendimento significativi per il livello scolastico;
- è inclusivo, ovvero permette l'esplorazione a diversi livelli e diversi approcci risolutivi.

Nella gestione dell'attività di *problem solving*, sempre Zan e Di Martino (2017) sottolineano l'importanza che l'insegnante dedichi sufficiente tempo all'attività di soluzione di un problema, e di conseguenza dia tempo agli allievi per affrontarlo e discutere con gli altri i processi di pensiero attivati; consideri l'errore come naturale nell'attività di soluzione di problemi nuovi e complessi, e perciò lo utilizzi come occasione di costruzione della conoscenza; incoraggi, attraverso le proprie scelte valutative, un'idea di successo in matematica non legata al dare velocemente risposte corrette, ma alla qualità dei processi di pensiero attivati e alla capacità di condividerli con gli altri (pari e insegnante).

Coerentemente con questo quadro, l'insegnante dovrebbe curare con attenzione un altro aspetto: evitare di dare risposte agli allievi nei momenti di difficoltà – comportamento coerente con l'obiettivo di arrivare in fondo al problema, di far sì che gli allievi arrivino alla risposta corretta, non con quello di lasciare che lo affrontino con le loro forze e imparino anche ad uscire dalla difficoltà – e invece porre continuamente domande che facciano da stimolo sia durante la fase di risoluzione che, eventualmente, a posteriori.

Qui di seguito presentiamo una delle tante attività di osservazione, ricerca, descrizione e spiegazione di regolarità che abbiamo sperimentato nei nostri gruppi di ricerca. L'attività scelta è volutamente al livello di scuola dell'infanzia, per mostrare come si possa e si debba lavorare su consegne aperte da subito, in un'ottica verticale.

L'attività descritta (ricerca di regolarità e argomentazione) rientra in un tipo di attività, non a caso molto studiata a livello nazionale e internazionale in educazione matematica (Ferrari, 2004; Radford, 2011) per le sue peculiarità, rispondenti a ciò che abbiamo descritto precedentemente:

- innanzitutto chiedere di osservare e trovare regolarità è di per sé una richiesta di scoperta e non riproduttiva (quindi un vero problema);
- la ricerca di regolarità, matematiche o non matematiche, è legata all'idea di struttura, concetto centrale in matematica;



- la richiesta è aperta e veramente inclusiva: non esiste un'unica risposta giusta e ci possono essere osservazioni di regolarità di diversa natura e profondità;
- la richiesta di descrizione e di spiegazione finale (con il confronto in gruppo) lavora sulla competenza argomentativa e può aiutare a sviluppare, già con i più piccoli, l'idea che la matematica si interessa molto al *perché* e non solo al *come*;
- è un'attività dalle potenzialità enormi in ottica anche di continuità verticale tra livelli scolari<sup>3</sup>.

In questo tipo di attività, come vedremo, il ruolo dell'insegnante è centrale, non solo nella scelta del contesto e nello sviluppo dell'esperienza osservativa, ma anche nella conduzione della discussione, durante la quale non vengono date risposte pronte, ma chieste spiegazioni, proposti nuovi interrogativi e instillati dubbi.

#### 4. Le proprietà della conta

L'attività che descriviamo è stata proposta alla Scuola dell'Infanzia dell'Istituto Comprensivo Follonica II all'interno di un percorso biennale di formazione insegnanti focalizzato sulla proposizione in classe (o sezione nel caso della Scuola dell'Infanzia) di problemi e di osservazioni di regolarità per la scoperta di proprietà/strutture.

Lo schema di attività è stato sempre il solito: osservazione ripetuta di un *fenomeno* (talvolta nel corso di pochi giorni, talvolta per tutto l'anno scolastico) e al termine dell'osservazione richiesta ai bambini di esplicitare cosa secondo loro caratterizza il fenomeno osservato, ovvero quali regolarità hanno notato nella ripetizione del fenomeno.

Una di queste attività di osservazione di regolarità, dedicata alla sezione dei grandi (i bambini di 5 e 6 anni) si è focalizzata sul conteggio, a partire dalla conta dei presenti ad inizio di ogni giornata. I bambini in fila si contavano e segnavano il numero di presenti. Ogni giorno la richiesta di conteggio era fatta a più bambini.

Alla fine dell'anno si è proposto ai bambini la seguente consegna: "*Quali proprietà ha la conta (dei presenti)? Se tu dovessi raccontare qualche cosa della conta ad un tuo compagno che non l'ha mai fatta cosa gli diresti?*"

Riportiamo un breve stralcio di alcuni interventi dei bambini e dell'interazione con la maestra, suddividendo i vari momenti e sottolineando come l'attività sarebbe potuta continuare con nuove domande e nuovi problemi da affrontare.

Un primo bambino, Tommaso, esplicita subito quello che Gelman e Gallistel (1978) chiamano il principio dell'irrelevanza dall'ordine nel contare: l'ordine in cui gli oggetti sono contati è irrilevante. Tommaso dice: "*Se contiamo da un amico, oppure da un altro, siamo sempre dello stesso numero*". Volendo essere pignoli possiamo affermare che Tommaso si è accorto che è irrilevante l'inizio: essendo disposti i bambini in fila, gli ordini possibili (non è che Tommaso

---

<sup>3</sup> A questo proposito è stato proposto un interessantissimo laboratorio alla Scuola estiva UMI/CIIM-AIRDM di Bardonecchia da Ketty Savioli. I materiali sono disponibili al seguente URL: [http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2016/09/Savioli\\_1.pdf](http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2016/09/Savioli_1.pdf)

salta da un bambino all'altro, anche perché sarebbe molto poco strategico) sono essenzialmente due. Ad ogni modo, l'osservazione di Tommaso tocca uno degli aspetti più delicati del conteggio: come sottolineano le ricerche condotte da Gelman e Gallistel, la scoperta di Tommaso è tutt'altro che scontata.

Tommaso sembra svolgere il ruolo che Maria Mellone (2007) definisce di "precursore (apparentemente) inascoltato": gli altri bambini sembrano non essere ancora pronti ad accogliere l'osservazione di Tommaso, ma non è detto che le sue parole non siano ascoltate e non abbiano effetto alcuno. Maria Vittoria infatti, visto che Tommaso sembra riferirsi ad una certa libertà nella scelta del punto di partenza, sottolinea la sua convinzione che la fine abbia una regola ben precisa: *"La conta deve finire al compagno vicino, prima del compagno dove abbiamo iniziato la conta"*. L'osservazione di Maria Vittoria, seppur più legata ad *aspetti operativi* e meno generalizzabile di quella di Tommaso (in teoria si potrebbe finire dove vogliamo a contare, se non seguissimo l'ordine suggerito dalla fila), sembra mostrare sia una certa attenzione a ciò che è stato detto dal compagno, che la capacità di immaginare la situazione. I bambini, infatti, tipicamente contavano a partire da una delle due estremità della fila: Maria Vittoria sembra provare ad immaginarsi cosa si deve fare se si parte da un altro bambino "nel mezzo della fila", come Tommaso dice si possa fare.

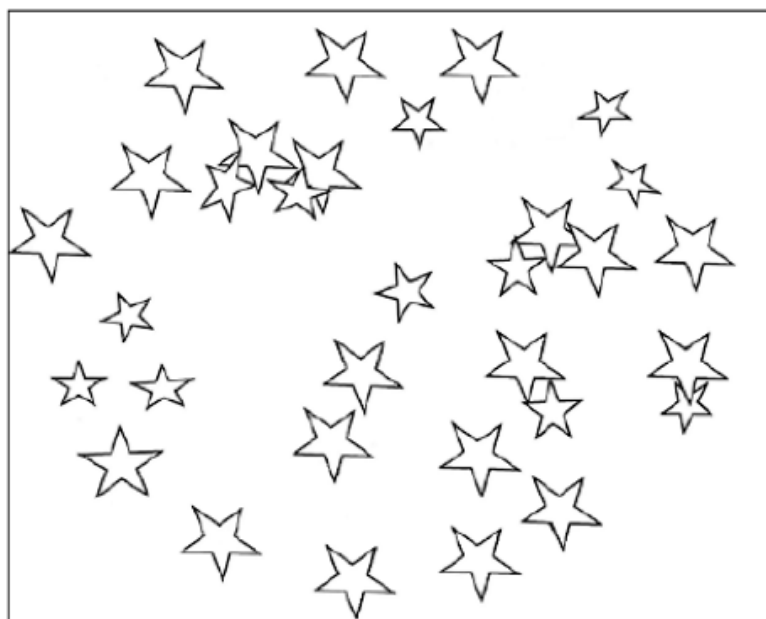
La maestra chiede allora un perché di questa regola della conta (regola che sembra fissare un obbligo: *deve finire*) enunciata da Maria Vittoria. Il motivo sembra condiviso, tanto che i bambini in coro dicono: *"Non si può contare chi si è già contato"*.

Emerge come una conquista consapevole e condivisa quello che Gelman e Gallister (ibidem) identificano come il principio dell'iniettività nel conteggio: appaiare ad ogni oggetto da contare segni distinti (ad esempio i nomi dei numeri, se si conoscono) in modo che uno e un solo segno sia usato per ogni oggetto dello schieramento. L'acquisizione di questo principio comporta la coordinazione di due processi, come sottolineato da Bartolini Bussi (2008):

- la ripartizione, per distinguere cosa è stato contato e cosa no;
- l'etichettatura, per gli adulti tipicamente corrispondente alla sequenza dei numeri naturali. Questo comporta tre difficoltà:
  - nella ripartizione: si conta due volte lo stesso oggetto o non si contano oggetti da contare;
  - nella etichettatura: si usa due volte la stessa etichetta, non si ha abbastanza etichette, si salta un'etichetta da un elenco noto ("uno, due, quattro, cinque");
  - nel coordinare le due cose: si continua o si smette di etichettare non in fase con il ripartire.

Che ci siano delle difficoltà evidenti in tutto questo, anche per bambini più grandi, è provato anche dal seguente quesito INVALSI, proposto nel 2013 in seconda primaria:

## D1. Conta le stelle.



Quante sono in tutto le stelle?

Risposta: .....

Si chiede di contare un insieme di oggetti non spostabili e disposti in ordine caotico. Ebbene, a testimonianza delle difficoltà di cui stiamo parlando, la percentuale di risposte sbagliate del campione nazionale a livello di seconda primaria è del 42,6%.

A seguito della risposta in coro alla domanda della maestra, interviene Alessandro che ricollegandosi all'attenzione sul dove si deve finire di contare dice: *“Il numero che si dice per ultimo ci dice quanti siamo”*. Evidentemente non è chiaro se Alessandro sia consapevole che quello che ha detto vale al di là della specifica esperienza di conteggio di bambini presenti (principio di astrazione), ma sicuramente ha esplicitato un altro dei principi del conteggio di cui stiamo parlando, quello della cardinalità, ovvero che l'etichetta numerica finale ha un significato speciale, rappresenta una proprietà dell'intero insieme: la sua cardinalità. Questo duplice ruolo dell'etichetta finale è spesso enfatizzato nel conteggio dei bambini, conteggio nel quale spesso viene ripetuto l'ultimo numero: *“uno, due, tre, ..., sedici, diciassette, diciotto. Diciotto!”*.

Dopo aver raccolto queste e altre regolarità esplicitate dai bambini, la maestra introduce la richiesta di spiegazione: *“Come mai valgono queste proprietà secondo voi?”*. E qui si apre un mondo di argomentazioni, confronti, dubbi e errori che è superfluo sottolineare come sia ricco e fecondo.

Tommaso basa la sua spiegazione sulla verifica del caso (e quindi seppur la sua congettura è basata sull'esperienza e su osservazioni ripetute, si deve riferire al presente, al caso sotto controllo): *“La prima regola è vera perché, anche oggi, siamo diciotto sia se si conta da un compagno, sia se si inizia a contare da un altro”*.

Ma Elia, vedendo la prova di Tommaso – che fa vedere come venga diciotto sia a partire da un capo della fila che dall'altro – ha un interessante dubbio: *“Però se si comincia sempre da quello che sta all'inizio lì (della fila) ci credo che siamo sempre diciotto. Però se si conta da qui (nel mezzo della fila) non lo so mica!”*.

La maestra propone di contare partendo dal mezzo della fila e i bambini convengono che, anche in questo specifico caso, sono sempre diciotto i presenti. A questo punto la maestra, riprendendo lo spunto di Maria Vittoria, chiede: *“dove deve finire la conta in questo caso?”*. La risposta di Tommaso e Maria Vittoria è interessante: *“Deve finire al compagno vicino...ma vicino prima del compagno dove abbiamo iniziato la conta”*. Emerge, senza una richiesta di precisazione da parte della maestra o di nessun altro, la consapevolezza della necessità di spiegare un termine introdotto in maniera ambigua. È evidente che, da un certo punto di vista, l'uso del *prima* non sembra risolvere l'ambiguità, ma, da una parte la consapevolezza della necessità di spiegare il termine “vicino” è di per sé un traguardo significativo, dall'altra il *prima* è legato alla direzione di conteggio scelta, che gli altri bambini vedono. Quindi, in quello specifico contesto (per gli altri bambini) il *prima* è probabilmente condiviso come riferimento, e comunque sicuramente più informativo del *vicino*.

Un altro dubbio *spontaneo* (non emerso da un adulto) sorge a Lorenzo, che pone un altro problema: *“ma perché da un giorno all'altro cambia il numero [dei presenti]?”*.

Elia ha una risposta pronta: *“Perché viene un compagno di meno... perché l'8 viene prima del 9”*. La risposta di Elia, da una parte conferma la tendenza ad argomentare sulla base della situazione contingente (il giorno precedente il cartellone delle presenze segnava 19 presenze), dall'altra mette in gioco un altro aspetto che la maestra può appuntarsi: Elia sembra far riferimento alle proprietà della notazione posizionale, astraendosi dal conteggio. Non dice infatti il diciotto viene prima del diciannove, ma si focalizza sulle unità.

Osservando quanto è emerso, altri possibili problemi *argomentativi* da porre ai bambini (evocazione di dubbi dall'esterno) sarebbero potuti essere i seguenti:

– Perché la conta deve finire al compagno vicino, prima del compagno dove abbiamo iniziato la conta? Possiamo contare senza finire al compagno vicino? Qui la maestra potrebbe far vedere un conteggio con un ordine diverso che non finisce al compagno vicino e osservare la reazione dei bambini legati ad una precisa strategia di conteggio, effettivamente piuttosto efficiente (l'ordine è chiaro);

– Perché il numero che si dice per ultimo ci dice quanti siamo? Può succedere che il numero che si dice per ultimo non ci dica quanti siamo?

## 5. Conclusioni

Abbiamo sottolineato come l'errore, nel processo di insegnamento e apprendimento della matematica, sia spesso visto come qualcosa da evitare assolutamente, come sintomo di difficoltà da parte degli allievi e talvolta di fallimento dell'insegnamento. Questa visione porta a scelte didattiche coerenti con l'obiettivo di "evitare errori": evitando di affrontare questioni difficili e soprattutto stimolando unicamente il processo riproduttivo in matematica. Il risultato è la costruzione diffusa di un'immagine della matematica e di cosa sia il successo in matematica *epistemologicamente distorta* e lontana dal valore dell'errore nel progresso matematico.

Se guardiamo alla storia della matematica infatti, gli errori e i fallimenti sono parte non solo inevitabile, ma importante e proficua delle tappe del percorso dello sviluppo della conoscenza in generale e della matematica in particolare. Ed è dai periodi di crisi e dagli errori che, nel corso della storia, è venuta fuori nuova matematica oppure si è deciso di abbandonarne o modificarne parti di essa. E così in ambito educativo, l'errore andrebbe utilizzato come una occasione di esplorazione e scoperta per costruire nuova conoscenza, a partire dalle convinzioni degli studenti. Come sottolinea Lolli (2006): "La matematica è un laboratorio di pensiero – questa potrebbe essere una sua definizione – e ogni tanto nel laboratorio gli esperimenti danno esiti insoddisfacenti, inaspettati o incontrollabili".

Tuttavia, se è l'insegnante stesso ad avere paura di sbagliare e di "perdere il controllo" sui percorsi risolutivi degli studenti, è comprensibile da una parte che questa paura si trasmetta allo studente, dall'altra che influenzi le scelte didattiche. In particolare, l'insegnante eviterà di proporre problemi "difficili", eviterà probabilmente di dare problemi, rifugiandosi nella "sicurezza" della richiesta di ripetizione di procedure note. In questo modo però, uno degli obiettivi a nostro avviso più importanti e interessanti dell'educazione matematica – l'educazione al problem solving – viene meno.

D'altra parte, il fatto che gli studenti italiani trovino spesso difficoltà nelle prove nazionali ed internazionali (INVALSI, OCSE-PISA) è anche dovuto alla scarsa educazione ad affrontare situazioni nuove, a risolvere problemi (Zan, 2016). Si preferisce, nella maggior parte dei casi, chiedere agli studenti di ripetere e riprodurre algoritmi noti, piuttosto che affrontare situazioni nuove, proprio per minimizzare il "rischio" di errori. Tutto ciò è legato all'idea (che dagli insegnanti passa agli studenti) che avere successo in matematica significhi dare sempre risposte corrette in poco tempo. Ed è legato, dunque, ad un'idea riduttiva di valutazione. Con le parole di Rosetta Zan (2016): "da un lato bambini e ragazzi si sentono sempre sotto valutazione e quindi non esplorano, non osano: sono ingessati nella ricerca della risposta corretta. Dall'altro lato l'insegnante per paura di ottenere brutti risultati semplifica le richieste".

Un cambiamento di visione, dunque, presuppone un cambiamento metodologico sostanziale nella pratica didattica, presuppone che un approccio mirato "all'addestramento" venga sostituito con approcci mirati a stimolare un pensiero produttivo. L'insegnamento per problemi è un approccio che mira ad obiettivi significativi dell'educazione matematica, e questo anche in linea con quanto scritto nelle *Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* (MIUR, 2012).

Usando le parole di George Polya: “Un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale” (Polya, 1945, tr. it., p. 7).

Dare compiti aperti, mettere nel conto gli errori, chiedere di argomentare stimolano quella varietà e apertura di pensiero che caratterizzano la matematica, il suo studio ed il suo sviluppo, ma che spesso non caratterizzano quella scolastica. Farlo fin da subito non solo è possibile – come dimostra l'esempio discusso in questo contributo – ma è fondamentale per costruire, in verticale, un certo tipo di approccio alla matematica.

## 6. Bibliografia

- Bartolini Bussi, M. (2008). *Matematica, i numeri e lo spazio*. Reggio Emilia: Junior Edizioni.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex.
- Borasi, R. (1989). Students' Constructive Uses of Mathematical Errors: A Taxonomy. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, Ca.
- Di Martino, P. & Zan, R. (2013). Where does fear of maths come from? Beyond the purely emotional. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Ankara: Middle East Technical University.
- Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora Editrice.
- Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. MA. Harvard University Press, Cambridge.
- Halmos, P. (1975). The problem of learning to teach. *The American Mathematical Monthly*, 82 (5), 466-47.
- Herstein, I. N. (1982). *Algebra*. Roma: Editori Riuniti [tr. it. di Antonio Machì di *Topics in Algebra*, 1975].
- Lolli, G. (2006). La questione dei fondamenti tra matematica e filosofia” In: Albeverio, S., Minazzi F. (a cura di), *Matematica e filosofia*, nn. 14-15 di *Note di Matematica, Storia, Cultura* (Pristem/Storia, Università Bocconi, Milano), 2006, pp. 17-35.
- Mellone, M. (2007). *Un progetto didattico innovativo sulle strutture aritmetiche*. Tesi di dottorato di ricerca in scienze matematiche – Università Federico II di Napoli. Disponibile [http://www.fedoa.unina.it/2017/1/Mellone\\_Scienze\\_Matematiche.pdf](http://www.fedoa.unina.it/2017/1/Mellone_Scienze_Matematiche.pdf)
- MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma.
- Nigris, E. (2009). *Le domande che aiutano a capire*. Milano: Bruno Mondadori Editore.



Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Popper, K. (1969). *Scienza e filosofia: problemi e scopi della scienza*. Torino: Giulio Einaudi Editore.

Popper, K. (1972). *Conoscenza oggettiva. Un punto di vista evoluzionistico*. Roma: Armando Editore.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.

Radford, L. (2011). Sullo sviluppo del pensiero matematico nei giovani studenti: la graduale armonizzazione di percezione, gesti e simboli. In *Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica*. Castel San Pietro: Pitagora Editrice.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Convergence, Springer Italia.

Zan, R. (2016). Matematica e studenti italiani: tutto da rifare?. *La vita scolastica*. Giunti-Scuola.

Zan, R. & Di Martino, P. (2017). *Insegnare e apprendere matematica con le indicazioni nazionali*. Firenze: Giunti Scuola.

Received October 12, 2017

Revision received December, 2017/December 24, 2017

Accepted December 30, 2017